УДК 517.9
DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-16

©2019. **С.М. Чуйко, Я.В. Калініченко, М.В. Попов**

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ВИРОДЖЕНОЇ НЕТЕРОВОЇ РІЗНИЦЕВО-АЛГЕБРАЇЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

У статті запропоновано оригінальні умови розв'язності, а також схему знаходження розв'язків лінійної нетерової різницево-алгебраїчної крайової задачі, при цьому істотно використовується техніка псевдообернення матриць за Муром-Пенроузом. Поставлена в статті задача продовжує дослідження умов розв'язності лінійних нетерових крайових задач, наведених у монографіях А.М. Самойленка, М.В. Азбелева, В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматулліної і О.А. Бойчука. Дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач тісно пов'язане з дослідженням крайових задач для різницевих рівнянь, започаткованим у роботах А.А. Маркова, С.Н. Бернштейна, Я.С. Безиковича, О.О. Гельфонда, С.Л. Соболєва, В.С. Рябенького, В.Б. Демідовича, А. Халаная, Г.І. Марчука, О.А. Самарського, Ю.О. Митропольського, Д.І. Мартинюка, Г.М. Вайніко, А.М. Самойленка та О.А. Бойчука. З іншого боку, дослідження крайових задач для різницевих рівнянь пов'язане з вивченням диференціально-алгебраїчних крайових задач, започаткованим у роботах К. Вейєрштрасса, М.М. Лузіна та Ф.Р. Гантмахера. Систематичному вивченню диференціально-алгебраїчних крайових задач присвячені роботи С. Кемпбелла, Ю.Є. Бояринцева, В.Ф. Чистякова, А.М. Самойленка, М.О. Перестюка, В.П. Яковця, О.А. Бойчука, А. Ілчманна та Т. Рейса. Вивчення диференціально-алгебраїчних крайових задач пов'язане також із численними застосуваннями таких задач у теорії нелінійних коливань, у механіці, біології, радіотехніці, теорії керування, теорії стійкості руху. Досліджено загальний випадок, коли лінійний обмежений оператор, відповідний до однорідної частини лінійної нетерової різницево-алгебраїчної крайової задачі, не має оберненого. У статті побудовано узагальнений оператор Гріна лінійної різницево-алгебраїчної крайової задачі. Актуальність дослідження умов розв'язності, а також знаходження розв'язків лінійних нетерових різницево-алгебраїчних крайових задач пов'язана з широким використанням різницево-алгебраїчних крайових задач, одержуваних при лінеаризації нелінійних нетерових крайових задач для систем звичайних диференціальних і різницевих рівнянь. Запропоновані умови розв'язності, а також схема знаходження розв'язків лінійних нетерових різницево-алгебраїчних крайових задач детально проілюстровані на прикладах.

MSC: 34B15.

Ключові слова: *лінійна нетерова крайова задача, системи різницевих рівнянь, псевдообернення матриць по Муру–Пенроузу.*

1. Постановка задачі.

Досліджуємо задачу про знаходження обмежених розв'язків

$$z(k) \in \mathbb{R}^n, \ k \in \Omega := \{0, \ 1, \ 2, \ \dots \ , \ \omega\}$$

лінійної нетерової $(n \neq \upsilon)$ крайової задачі для системи різницево-алгебраїчних рівнянь [1, 2]

$$A(k)z(k+1) = B(k)z(k) + f(k), \ \ell z(\cdot) = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}^{\upsilon}; \tag{1}$$

Робота виконана за фінансової підтримки Міністерства освіти і науки України, р/н 0118U003390.

тут $A(k),\ B(k) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ – прямокутні матриці і $f(k)$ – дійсні вектор-стовпці, $\ell z(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\upsilon$ – лінійний обмежений векторний функціонал, визначений на просторі обмежених функцій [1]. Поставлена різницево-алгебраїчна задача (1) є узагальненням задачі, розв'язаної О.А. Бойчуком [1]. За умови обмеженості матриць $A^+(k)B(k), A^+(k)f(k)$, а також

$$P_{A^*(k)} = 0,\ k \in \Omega \tag{2}$$

система (1) приводиться до традиційної системи лінійних різницевих рівнянь

$$z(k+1) = A^+(k)B(k)z(k) + \mathfrak{F}_0(k, \nu_0(k)). \tag{3}$$

Тут

$$\mathfrak{F}_0(k, \nu_0(k)) := A^+(k)f(k) + P_{A_{\rho_0}}(k)\nu_0(k),\ \mathrm{rank}\ A(k) := \sigma_0 = m < n,$$

$A^+(k)$ – псевдообернена (за Муром–Пенроузом) матриця, $P_{A^*}(k)$ – матриця-ортопроектор:

$$P_{A^*}(k) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(A^*(k)),$$

$P_{A_{\rho_0}}(k)$ – $(n \times \rho_0)$– матриця, складена із ρ_0 лінійно-незалежних стовпців $(n \times n)$– матриці-ортопроектора

$$P_A(k) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(A(k)),$$

$\nu_0(k) \in \mathbb{R}^{\rho_0}$ – довільна обмежена вектор-функція. Загальний розв'язок задачі Коші $z(0) = c \in \mathbb{R}^n$ для однорідної частини системи різницевих рівнянь (3)

$$z(k) = X_0(k)\, c,\ c \in \mathbb{R}^n;$$

визначає нормальна фундаментальна матриця:

$$X_0(k+1) = A^+(k)B(k)X_0(k),\ X_0(0) = I_n.$$

За умови (2) нормальна фундаментальна матриця $X_0(k)$ однорідної частини системи різницевих рівнянь (3) є, взагалі кажучи, виродженою:

$$\det X_0(k) = 0,$$

отже, для побудови загального розв'язку задачі Коші $z(0) = c \in \mathbb{R}^n$ для неоднорідної виродженої системи різницевих рівнянь (3) схема [1] не може бути застосована. У той же час оператор Гріна задачі Коші для виродженої системи різницевих рівнянь (3) може бути знайдений в такий спосіб:

$$K[\mathfrak{F}_0(j, \nu_0(j))](0) := 0,\ K[\mathfrak{F}_0(j, \nu_0(j))](1) := \mathfrak{F}_0(1, \nu_0(1)),\ \dots ,$$

$$K[\mathfrak{F}_0(j, \nu_0(j))](k+1) := A^+(k)B(k)K[\mathfrak{F}_0(j, \nu_0(j))](k) + \mathfrak{F}_0(k, \nu_0(k)),\ \dots .$$

За аналогією з класифікацією диференційно-алгебраїчних рівнянь [3] за умови (2), у разі обмеженості матриць $A^+(k)B(k),\ A^+(k)f(k)$, будемо казати, що система лінійних різницево-алгебраїчних рівнянь (1) є невиродженою. Зауважимо, що, на відміну від традиційної системи лінійних різницевих рівнянь, розв'язок системи лінійних різницево-алгебраїчних рівнянь (1) за умови (2) залежить від довільної обмеженої вектор-функції.

Досліджуємо далі задачу про знаходження обмежених розв'язків системи лінійних різницево-алгебраїчних рівнянь (1) за умови $P_{A^*(k)} \neq 0$. Припустимо, що матриця $A(k)$ має постійний ранг, а саме:

$$1 \leq \text{rank } A(k) = \sigma_0, \ k \in \Omega.$$

Як відомо, будь-яка $(m \times n)-$ матриця $A(k)$ може бути зображена у вигляді розвинення

$$A(k) = R_0(k) \cdot J_\sigma \cdot S_0(k);$$

тут $R_0(k)$ и $S_0(k)$ — невироджені матриці. Невироджена заміна змінної [3]

$$y(k+1) = S_0(k) z(k+1)$$

приводить систему (1) до вигляду

$$J_{\sigma_0} y(k+1) = C_0(k) y(k) + R_0^{-1}(k) f(k), \ k \in \Omega; \tag{4}$$

тут

$$C_0(k) := R_0^{-1}(k) B(k) S_0^{-1}(k-1) := \begin{pmatrix} C_{11}^{(0)}(k) & C_{12}^{(0)}(k) \\ C_{21}^{(0)}(k) & C_{22}^{(0)}(k) \end{pmatrix}.$$

Заміна змінної

$$y(k) = \text{ col } (u(k), v(k)) \in \mathbb{R}^n, \ u(k) \in \mathbb{R}^{\sigma_0}, \ v(k) \in \mathbb{R}^{n-\sigma_0}$$

приводить систему (4) до вигляду

$$u(k+1) = C_{11}^{(0)}(k) u(t) + C_{12}^{(0)}(k) v(k) + g_1^{(0)}(k), \tag{5}$$

$$C_{21}^{(0)}(k) u(k) + C_{22}^{(0)}(t) v(k) + g_2^{(0)}(k) = 0; \tag{6}$$

тут

$$R_0^{-1}(k) f(k) := \text{ col } \left(g_1^{(0)}(k), \, g_2^{(0)}(k) \right).$$

Крім того $P_{D_0^*}(k)$ – матриця-ортопроектор:

$$P_{D_0^*}(k) : \mathbb{R}^{m-\sigma_0} \to \mathbb{N}(D_0^*(k)).$$

Рівняння (6) розв'язне тоді й тільки тоді, коли [4]

$$P_{D_0^*}(k) g_2^{(0)}(k) = 0;$$

при цьому загальний розв'язок рівняння (6)

$$y(k) = P_{D_{\rho_0}}\varphi(k) - D_0^+(k)g_2^{(0)}(k),\ D_0(k) := \left[C_{21}^{(0)}(k); C_{22}^{(0)}(k)\right] \in \mathbb{R}^{(m-\sigma_0)\times n},\ \varphi(k) \in \mathbb{R}^{\rho_0}$$

визначає $P_{D_{\rho_0}}(k)$ – $(n \times \rho_0)$-матриця, складена із ρ_0 лінійно-незалежних стовпців $P_{D_0}(k)$-матриці-ортопроектора:

$$P_{D_0}(k) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(D_0(k)).$$

Позначаючи блоки матриці $P_{D_{\rho_0}}(k)$ і добутки $D_0^+(k)g_2^{(0)}(k)$

$$P_{D_{\rho_0}}(k) := \text{ col } (P_1^{(0)}(k),\ P_2^{(0)}(k)),\ D_0^+(k)g_2^{(0)}(k) = -\text{ col } \left(f_1^{(1)}(t), f_2^{(1)}(t)\right),$$

приходимо до задачі про побудову розв'язків $\varphi(k) \in \mathbb{R}^{\rho_0}$ лінійної різницево-алгебраїчної системи

$$A_1(k)\varphi(k+1) = B_1(k)\varphi(k) + f_1(k); \tag{7}$$

тут

$$A_1(k) := P_1^{(0)}(k) \in \mathbb{R}^{\sigma_0\times\rho_0},\ \sigma_1 = \sigma_0 \le \rho_0,$$

$$B_1(k) := C_{11}^{(0)}(k)P_1^{(0)}(k) + C_{12}^{(0)}(k)P_2^{(0)}(k),\ \text{rank } A_1(k) := \sigma_1,$$

крім того

$$f_1(k) := C_{11}^{(0)}(k)f_1^{(1)}(k) + C_{12}^{(0)}(k)f_2^{(1)}(k) + g_1^{(0)}(k) - f_1^{(1)}(k+1).$$

За умови [3] обмеженості матриць $A_1^+(k)B_1(k)$ і вектор-стовпців

$$A_1^+(k)f_1(k),\ S_0^{-1}(k-1)D_0^+(k)g_2^{(0)}(k),$$

а також

$$P_{A^*}(k) \ne 0,\ P_{A_1^*}(k) \equiv 0,\ P_{D_0^*}(k)g_2^{(0)}(k) = 0, \tag{8}$$

система (7) приводить до традиційної системи лінійних різницевих рівнянь

$$\varphi(k+1) = A_1^+(k)B_1(k)\varphi(k) + \mathfrak{F}_1(k, \nu_1(k)),\ \nu_1(k) \in \mathbb{R}^{\rho_1}; \tag{9}$$

тут

$$\mathfrak{F}_1(k, \nu_1(k)) := A_1^+(k)f_1(k) + P_{A_{\varrho_1}}(k)\nu_1(k),$$

$\nu_1(k) \in \mathbb{R}^{\rho_1}$ – довільна обмежена вектор-функція. Крім того $P_{A_1^*(k)}$ – матриця-ортопроектор [4]:

$$P_{A_1^*}(k) : \mathbb{R}^{\sigma_0} \to \mathbb{N}(A_1^*(k)),$$

$P_{A_{\rho_1}}(k)$ – $(\rho_0 \times \rho_1)$– матриця, утворена з ρ_1 лінійно-незалежних стовпців $(\rho_0 \times \rho_0)$– матриці-ортопроектора: $P_{A_1}(k) : \mathbb{R}^{\rho_0} \to \mathbb{N}(A_1(k))$. Позначимо $U_1(t)$ нормальну фундаментальну матрицю

$$U_1(k+1) = A_1^+(k)B_1(k)U_1(k),\ U_1(0) = I_{\rho_0}$$

отриманої традиційної системи лінійних різницевих рівнянь (9). Використовуючи рівняння

$$z(k) = S_0^{-1}(k-1)\left[P_{D_{\rho_0}}\varphi(k) - D_0^+(k)g_2^{(0)}(k)\right],$$

робимо висновок, що за умови (8) система (1) має розв'язок вигляду

$$z(k, c_{\rho_1}) = S_0^{-1}(k-1)P_{D_{\rho_0}}U_1(k)c_{\rho_0} + S_0^{-1}(k-1)P_{D_{\rho_0}}K\left[\mathfrak{F}_1(s, \nu_1(s))\right](k) -$$

$$-S_0^{-1}(k-1)D_0^+(k)g_2^{(0)}(k),\ c_{\rho_0} \in \mathbb{R}^{\rho_0},$$

де

$$K[\mathfrak{F}_1(j, \nu_1(j))](0) := 0,\ K[\mathfrak{F}_1(j, \nu_1(j))](1) := \mathfrak{F}_1(0, \nu_1(0)),\ \dots,$$

$$K[\mathfrak{F}_1(j, \nu_1(j))](k+1) := A_1^+(k)B_1(k)K[\mathfrak{F}_1(j, \nu_1(j))](k) + \mathfrak{F}_1(k, \nu_1(k)),\ \dots .$$

За аналогією з класифікацією імпульсних крайових задач [4,6,7] у випадку (8), за умови обмеженості матриць $A_1^+(k)B_1(k)$ і вектор-стовпців

$$A_1^+(k)f_1(k),\ S_0^{-1}(k)D_0^+(k)g_2^{(0)}(k)$$

будемо говорити, що для лінійної різницево-алгебраїчної системы (1) має місце виродження першого порядку. Таким чином, доведена наступна лема.

Лема. *У разі виродження першого порядку, за умови (8), у разі обмеженості матриці* $A_1^+(k)B_1(k)$ *і вектор-стовпців*

$$A_1^+(k)f_1(k),\ S_0^{-1}(k-1)D_0^+(k)g_2^{(0)}(k)$$

лінійна різницево-алгебраїчна система (1) має розв'язок вигляду

$$z(k, c_{\rho_0}) = X_1(k)\,c_{\rho_0} + K[f(j), \nu_1(j)](k),\ c_{\rho_0} \in \mathbb{R}^{\rho_0};$$

тут

$$X_1(k) := S_0^{-1}(k-1)P_{D_{\rho_0}}U_1(k)$$

– фундаментальна матриця, $\nu_1(k) \in \mathbb{R}^{\rho_1}$ *– довільна обмежена вектор-функція,*

$$K[f(j), \nu_1(j)](k) := S_0^{-1}(k-1)P_{D_{\rho_0}}K\left[\mathfrak{F}_1(s, \nu_1(j))\right](k) - S_0^{-1}(k-1)D_0^+(k)g_2^{(0)}(k)$$

– узагальнений оператор Гріна задачі Коші для виродженої різницево-алгебраїчної системи (1).

За умови

$$P_{A^*}(k) \neq 0,\ P_{A_1^*}(k) = 0,\ P_{D_0^*}\,g_2^{(0)}(k) = 0,$$

у разі необмеженість матриць $A_1^+(k)B_1(k)$, або вектор-стовпців

$$A_1^+(k)f_1(k),\ S_0^{-1}(k)D_0^+(k)g_2^{(0)}(k)$$

система (1) розв'язна, але розв'язок не є обмеженим.

Приклад 1. *Знайдемо розв'язок системи різницево-алгебраїчних рівнянь першого порядку*

$$A\,z(k+1) = B(k)\,z(k) + f(k),\ \ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

де

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ f(k) := \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки умову $P_{A^*(k)} = 0$ не виконано, остільки дана система різницево-алгебраїчних рівнянь вироджена, при цьому матриця $A(k)$ має постійний ранг, а саме: $\operatorname{rank} A(k) := \sigma_0 = 2$. Матриця $A(k)$ може бути представлена у вигляді стандартного розвинення:

$$A(k) = R(k)\cdot J_\sigma \cdot S(k),\ R(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ S(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тут $R(k)$ и $S(k)$ – невироджені матриці, крім того

$$J_\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

У даному випадку матриця

$$A_1(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

– матриця повного рангу, при цьому $P_{A_1}(k) \neq 0,\ \ P_{A_{\rho_1}}(k) \neq 0$, тому шуканий розв'язок

$$z(k, c_3) = X_1(k)c_3 + K\Big[f(j), \nu_1(j)\Big](k),\ \ c_3 \in \mathbb{R}^3$$

залежить від довільної неперервної функції $\nu_1(k)$; тут

$$X_1(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ X_1(1) = X_1(2) = X_1(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Покладемо $\nu_1(k) := 0$, при цьому

$$K\Big[f(j), \nu_1(j)\Big](0) = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ K\Big[f(j), \nu_1(j)\Big](1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$K\Big[f(j),\nu_1(j)\Big](2)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\-1\\6\\3\end{pmatrix},\ K\Big[f(j),\nu_1(j)\Big](0)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0\\-1\\12\\8\end{pmatrix}.$$

2. Крайові задачі для систем лінійних різницево-алгебраїчних рівнянь.

Досліджуємо далі задачу про знаходження обмежених розв'язків лінійної нетерової ($n \neq \upsilon$) крайової задачі для системи лінійних різницево-алгебраїчних рівнянь (1). Зауважимо, що, на відміну від традиційної системи лінійних різницевих рівнянь, розв'язок системи лінійних різницево-алгебраїчних рівнянь (1), взагалі кажучи, залежить від довільної обмеженої вектор-функції $\nu_1(k) \in \mathbb{R}^{\rho_1}$, при цьому розв'язність лінійної нетерової крайової задачі для системи лінійних різницево-алгебраїчних рівнянь (1) також залежить від вибору цієї функції. Покладемо

$$\nu_1(k) := \Psi_1(k)\gamma,\ \gamma \in \mathbb{R}^{\theta};$$

тут

$$\Psi_1(k) \in \mathbb{R}^{\rho_1\times\theta}$$

– довільна обмежена матриця повного рангу. Узагальнений оператор Гріна задачі Коші для системи лінійних різницево-алгебраїчних рівнянь (1) зобразимо у вигляді

$$K\Big[f(j),\nu_1(j)\Big](k)=K\Big[f(j)\Big](k)+K\Big[\Psi_1(j)\Big](k)\,\gamma;$$

тут

$$K\Big[\Psi_1(j)\Big](k):=S_0^{-1}(k-1)P_{D_{\rho_0}}\mathcal{K}\Big[\Psi_1(s))\Big](k),$$

де

$$\mathcal{K}\Big[\Psi_1(j)\Big](0):=0,\ \mathcal{K}\Big[\Psi_1(j)\Big](1):=P_{A_{\rho_1}}(0)\Psi_1(0),$$

$$\mathcal{K}\Big[\Psi_1(j)\Big](2):=A_1^{+}(1)B_1(1)\mathcal{K}\Big[\Psi_1(j)\Big](1)+P_{A_{\rho_1}}(1)\Psi_1(1),\ \dots\ ,$$

$$\mathcal{K}\Big[\Psi_1(j)\Big](k+1):=A_1^{+}(k)B_1(k)\mathcal{K}\Big[\Psi_1(j)\Big](k)+P_{A_{\rho_1}}(k)\Psi_1(k).$$

Позначимо матрицю

$$\mathcal{D}_1:=\Big\{\ Q_1\ ;\ \ell K\Big[\Psi_1(j)\Big](\cdot)\ \Big\}\in\mathbb{R}^{\upsilon\times(\rho_0+\theta)}.$$

Підставляючи загальний розв'язок

$$z(k,c_{\rho_0})=X_1(k)\,c_{\rho_0}+K[f(j),\nu_1(j)](k),\ c_{\rho_0}\in\mathbb{R}^{\rho_0};$$

системи лінійних різницево-агебраїчних рівнянь (1) у крайову умову (1), приходимо до лінійного алгебраїчного рівняння

$$\mathcal{D}_1\, \check{c} = \alpha - \ell K\Big[A^+(j)f(j)\Big](\cdot),\ \check{c} := \mathrm{col}\,(c_{\rho_0}, \gamma) \in \mathbb{R}^{\rho_0+\theta}. \tag{10}$$

Рівняння (10) розв'язне тоді й тільки тоді, коли

$$P_{\mathcal{D}_1^*}\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(j)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{11}$$

Тут $P_{\mathcal{D}_1^*}$ – ортопроектор:

$$\mathbb{R}^{\upsilon} \to \mathbb{N}(\mathcal{D}_1^*).$$

За умови (11) і тільки за неї загальний розв'язок рівняння (10)

$$\check{c} = \mathcal{D}_1{}^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(j)\Big](\cdot)\Big\} + P_{\mathcal{D}_1}\,\delta,\ \delta \in \mathbb{R}^{\rho_0+\theta}$$

визначає загальний розв'язок крайової задачі (1)

$$z(k,\delta) = \Big\{X_1(k); K\Big[\Psi_1(j)\Big](k)\Big\}\mathcal{D}_1^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(j)\Big](\cdot)\Big\}+$$

$$+K\Big[f(j)\Big](k) + \Big\{X_1(k); K\Big[\Psi_1(j)\Big](k)\Big\}P_{\mathcal{D}_1}\,\delta,\ \delta \in \mathbb{R}^{\rho_0+\theta}.$$

Тут $P_{\mathcal{D}_1}$ – матриця-ортопроектор: $\mathbb{R}^{\rho_0+\theta} \to \mathbb{N}(\mathcal{D}_1)$. Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема. *Задача про знаходження обмежених розв'язків системи лінійних різницево-агебраїчних рівнянь (1) у разі виродження першого порядку, за умови (8), у разі обмеженості матриці $A_1^+(k)B_1(k)$ і вектор-стовпців*

$$A_1^+(k)f_1(k),\ S_0^{-1}(k-1)D_0^+(k)g_2^{(0)}(k)$$

для фіксованої обмеженої матриці $\Psi_1(k)$ повного рангу має розв'язок вигляду

$$z(k, c_{\rho_0}) = X_1(k)\, c_{\rho_0} + K[f(j), \nu_1(j)](k),\ c_{\rho_0} \in \mathbb{R}^{\rho_0}.$$

За умови (11) і тільки за неї загальний розв'язок різницево-агебраїчної крайової задачі (1)

$$z(k, c_r) = X_r(k)c_r + G\Big[f(j); \Psi_1(j); \alpha\Big](k),\ c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна лінійної різницево-алгебраїчної крайової задачі (1)

$$G\Big[f(j); \Psi_1(j); \alpha\Big](k) := K\Big[f(j)\Big](k)+$$

$$+\Big\{X_1(k); K\Big[\Psi_1(j)\Big](k)\Big\}\mathcal{D}_1^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(j)\Big](\cdot)\Big\}.$$

Матриця $X_r(k)$ утворена з r лінійно незалежних стовпців матриці

$$\Big\{X_1(k); K\Big[\Psi_1(j)\Big](k)\Big\}P_{\mathcal{D}_1}.$$

За умови $P_{\mathcal{D}_1^*} \neq 0$ будемо говорити, що різницево-агебраїчна крайова задача(1) в разі виродження першого порядку представляє критичний випадок.

Приклад 2. *Знайдемо розв'язок лінійної крайової задачі для системи різницево-агебраїчних рівнянь першого порядку*

$$A\,z(k+1) = B(k)\,z(k) + f(k),\ \ \ell z(\cdot) = \alpha,\ \ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \tag{12}$$

де матриці A, B і вектор-функція $f(k)$ визначені в прикладі 1, крім того

$$\ell z(\cdot) := M\,z(3),\ \ M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \ \alpha := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки умову (2) не виконано, остільки система різницево-агебраїчних рівнянь (12) вироджена, при цьому має місце виродження першого порядку. Покладемо

$$\nu_1(k) := \Psi_1(k)\gamma,\ \ \Psi_1(k) := \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \end{pmatrix},\ \ \gamma \in \mathbb{R}^3,$$

при цьому для матриці

$$Q_1 = M\,X_1(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

мають місце нерівності

$$P_{Q_1^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,\ \ P_{Q_1^*}\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(j)\Big](\cdot)\Big\} \neq 0,$$

отже для фіксованої функції $\nu_1(k) := 0$ різницево-агебраїчна крайова задача (12) не розв'язна. Оскільки виконана умова

$$P_{Q_1^*} \neq 0,\ \ P_{\mathcal{D}_1^*} = 0,$$

остільки різницево-агебраїчна крайова задача (12) приведена до некритичного випадку, отже, згідно з доведеною теоремою крайова задача (12) розв'язна; тут

$$\mathcal{D}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ \mathcal{D}_1^+ = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 21 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок крайової задачі (12)

$$z(k, c_r) = X_r(k)c_r + G\Big[f(j); \Psi_1(j); \alpha\Big](k),\ c_r \in \mathbb{R}^2$$

визначає

$$X_r(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ X_r(1) = X_r(2) = X_r(3) = 0$$

– фундаментальна матриця розв'язків однорідної частини крайової задачі (12), а також

$$G\Big[f(j); \Psi_1(j); \alpha\Big](0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},\ G\Big[f(j); \Psi_1(j); \alpha\Big](1) = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 2 \\ -21 \\ -84 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$G\Big[f(j); \Psi_1(j); \alpha\Big](2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix},\ G\Big[f(j); \Psi_1(j); \alpha\Big](3) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

– оператор Гріна крайової задачі (12).

За умови

$$P_{Q_1^*} \neq 0,\ P_{\mathcal{D}_1^*} = 0$$

будемо говорити, що різницево-агебраїчна крайова задача (1) приведена до некритичного вмпадку. У некритичному випадку умова (11) виконується для будь-яких неоднорідностей лінійної різницево-агебраїчної крайової задачі (1).

Наслідок. *Задача про знаходження обмежених розв'язків системи лінійних різницево-агебраїчних рівнянь (1) у разі виродження першого порядку, за умови (8), у разі обмеженості матриці $A_1^+(k)B_1(k)$ і вектор-стовпців*

$$A_1^+(k)f_1(k),\ S_0^{-1}(k-1)D_0^+(k)g_2^{(0)}(k)$$

для фіксованої обмеженою матриці $\Psi_1(k)$ повного рангу має розв'язок вигляду

$$z(k, c_{\rho_0}) = X_1(k)\, c_{\rho_0} + K[f(j), \nu_1(j)](k),\ c_{\rho_0} \in \mathbb{R}^{\rho_0}.$$

У некритичному випадку загальний розв'язок лінійної різницево-агебраїчної крайової задачі (1)

$$z(k, c_r) = X_r(k)c_r + G\Big[f(j); \Psi_1(j); \alpha\Big](k),\ c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна лінійної різницево-агебраїчної крайової задачі (1)

$$G\Big[f(j);\Psi_1(j);\alpha\Big](k) := K\Big[f(j)\Big](k)+$$

$$+\Big\{X_1(k);K\Big[\Psi_1(j)\Big](k)\Big\}\mathcal{D}_1^+\Big\{\alpha-\ell K\Big[f(j)\Big](\cdot)\Big\}.$$

Приклад 3. *Знайдемо розв'язок лінійної крайової задачі для системи різницево-агебраїчних рівнянь першого порядку (12), де матриці A, B і вектор-функція $f(k)$ визначені в прикладі 1, крім того*

$$\ell z(\cdot) := z(0) - z(3) = \alpha, \ \alpha := \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 12 & 8 \end{pmatrix}^*.$$

Оскільки умову (2) не виконано, остільки система різницево-агебраїчних рівнянь (12) вироджена, при цьому має місце виродження першого порядку. Покладемо

$$\Psi_1(k) := \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \end{pmatrix}, \ \gamma \in \mathbb{R}^3,$$

при цьому для матриці

$$Q_1 = \ell X_1(\cdot) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

має місце рівність

$$P_{Q_1^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \ P_{Q_1^*}\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(j)\Big](\cdot)\Big\} = 0,$$

отже різницево-агебраїчна крайова задача (12) представляє критичний випадок. Крім того, для фіксованої функції $\nu_1(k) := 0$ має місце рівність, отже різницево-агебраїчна крайова задача (12) розв'язна. Розв'язок крайової задачі (12)

$$z(k, c_r) = X_r(k)c_r + G\Big[f(j);0;\alpha\Big](k), \ c_r \in \mathbb{R}^2$$

визначае

$$G\Big[f(j);0;\alpha\Big](k) = K\Big[f(j)\Big](k), \ k = 0, \ 1, \ 2, \ 3$$

– оператор Гріна крайової задачі (12).

Запропонована в статті схема дослідження різницево-агебраїчних крайових задач аналогічно [13,14] може бути перенесена на дифференціально-алгебраїчні крайові задачі в частинних похідних. З іншого боку, запропонована в статті схема дослідження різницево-агебраїчних крайових задач аналогічно [15, 16] може бути перенесена на матричні різницево-агебраїчні крайові задачі.

Цитована література

1. *Бойчук А.А.* Краевые задачи для систем разностных уравнений // Укр. мат. журн. – 1997. – 49, № 6. – С. 832–835.
2. *Campbell S.L.* Limit behavior of solutions of singular difference equations // Linear algebra and its appl. – 1979. – 23. – P. 167–178.
3. *Chuiko S.M.* On a reduction of the order in a differential-algebraic system // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – 235, № 1. – P. 2–18.
4. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – XIV + 317 pp.
5. *Чуйко С.М., Калиниченко Я.В.* Краевые задачи для систем невырожденных разностно-алгебраических уравнений // Праці ІПММ НАН України. – 32. – 2018. – С. 133–148.
6. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк, 1987. – 287 с.
7. *Chuiko S.M.* A Generalized Green operator for a boundary value problem with impulse action // Differential Equations. – 2001. – 37, № 8. – P. 1189–1193.
8. *Chuiko S.M.* Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – 38 (2). – P. 236–244.
9. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Том 1. – М.: Высшая школа, 1988. – 712 с.
10. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986.
11. *Крейн С.Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.
12. *Chuiko S.M.* On the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem by a degenerate pulsed action // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – 197, № 1. – P. 138–150.
13. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yefimushkin A.* On the boundary-value problems for quasiconformal functions in the plane // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – 214. – P. 200–219.
14. *Skrypnik I.I.* Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption // Israel Journal of Mathematics. – 2016. – 215, № 1. – P. 163–179.
15. *Chuiko S.M.* On the solvability of a matrix boundary-value problem // Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya "Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory". – 2017. – 132. – P. 139–143.
16. *Chuiko S.M.* To the issue of a generalization of the matrix differential-algebraic boundary-value problem // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – 227, № 1. — P. 13–25.

References

1. Boichuk, A.A. (1997). Boundary value problems for systems of difference equations. *Ukr. mat. zhurn., 49*(6), 832-835 (in Russian).
2. Campbell, S.L. (1979). Limit behavior of solutions of singular difference equations. *Linear algebra and its appl., 23*, 167-178.
3. Chuiko, S.M. (2018). On a reduction of the order in a differential-algebraic system. *Journal of Mathematical Sciences, 235*(1), 2-18.
4. Boichuk, A.A., Samoilenko, A.M. (2004). *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems.* Utrecht; Boston: VSP, 317 p.
5. Chuiko, S.M., Kalinichenko, Ya.V. (2018). Boundary value problems for systems of non-degenerate difference-algebraic equations. *Praci IПMM, 32*, 133-148 (in Russian).

6. Samoilenko, A.M., Perestyuk, M.O. (1995). *Impulsive differential equations.* Singapore: World Scientific.
7. Chuiko, S.M. (2001). A generalized Green operator for a boundary value problem with impulse action. *Differential Equations, 37*(8), 1189-1193.
8. Chuiko, S.M. (2017). Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem. *Lobachevskii Journal of Mathematics, 38*(2), 236-244.
9. Kudryavtsev, L.D. (1988). *Course of mathematical analysis. Volume 1.* M .: Vysshaya shkola (in Russian).
10. Tikhonov, A.N., Arsenin, V.Ya. (1977–1986). *Solution of Ill-Posed Problems.* Winston, Washington, DC, 288 p.
11. Krein, S.G. (1971). *Linear equations in Banach space.* M.: Nauka (in Russian).
12. Chuiko, S.M. (2014). On the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem by a degenerate pulsed action. *Journal of Mathematical Sciences, 197*(1), 138-150.
13. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Yefimushkin, A. (2016). On the boundary-value problems for quasiconformal functions in the plane. *Journal of Mathematical Sciences, 214*(2), 200-219.
14. Skrypnik, I.I. (2016). Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption. *Israel Journal of Mathematics, 215*(1), 163-179.
15. Chuiko, S.M. (2017). On the solvability of a matrix boundary-value problem. *Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya "Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory", 132*, 139-143.
16. Chuiko, S.M. (2017). To the issue of a generalization of the matrix differential-algebraic boundary-value problem. *Journal of Mathematical Sciences, 227*(1), 13-25.

S.M. Chuiko, Ya.V. Kalinichenko, N.V. Popov

On the solvability of the degenerate Noetherian difference-algebraic boundary value problem.

The original conditions of solvability and the scheme of finding solutions of a linear Noetherian difference-algebraic boundary-value problem are proposed in the article, while the technique of pseudo-inversion of matrices by Moore–Penrose is substantially used. The problem posed in the article continues to study the conditions for solvability of linear Noetherian boundary value problems given in the monographs of A.M. Samoilenko, A.V. Azbelev, V.P. Maximov, L.F. Rakhmatullina and A.A. Boichuk. The study of differential-algebraic boundary-value problems is closely related to the investigation of boundary-value problems for difference equations, initiated in the works of A.A. Markov, S.N. Bernstein, Y.S. Bezikovych, O.O. Gelfond, S.L. Sobolev, V.S. Ryabenkyi, V.B. Demidovych, A. Halanai, G.I. Marchuk, A.A. Samarskyi, Yu.A. Mytropolskyi, D.I. Martyniuk, G.M. Vainiko, A.M. Samoilenko and A.A. Boichuk. On the other hand, the study of boundary-value problems for difference equations is related to the study of differential-algebraic boundary-value problems initiated in the papers of K. Weierstrass, N.N. Lusin and F.R. Gantmacher. Systematic study of differential-algebraic boundary value problems is devoted to the works of S. Campbell, Yu.E. Boyarintsev, V.F. Chistyakov, A.M. Samoilenko, N.A. Perestiyk, V.P. Yakovets, A.A. Boichuk, A. Ilchmann and T. Reis. The study of differential-algebraic boundary value problems is also associated with numerous applications of such problems in the theory of nonlinear oscillations, in mechanics, biology, radio engineering, control theory, motion stability theory. The general case of a linear bounded operator corresponding to the homogeneous part of a linear Noetherian difference-algebraic boundary value problem has no inverse is investigated. The generalized Green operator of a linear difference-algebraic boundary value problem is constructed in the article. The relevance of the study of solvability conditions, as well as finding solutions of linear Noetherian difference-algebraic boundary-value problems, is associated with the widespread use of difference-algebraic boundary-value problems obtained by linearizing nonlinear Noetherian boundary-value problems for systems of ordinary differential and difference equations. Solvability conditions are proposed, as well as the scheme of finding solutions of linear Noetherian difference-algebraic boundary value problems are illustrated in detail in the examples.

Keywords: *linear Noether boundary value problem, systems of difference equations, pseudoinversion of matrices by Moore–Penrose.*

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ
`chujko-slav@inbox.ru, chujko-slav@ukr.net`

Отримано 20.11.19