УДК 517.9
DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-17

©2019. **С.М. Чуйко, О.В. Нєсмєлова**

ПРО ПОЛОЖЕННЯ РІВНОВАГИ МАТРИЧНОЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-АГЛЕБРАЇЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

У статті знайдено умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна лінійної нетерової матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі. Отримано достатні умови приведення матричного диференціально-алгебраїчного рівняння до традиційного диференціально-алгебраїчного рівняння з невідомою у вигляді вектор-стовпця. Поставлена в статті задача продовжує дослідження умов розв'язності лінійних нетерових крайових задач, наведених у монографіях М.В. Азбелева, В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматулліної, А.М. Самойленка та О.А. Бойчука. Досліджено загальний випадок, коли лінійний обмежений оператор, що відповідає однорідній частині лінійної задачі Коші для матричної диференціально-алгебраїчної системи, не має оберненого. Для розв'язання матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі введено визначення положень рівноваги матричної диференціально-алгебраїчної системи та матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі. Запропоновано достатні умови існування та конструктивні схеми знаходження положень рівноваги матричної диференціально-алгебраїчної системи та матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі. Окремо розглянуто випадки положень рівноваги матричної диференціально-алгебраїчної системи, які представляють собою сталі матриці, та положення рівноваги, що залежать від незалежної змінної. Для розв'язання матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі використані оригінальні умови розв'язності, а також конструкція загального розв'язку матричного рівняння типу Сильвестра, при цьому істотно використано техніку псевдообернення матриць за Муром–Пенроузом. У статті побудовано узагальнений оператор Гріна лінійної нетерової матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі. Запропоновані умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна лінійної нетерової матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі детально проілюстровано на прикладах.

MSC: 34B15.

Ключові слова: *положення рівноваги, матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача, узагальнений оператор Гріна.*

1. Постановка задачі.

Досліджуємо задачу про побудову розв'язків [1–3]

$$Z(t) = \left(z^{(i,j)}(t) \right), \ Z^{(\alpha,\beta)}(\cdot) \in \mathbb{C}^1[a;b], \ i = 1, \ 2, \ \dots, \ \beta, \ j = 1, \ 2, \ \dots, \ \gamma$$

матричного диференціально-алгебраїчного рівняння

$$\mathcal{D}Z(t) = \mathcal{A}Z(t) + F(t), \tag{1}$$

підпорядкованих крайовій умові

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \ \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{2}$$

Робота виконана за фінансової підтримки Міністерства освіти і науки України, р/н 0118U003390.

Тут
$$\mathcal{D}Z(t) := \sum_{i=1}^{p} S_i(t)Z'(t)R_i(t), \ \mathcal{A}Z(t) := \sum_{j=1}^{q} \Phi_j(t)Z(t)\Psi_j(t),$$
– лінійні матричні оператори, $S_i(t), \Phi_i(t) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, $R_i(t), \Psi_j(t) \in \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}$ і $F(t)$ – неперервні матриці; $\mathcal{L}Z(\cdot)$ – лінійний обмежений матричний функціонал:
$$\mathcal{L}Z(\cdot): \ \mathbb{C}^1[a;b] \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}.$$
Взагалі кажучі, припускаємо $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta \neq \mu \neq \nu$ – довільні натуральні числа. Матричне диференціально-алгебраїчне рівняння (1) узагальнює традиційні постановки задач, як для матричних диференціальних рівнянь [1–3], так і для диференціально-алгебраїчних рівнянь [4–7]. З іншого боку, матрична диференціально-алгебраїчна крайоваа задача (1), (2) узагальнює традиційні постановки нетерових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь [8–10, 12].

Позначимо $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$, $j = 1, 2, \ \dots\ , \ \beta\cdot\gamma$ – базис простору $\mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$, при цьому задача про знаходження розв'язків рівняння (1) приводить до задачі про знаходження вектора $y(t) \in \mathbb{R}^{\beta\gamma}$, компоненти якого $y_j(t) \in \mathbb{C}^1[a;b]$ визначають розвинення матриці
$$Z(t) = \sum_{j=1}^{\beta\gamma} \Xi^{(j)} y_j(t), \ y_j(t) \in \mathbb{R}^1, \ j = 1, 2, \ \dots\ , \ \beta\cdot\gamma$$
по векторах $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$ базиса простору $\mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$. Визначимо оператор [14, 15]
$$\mathcal{M}[\mathcal{B}]: \ \mathbb{R}^{\beta\times\gamma} \to \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma},$$
як оператор, який ставить у відповідність матриці $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$ – вектор-стовпець $\mathcal{M}[\mathcal{B}] \in \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma}$, складений з γ стовпців матриці $\mathcal{B}$, а також обернений оператор
$$\mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathcal{M}[\mathcal{B}]\Big\}: \ \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma} \to \mathbb{R}^{\beta\times\gamma},$$
який ставить у відповідність вектору $\mathcal{M}[\mathcal{B}] \in \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma}$ матрицю $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$. У нових позначеннях лінійний матричний оператор $\mathcal{D}Z(t)$ набуває вигляду
$$\mathcal{D}Z(t) := \sum_{i=1}^{p} S_i(t)Z'(t)R_i(t) = \sum_{j=1}^{\beta\gamma}\sum_{i=1}^{p} S_i(t)\Xi^{(j)}R_i(t)y_j'(t),$$
при цьому
$$\mathcal{M}\Big[\mathcal{D}Z(t)\Big] = Q(t)\cdot y'(t), \ Q(t) := \Big[Q_i(t)\Big]_{i=1}^{\beta\cdot\gamma} \in \mathbb{R}^{\alpha\delta\times\beta\cdot\gamma},$$
де
$$Q_j(t) = \mathcal{M}\left[\sum_{i=1}^{p} S_i(t)\Xi^{(j)}R_i(t)\right], \ j = 1, 2, \ \dots\ , \ \beta\cdot\gamma.$$

Аналогічно

$$\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}Z(t)\Big] = \Omega(t)\cdot y(t),\ \Omega(t) := \Big[\Omega_i(t)\Big]_{i=1}^{\beta\cdot\gamma} \in \mathbb{R}^{\alpha\delta\times\beta\cdot\gamma},$$

де

$$\Omega_j(t) = \mathcal{M}\left[\sum_{i=1}^{q}\Phi_i(t)\Xi^{(j)}\Psi_i(t)\right],\ j = 1, 2,\ \dots\ ,\ \beta\cdot\gamma.$$

Таким чином, задача про побудову розв'язків матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1) приведена до задачі про знаходження розв'язків

$$y(t) = \mathrm{col}\,\Big(y_i(t)\Big) \in \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma},\ y_i(\cdot) \in C^1[a;b],\ i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ \beta\cdot\gamma$$

традиційного диференціально-алгебраичного рівняння [4–7]

$$Q(t)\cdot y'(t) = \Omega(t)\cdot y(t) + \mathcal{F}(t),\ \mathcal{F}(t) := \mathcal{M}\Big[F(t)\Big]. \tag{3}$$

2. Стаціонарні положення рівноваги.

За умови

$$\mathcal{D}Z(t) = 0,\ \mathcal{A}Z(t) + F(t) = 0$$

будемо казати, що матричне диференціально-алгебраїчне рівняння (1) має положення рівноваги $Z(t) \in \mathbb{C}^1[a;b]$. Якщо ж положення рівноваги матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1) задовольняє крайову умову (2), будемо казати, що диференціально-алгебраїчна крайова задача (1), (2) має положення рівноваги $Z(t) \in \mathbb{C}^1[a;b]$. Зокрема, матричне диференціально-алгебраїчне рівняння (1) може мати стаціонарні положения рівноваги $Z(t) \equiv C \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$, для яких $\mathcal{D}Z(t) \equiv 0$. Оскільки задача про побудову розв'язків матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1) приведена до задачі про знаходження розв'язків традиційного диференціально-алгебраїчного рівняння (3), то для знаходження стаціонарних положень рівноваги $Z(t) \equiv C \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$, для яких $\mathcal{D}Z(t) \equiv 0$, достатньо знайти вектор $y(t) \equiv c \in \mathbb{R}^{\beta\gamma}$, для якого

$$\Omega(t)\cdot y(t) + \mathcal{F}(t) = 0.$$

Остання рівність має місце тоді і тільки тоді, коли

$$P_{\Omega^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0. \tag{4}$$

За умови (4) знаходимо вектор

$$y(t) = P_{\Omega_r}(t)c_r - \Omega^+(t)\mathcal{F}(t),\ c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $\Omega^+(t) \in \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma\times\alpha\delta}$ – псевдообернена (по Муру–Пенроузу) матриця, $P_{\Omega^*(t)}$– $(\alpha\delta\times\alpha\delta)$– матриця-ортопроектор $P_{\Omega^*(t)} : \mathbb{R}^{\alpha\delta} \to \mathbb{N}(\Omega^*(t))$; матриця P_{Ω_r} складена з

r лінійно-незалежних столвпців $(\beta\cdot\gamma\times\beta\cdot\gamma)$– ортопроектора $P_\Omega:\mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma}\to\mathbb{N}(\Omega)$, які представляють із себе константи. В тому випадку, коли $\Omega^+(t)\mathcal{F}(t)$ – вектор, складений із констант, за умови (4) узагальнене матричне диференціально-алгебраїчне рівняння (1) має положення рівноваги

$$Z(t)=W(t,c_r)+K\Big[F(t)\Big],\ W(t,c_r):=\mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\Omega_r}c_r\Big],\ c_r\in\mathbb{R}^r,$$

де

$$K\Big[F(t)\Big]:=\mathcal{M}^{-1}\Big[\Omega^+(t)\mathcal{F}(t)\Big]$$

– узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коши $Z(a)=0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1). Таким чином, доведена наступна достатня умова розв'язності задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи (1).

Лема. *За умови (4), у випадку, коли $\Omega^+(t)\mathcal{F}(t)$ – вектор, складений із констант, матричне диференціально-алгебраїчне рівняння (1) має положення рівноваги*

$$Z(t)=W(t,c_r)+K\Big[F(t)\Big],\ W(t,c_r):=\mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\Omega_r}c_r\Big],\ c_r\in\mathbb{R}^r,$$

де

$$K\Big[F(t)\Big]:=-\mathcal{M}^{-1}\Big[\Omega^+(t)\mathcal{F}(t)\Big]$$

– узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші $Z(a)=0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1).

Позначимо $\Theta^{(j)}\in\mathbb{R}^r,\ j=1,2,\ \dots\ ,\ r$ – базис простору $\mathbb{R}^r$. Підставляючи розв'язок матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1) в крайову умову (2), приходимо до задачі про знаходження розв'язків

$$c_r=\sum_{j=1}^r\Theta^{(j)}\xi_j\in\mathbb{R}^r,\ \xi_j\in\mathbb{R}^1,\ j=1,2,\ \dots\ ,\ r$$

матричного рівняння типу Сильвестра [14]

$$\mathcal{L}W(\cdot,c_r)+\mathcal{L}K\Big[F(\cdot)\Big]=\mathfrak{A}\in\mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{5}$$

У критичному випадку $(P_{\mathcal{Q}^*}\neq0)$ за умови (4), у випадку, коли

$$P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A}-\mathcal{L}K\Big[F(\cdot)\Big]\Big\}=0, \tag{6}$$

і $\Omega^+(t)\mathcal{F}(t)$ — вектор, складений із констант, розв'язок матричного рівняння (5) визначає вектор [14, 15]

$$c_r = \mathcal{Q}^+\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}K\Big[F(\cdot)\Big]\Big\} + P_{\mathcal{Q}_\rho}c_\rho,\ c_\rho \in \mathbb{R}^\rho.$$

Тут $P_{\mathcal{Q}^*}-$ $(\mu\cdot\nu \times \mu\cdot\nu)-$ матриця-ортопроектор $P_{\mathcal{Q}^*} : \mathbb{R}^{\mu\cdot\nu} \to N(\mathcal{Q}^*)$, де

$$\mathcal{Q} := \Big[\mathcal{Q}_i\Big]_{i=1}^r \in \mathbb{R}^{\mu\cdot\nu\times r},\ \mathcal{Q}_i := \mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}\mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\Omega_r}\Theta_i\Big]\Big\},\ i = 1, 2,\ \dots,\ r;$$

матриця $P_{\mathcal{Q}_\rho}$ складена із ρ лінійно-незалежних стовпців $(r \times r)-$ матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}} : \mathbb{R}^r \to N(\mathcal{Q})$. Матрица $P_{\mathcal{Q}^*_d}$ складена з d лінійно-незалежних рядків матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}^*}$. Таким чином, у критичному випадку, за умови (4) і (6), коли $\Omega^+(t)\mathcal{F}(t)$ – вектор, складений із констант, розв'язок узагальненого матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1), який задовольняє крайову умову(2)

$$Z(t, c_\rho) = W(t, c_\rho) + G\Big[F(t); \mathfrak{A}\Big],\ W(t, c_\rho) := \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\Omega_r}c_\rho\Big],\ c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\Big[F(t); \mathfrak{A}\Big] = \mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathcal{Q}^+\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}K\Big[F(\cdot)\Big]\Big\}\Big\} + K\Big[F(t)\Big]$$

матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2). Таким чином, доведена наступна достатня умова розв'язності матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2).

Теорема 1. *У критичному випадку* ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$), *за умови (4) і (6), коли* $\Omega^+(t)\mathcal{F}(t)$ *– вектор, складений із констант, положення рівноваги матричного диференциально-алгебраїчного рівняння (1), яке задовольняє крайову умову (2)*

$$Z(t, c_\rho) = W(t, c_\rho) + G\Big[F(t); \mathfrak{A}\Big],\ W(t, c_\rho) := \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\Omega_r}c_\rho\Big],\ c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\Big[F(t); \mathfrak{A}\Big] = \mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathcal{Q}^+\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}K\Big[F(\cdot)\Big]\Big\}\Big\} + K\Big[F(s)\Big]$$

матричної диференціально-алгебраїчнної крайової задачі (1), (2), де

$$K\Big[F(t)\Big] := \mathcal{M}^{-1}\Big[\Omega^+(t)\mathcal{F}(t)\Big]$$

узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші $Z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1).

Приклад 1. *Вимогам теореми 1 задовольняє задача про побудову 2π-періодичних розв'язків матричної диференціально-алгебраїчної системи*

$$\mathcal{D}Z(t) = \mathcal{A}Z(t) + F(t), \tag{7}$$

де

$$S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; S_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; R_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; R_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_1 := \Phi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Psi_1 := R_2, \; \Psi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Позначимо

$$\Xi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \Xi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; ... \; \Xi_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

природний базис простору $\mathbb{R}^{3\times 2}$, при цьому

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \Omega := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже умову (4) виконано і

$$\Omega^+(t)\mathcal{F}(t) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

– вектор, складений із констант, отже матричне диференціально-алгебраїчне рівнянн (7) має положення рівноваги

$$Z(t) = W(t, c_r) + K\Big[F(t)\Big], \; W(t, c_r) = \begin{pmatrix} c_1 & c_4 \\ c_2 & c_5 \\ 2c_3 & -c_3 \end{pmatrix},$$

де

$$K\Big[F(t)\Big] := -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші $Z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (7); тут

$$P_{\Omega^*(t)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ P_{\Omega_r}(t) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для матричної крайової задачі (7) має місце критичний випадок ($P_{Q^*} \neq 0$), при цьому

$$\mathfrak{A} = 0, \ \mathcal{L}K\Big[F(\cdot)\Big] = 0,$$

відповідно, умову (6) виконано; таким чином, положення рівноваги матричної крайової задачі (7)

$$Z(t, c_\rho) = W(t, c_\rho) + G\Big[F(t); \mathfrak{A}\Big], \ W(t, c_\rho) = W(t, c_r), \ c_r \in \mathbb{R}^5$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\Big[F(t); \mathfrak{A}\Big] = K\Big[F(t)\Big]$$

матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (7).

3. Нестаціонарні положення рівноваги.

Зокрема, матричне диференціально-алгебраїчне рівняння (1) може мати нестаціонарні положення рівноваги

$$Z(t) \in \mathbb{C}^1[a; b],$$

для яких $\mathcal{D}Z(t) \equiv 0$. Оскільки задача про побудову розв'язків матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1) приведена до задачі про знаходження розв'язків традиційного диференціально-алгебраїчного рівняння (3), отже для знаходження нестаціонарних положень рівноваги, для яких $\mathcal{D}Z(t) \equiv 0$, достатньо знайти вектор $y(t) \in \mathbb{C}^1[a;b]$, для якого

$$Q(t) \cdot y'(t) \equiv 0, \ \Omega(t) \cdot y(t) + \mathcal{F}(t) = 0.$$

Перша рівність має місце за умови $P_{Q(t)} \neq 0$, наприклад, для вектора

$$y(t) = P_{Q_r}(t)x(t), \ x(t) \in \mathbb{C}^1[a;b].$$

Позначимо матрицю $\mathcal{B}(t) := \Omega(t) \cdot P_{Q_r}(t)$; за умови

$$P_{Q(t)} \neq 0, \ P_{\mathcal{B}^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0, \ \mathcal{B}^+(t)\mathcal{F}(t) \in C^1[a;b]. \tag{8}$$

для знаходження нестаціонарних положень рівноваги достатньо знайти вектор

$$x(t) = -\mathcal{B}^+(t)\mathcal{F}(t) + P_{\mathcal{B}_\rho(t)}\varphi_\rho(t), \ \varphi_\rho(t) \in \mathbb{R}^\rho,$$

при цьому

$$y(t) = P_{Q_r}(t)P_{\mathcal{B}_\rho(t)}\varphi_\rho(t) - P_{Q_r}(t)\mathcal{B}^+(t)\mathcal{F}(t).$$

За умови (8) і

$$\mathcal{L}\mathfrak{W}(\cdot, \varphi_\rho(\cdot)) + \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[F(\cdot)\Big] = \mathfrak{A} \tag{9}$$

знайдене нестаціонарне положення рівноваги

$$Z(t, \varphi_\rho(t)) = \mathfrak{W}(t, \varphi_\rho(t)) + \mathcal{G}\Big[F(t)\Big], \ \mathfrak{W}(t, \varphi_\rho(t)) = \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{Q_r}(t)P_{\mathcal{B}_\rho(t)}\varphi_\rho(t)\Big]$$

матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1) задовольняє крайову умову (2) і залежить від довільної вектор-функції $\varphi_\rho(t) \in \mathbb{C}^1[a;b]$; тут

$$\mathcal{G}\Big[F(t)\Big] := \mathcal{K}\Big[F(t)\Big] := -\mathcal{M}^{-1}\Big[P_{Q_r}(t)\mathcal{B}^+(t)\mathcal{F}(t)\Big].$$

Таким чином, доведено наступну достатню умову розв'язності матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2).

Теорема 2. *За умов (8) і (9) нестаціонарне положення рівноваги*

$$Z(t, \varphi_\rho(t)) = \mathfrak{W}(t, \varphi_\rho(t)) + \mathcal{G}\Big[F(t)\Big], \ \mathfrak{W}(t, \varphi_\rho(t)) = \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{Q_r}(t)P_{\mathcal{B}_\rho(t)}\varphi_\rho(t)\Big]$$

матричного диференціально-алгебраїчого рівняння (1) задовольняє крайову умову (2) і залежить від довільної вектор-функції $\varphi_\rho(t) \in \mathbb{C}^1[a;b]$; тут

$$\mathcal{G}\Big[F(t)\Big] := -\mathcal{M}^{-1}\Big[P_{Q_r}(t)\mathcal{B}^+(t)\mathcal{F}(t)\Big]$$

– *узагальнений оператор Гріна матричної крайової задачі (1), (2).*

Відмітимо, що рівняння (7), досліджене в прикладі 1, не має нестаціонарних положень рівноваги, отже не виконано умову (8), а саме: $P_{\mathcal{B}^*(t)}\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(t)$, відповідно $\mathcal{B}(t) \equiv 0$.

Приклад 2. *Вимогам доведеної теореми 2 задовольняє задача про побудову розв'язків матричної диференціально-алгебраїчної системи*

$$\mathcal{D}Z(t) = \mathcal{A}Z(t) + F(t), \tag{10}$$

які задовольняють крайову умову

$$\mathcal{L}Z(\cdot) := \int_0^{2\pi} \Lambda(t)Z(t)\Pi(t)dt = 0. \tag{11}$$

де

$$S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; S_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; R_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; R_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \Phi_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; F(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \Psi_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \Lambda(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \Pi(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи природний базис

$$\Xi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \Xi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \dots, \; \Xi_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

простору $\mathbb{R}^{3\times 2}$ знаходимо

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Omega := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ортопроектори

$$P_{\mathcal{B}^*(t)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ P_{\mathcal{B}(t)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

матриці

$$\mathcal{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

гарантують виконання умови (8), при цьому

$$\mathfrak{W}(t,\varphi_\rho(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathcal{G}\Big[F(t)\Big] = K\Big[F(t)\Big] = \begin{pmatrix} -\sin t & \sin t - \cos t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки умову (9) виконано, тоді знайдене нестаціонарне положення рівноваги

$$Z(t,\varphi_\rho(t)) = \mathfrak{W}(t,\varphi_\rho(t)) + \mathcal{G}\Big[F(t)\Big], \ \mathfrak{W}(t,\varphi_\rho(t)) = \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{Q_r}(t)P_{\mathcal{B}_\rho(t)}\varphi_\rho(t)\Big]$$

диференціально-алгебраїчного рівняння (10) задовольняє крайову умову (11) і залежить від довільної непрерервної скалярної функції $\varphi_\rho(t)$.

Припустимо далі, що матрична диференціально-алгебраїчна задача (1), (2) задовольняє вимогам і теореми 1 і теореми 2 і, отже, має і стаціонарні

$$Z(t,c_\rho) = W(t,c_\rho) + G\Big[F(t);\mathfrak{A}\Big], \ c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$$

і нестаціонарні положення рівноваги

$$Z(t,\varphi_\rho(t)) = \mathfrak{W}(t,\varphi_\rho(t)) + \mathcal{G}\Big[F(t)\Big].$$

В цьому випадку однорідна частина диференціально-алгебраїчної задачі (1), (2) має розв'язок

$$Z(t,c_\rho,\varphi_\rho(t)) = W(t,c_\rho) + \mathfrak{W}(t,\varphi_\rho(t)), \ c_\rho \in \mathbb{R}^\rho,$$

який залежить від довільної непрервної функції $\varphi_\rho(t)$; при цьому частинний розв'язок неоднорідної диференціально-алгебраїчної задачі (1), (2) визначає довільний: $G[F(t);\mathfrak{A}]$, або $\mathcal{G}[F(t)]$ – узагальнений оператор Гріна матричної крайової задачі (1), (2).

Приклад 3. *Вимогам і теореми 1 і теореми 2 задовольняє задача про побудову розв'язків матричної диференціально-алгебраїчної системи (10), які задовольняють крайову умову (11), досліджену в прикладі 2.*

У прикладі 2 показано, що задача про побудову розв'язків матричної диференціально-алгебраїчної задачі (10), (11), задовольняє вимогам теореми 2. Для матричної диференціально-алгебраїчної системи (10) виконується вимога (4), при цьому

$$\Omega^+(t)\mathcal{F}(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 0 & 0 & \cos t - \sin t & 0 & 0 \end{pmatrix}^*$$

– вектор, складений із констант, отже матричне диференціально-алгебраїчне рівняння (10) має положення рівноваги

$$Z(t) = W(t,c_r) + K\Big[F(t)\Big], \ W(t,c_r) := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_1 & c_3 \\ c_2 & -2c_2 \end{pmatrix},$$

де

$$K\Big[F(t)\Big] = \begin{pmatrix} -\sin t & \sin t - \cos t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки вимоги і теореми 1 і теореми 2 виконані, то знайдене положення рівноваги

$$Z(t,\varphi_\rho(t)) = \mathfrak{W}(t,\varphi_\rho(t)) + \mathcal{G}\Big[F(t)\Big],\ \mathcal{G}\Big[F(t)\Big] = K\Big[F(t)\Big]$$

диференціально-алгебраїчного рівняння (10) задовольняє крайову умову (11) і залежить від довільної непрервної скалярної функції $\varphi_\rho(t)$.

Запропонована в статті схема дослідження матричних диференційно-алгебраїчних задач аналогічно [8,17] може бути перенесена на нелінійні матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі, в тому числі, в частинних похідних [18–20].

Цитована література

1. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
2. *Деревенский В.П.* Матричные уравнения Бернулли // Известия вузов. Математика. – 2008. – № 2. – Р. 14–23.
3. *Boichuk A.A., Krivosheya S.A.* A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations // Differential Equations. – 2001. – 37, № 4. – P. 464–471.
4. *Campbell S.L.* Singular Systems of differential equations. – San Francisco–London–Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1980. – 178 p.
5. *Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. – Новосибирск: Наука, 1996. – 280 с.
6. *Бояринцев Ю.Е., Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. – Новосибирск: Наука, 1998. – 224 с.
7. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. – Новосибирск: Наука, 2003. – 317 с.
8. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – XIV + 317 pp.
9. *Бойчук А.А., Шегда Л.М* Вироджені нетерові крайові задачі // Нелінійні коливання. – 2007. – 10, № 3. – С. 303–312.
10. *Чуйко С.М.* Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциально-алгебраических систем // Комп. исследов. и моделирование. – 2013. – 5, №5. – С. 769–783.
11. *Boichuk A.A., Krivosheya S.A.* Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukrainian Mathematical Journal. – 1998. – 50, № 8. – P. 1162–1169.
12. *Чуйко С.М.* Линейная нетерова краевая задача для вырожденной дифференциально-алгебраической системы // Spectral and Evolution Problems. – 2013. – 23. – С. 148–157.
13. *Boichuk A.A., Pokutnyi A.A., Chistyakov V.F.* Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2013. – 53, №6. – P. 777–788.
14. *Чуйко С.М.* О решении матричного уравнения Сильвестра // Вестник Одесского национального университета. Сер. математика и механика. – 2014. – 19, Вип. 1(21). – С. 49–57.
15. *Чуйко С.М.* О решении матричных уравнений Ляпунова // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика і механіка. – 2014. – № 1120. – С. 85–94.
16. *Чуйко С.М., Чистяков В.Ф.* О положениях равновесия вырожденной дифференциально алгебраической системы // Міжнародна наукова конференція "Крайові задачі, теорія функцій

та їх застосування” з нагоди 60 – річчя В.І. Рукасова, Слов’янськ, 21–24 травня 2014 р. Тези доп. – С. 79.
17. *Chuiko S.* Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation // Miskolc Mathematical Notes. – 2016. – 17, № 1. – P. 139–150.
18. *Gutlyanskii V.Ya, Ryazanov V.I., Yakubov E.H.* The Beltrami equations and prime ends // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – 210. – P. 22–51.
19. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yefimushkin A.* On the boundary-value problems for quasiconformal functions in the plane // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – **214**. – P. 200–219.
20. *Skrypnik I.I.* Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption // Israel Journal of Mathematics. – 2016. – 215, № 1. – P. 163–179.

References

1. Bellman, R (1969). *Vvedenie v teoriyu matrits.* M.: Nauka (in Russian).
2. Derevenskiy, V.P. (2008). Matrichnyie uravneniya Bernulli. *Izvestiya vuzov. Matematika, 2*, 14-23 (in Russian).
3. Boichuk, A.A., Krivosheya, S.A. (2001). A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations. *Differential Equations, 37*(4), 464-471.
4. Campbell, S.L. (1980). *Singular Systems of differential equations.* San Francisco–London–Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program.
5. Chistyakov, V.F. (1996). *Algebro-differentsialnyie operatoryi s konechnomernyim yadrom.* Novosibirsk: Nauka (in Russian).
6. Chistyakov, V.F. (1998). *Algebro-differentsialnyie sistemyi. Metodyi resheniya i issledovaniya.* Novosibirsk: Nauka (in Russian).
7. Chistyakov, V.F., Scheglova, A.A. (2003). *Izbrannyie glavyi teorii algebro-differentsialnyih sistem.* Novosibirsk: Nauka Novosibirsk: Nauka (in Russian).
8. Boichuk, A.A., Samoilenko, A.M. (2004). *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems.* Utrecht; Boston: VSP.
9. Boichuk, A.A., Shegda, L.M. (2007). Virodzheni neterovi krayovi zadachi. *Neliniyni kolivannya, 10*(3), 303-312 (in Ukrainian).
10. Chuiko, S.M. (2013). Lineynyie neterovyi kraevyie zadachi dlya differentsialno-algebraicheskih sistem. *Komp. issledov. i modelirovanie, 5*(5), 769-783 (in Russian).
11. Boichuk, A.A., Krivosheya, S.A. (1998). Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type. *Ukrainian Mathematical Journal, 50*(8), 1162-1169.
12. Chuiko, S.M. (2013). Lineynaya neterova kraevaya zadacha dlya vyirozhdennoy differentsialno-algebraicheskoy sistemyi. *Spectral and Evolution Problems, 23*, 148-157 (in Russian).
13. Boichuk, A.A., Pokutnyi, A.A., Chistyakov, V.F. (2013). Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics, 53*(6), 777-788.
14. Chuiko, S.M. (2014). O reshenii matrichnogo uravneniya Silvestra. *Vestnik Odesskogo natsionalnogo universiteta. Ser. matematika i mehanika, 19*, 1(21), 49-57 (in Russian).
15. Chuiko, S.M. (2014). O reshenii matrichnyih uravneniy Lyapunova. *Visnik Harkivskogo natsionalnogo universitetu imeni V.N. Karazina. Seriya: Matematika, prikladna matematika i mehanika, 1120*, 85-94 (in Russian).
16. Chuiko, S.M., Chistyakov, V.F. (2014). O polozheniyah ravnovesiya vyirozhdennoy differentsialno-algebraicheskoy sistemyi. *Mizhnarodna naukova konferentsIya “Krayovi zadachi, teoriya funktsiy ta yih zastosuvannya” z nagodi 60–richchya V.I. Rukasova*, Slov’yansk, p. 79 (in Russian).
17. Chuiko, S. (2016). Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation. *Miskolc Mathematical Notes, 17*(1), 139-150.
18. Gutlyanskii, V.Ya, Ryazanov V.I., Yakubov E.H. (2015). *The Beltrami equations and prime ends. Journal of Mathematical Sciences, 210*(1), 22-51.
19. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Yefimushkin, A. (2016). On the boundary-value problems for quasiconformal functions in the plane. *Journal of Mathematical Sciences, 214*(2), 200-219.

20. Skrypnik, I.I. (2016). Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption. *Israel Journal of Mathematics, 215*(1), 163-179.

S.M. Chuiko, O.V. Nesmelova

About the equilibrium positions of a matrix differential-algebraic boundary value problem.

In the article we found the solvability conditions and the construction of the generalized Green operator of the linear Noetherian matrix differential-algebraic boundary value problem. We obtained sufficient conditions of transformationsof the matrix differential-algebraic equation to a traditional differential-algebraic equation with an unknown in the form of a column vector. The problem that reviewed in the article continues the study of solvability conditions for the linear Noetherian boundary value problems given in the monographs of M.V. Azbelev, V.P. Maksimov, L.F. Rakhmatullina, A.M. Samoilenko and A.A. Boichuk. We investigated the general case when the linear bounded operator corresponding to the homogeneous part of the linear Cauchy problem for the matrix differential-algebraic system does not have the reverse operator. We introduced the definition of the equilibrium positions of the matrix differential-algebraic system and the matrix differential-algebraic boundary-value problem to solve the matrix differential-algebraic boundary-value problem. We proposed sufficient conditions of existence and constructive schemes for finding the equilibrium positions of the matrix differential-algebraic system and the matrix differential-algebraic boundary value problem. The cases of equilibrium positions of the matrix differential-algebraic system, which are constant matrices, and equilibrium positions depending on an independent variable are considered separately. To solve the matrix differential-algebraic boundary-value problem, we used the original solvability conditions and the construction of the general solution of the Sylvester-type matrix equation, while the Moore–Penrose matrix pseudoinverse technique was essentially used. In the article we constructed the generalized Green operator of the linear Noetherian matrix differential-algebraic boundary value problem. The proposed solvability conditions and the construction of the generalized Green operator of the linear Noetherian matrix differential-algebraic boundary value problem, were illustrated in detail with examples.

Keywords: *equilibrium position, matrix differential-algebraic boundary value problem, generalized Green operator.*

Донбаський державний педагогічний університет,
Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Слов'янськ
`chujko-slav@ukr.net, star-o@ukr.net`

Отримано 11.10.19