УДК 517.54
DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-2

©2019. **О.К. Бахтін, Я.В. Заболотний**

ЗАДАЧА ПРО ДОБУТОК ВНУТРІШНІХ РАДІУСІВ ЧОТИРЬОХ НЕПЕРЕТИННИХ ОБЛАСТЕЙ, ДЕЯКІ З ЯКИХ СИМЕТРИЧНІ ВІДНОСНО ОДИНИЧНОГО КОЛА

В роботі розглядається достатньо загальна проблема геометричної теорії функцій про екстремальне розбиття комплексної площини, а саме задача про знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, симетричних відносно одиничного кола, і степеня γ внутрішнього радіуса області $\{B_0\}$, яка містить точку нуль. Дана задача розглядалася в роботах В.М. Дубініна, Л.В. Ковальова, Г.П. Бахтіної та інших, у 1994 році була виставлена В.М. Дубініним в списку нерозв'язаних проблем. В 2000 р. для $\gamma = 1$ і для всіх $n \geqslant 2$ цю проблему розв'язав Л.В Ковальов. У даній роботі розглядається випадок трьох симетричних неперетинних областей, причому степінь внутрішнього радіуса області $\{B_0\}$ знаходиться в межах $0 < \gamma \leq 1.233$ і для даного випадку знайдено повний розв'язок без додаткових обмежень.

MSC: 30C75.

Ключові слова: *внутрішній радіус області, неперетинні області, розділяюче перетворення, квадратичний диференціал.*

Задачі про екстремальне розбиття комплексної площини складають відомий класичний напрям геометричної теорії функцій комплексної змінної. Ця тематика бере початок від статті М.О. Лаврентьева 1934 року [1] і потім развивалася в работах багатьох авторів [2–9].

Нехай $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ – множини натуральних і дійсних чисел відповідно, $\mathbb{C}$ – комплексна площина, і нехай $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ – розширена комплексна площина, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. На розширеній комплексній площині розглянемо систему довільних неперетинних многозвязних областей $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, причому n областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ симетричні відносно одиничного кола і нехай $r(B, a)$ – внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$.

Розглянемо наступну екстремальну проблему.

Проблема 1. Знайти точну верхню оцінку для функціоналу

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k), \tag{1}$$

де $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $a_0 = 0$, $|a_1| = \ldots = |a_n| = 1$, $a_k \in B_k \in \overline{\mathbb{C}}$, де $B_i \bigcap B_j = \emptyset$ при $0 \leq i, j \leq n$ і $i \neq j$ – неперетинні області, и $B_1, \ldots, B_n$ симетричні відносно одиничного кола.

Вперше в 1984 р. аналогічну задачу зі вільними полюсами для симетричних однозвязних областей розглянула Г. Бахтіна в роботі [5]. В 1994 р. дану задачу поставив В. Дубінін в роботі [7] як нерозв'язану проблему. В 2000 р. для $\gamma = 1$

і для всіх $n \geqslant 2$ цю проблему розв'язав Л. Ковальов [8, 9]. Одному з частинних випадків даної проблеми і присвячена дана робота.

Нехай для конкретності

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi.$$

Позначимо

$$\alpha_1 := \tfrac{1}{\pi}(\arg a_2 - \arg a_1), \alpha_2 := \tfrac{1}{\pi}(\arg a_3 - \arg a_2) ... \ \alpha_n := \tfrac{1}{\pi}(2\pi - \arg a_n).$$

Нехай $\alpha_0 = \max\limits_k \alpha_k$, $k = \overline{1, n}$.

Правильна наступна теорема.

Теорема 1. *Для довільного набору точок a_k, таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1,3}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,3}$, причому області B_k, $k = \overline{1,3}$, симетричні відносно одиничного кола $|w| = 1$, і довільного дійсного γ, такого, що $0 < \gamma \leq 1.233$ правильна нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{3} r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \frac{(2\gamma)^{\frac{\gamma}{3}}}{27(9 - 2\gamma)^{\frac{3}{2} + \frac{\gamma}{3}}} \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{2\gamma}}{3 + \sqrt{2\gamma}}\right)^{\sqrt{2\gamma}}. \qquad (2)$$

Знак рівності в цій нерівності досягається, зокрема, у випадку, якщо $a_k = a_k^{(0)}$, $B_k = B_k^{(0)}$, $k = \overline{0,3}$, де $a_k^{(0)}$ і $B_k^{(0)}$, $k = \overline{0,3}$, є, відповідно, полюсами і круговими областями квадратичного диференціалу

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^6 + 2(9-\gamma)w^3 + \gamma}{w^2(w^3-1)^2}\, dw^2. \qquad (3)$$

Доведення. Зауважимо, що випадок $0 < \gamma < 1$ був розглянутий в роботі [10], випадок $\gamma = 1$ – в роботі [8], а випадок $\alpha_0 \leq \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$ – в роботі [11]. Таким чином, нам достатньо розглянути випадок $1 < \gamma < 1.233$ і $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$.

Доведення теореми грунтується на методах і ідеях робіт [4, 7, 8].

Покажемо, що при умові $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, значення функціонала (1) задовольняє співвідношення (2).

Нехай

$$P_k := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\},$$

$k = \overline{1,3}$, $\arg a_4 = 2\pi$, $P_0 := P_3$, $P_4 := P_1$ $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2$.

При кожному $k = \overline{1,3}$ позначимо через $z_k(w)$ ту вітку многозначної аналітичної функції $z = -i(e^{-i \arg a_k} w)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $z_0 := z_3$, $z_4 := z_1$, яка конформно і однолисно відображає області P_k, $k = \overline{1,3}$ на праву півплощину $Rez > 0$.

Тоді для областей B_k, $k = \overline{1,3}$, таких, як і в Задачі 1, позначимо через $D_k^{(1)}$ об'єднання зв'язної компоненти множини $z_k(B_k \bigcap \overline{P_k})$, що містить точку $z_k(a_k)$ з її відображенням відносно уявної осі, а через $D_k^{(1)}$ – об'єднання зв'язної компоненти множини $z_{k-1}(B_k \bigcap \overline{P_{k-1}})$, що містить точку $z_{k-1}(a_k)$ з її відображенням відносно уявної осі, $D_0^{(2)} := D_2^{(2)}$. Сім'ю двох симетричних відносно уявної осі областей $\{D_k^{(1)}; D_{k-1}^{(2)}\}$, будемо називати результатом розділяючого перетворення області B_k. Для утворених областей, згідно з теоремою 2 роботи [6], правильна нерівність:

$$\prod_{k=1}^{3} r(B_k, a_k) \leq \prod_{k=1}^{3} \alpha_k \cdot (r(D_{k+1}^{(i)}, i) r(D_k^{(2)}, -i))^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогічно проводиться розділяюче перетворення області B_0 і отримаємо нерівність

$$r(B_0, 0) \leq \prod_{k=1}^{3} (r(D_0^{(k)}; 0)^{\frac{\alpha_k^2}{2}}.$$

Використовуючи результати робіт [6, 7] і властивості розділяючого перетворення, отримаєм

$$I_3^0(\gamma) = r^{\gamma}\left(B_0^{(0)}, 0\right) \prod_{k=1}^{3} r\left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right) =$$

$$= \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \frac{(2\gamma)^{\frac{\gamma}{3}}}{27\,(9-2\gamma)^{\frac{3}{2}+\frac{\gamma}{3}}} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{2\gamma}}{3+\sqrt{2\gamma}}\right)^{\sqrt{2\gamma}},$$

де $B_k^{(0)}$, $a_k^{(0)}$, $k = \overline{0,3}$, $a_0^{(0)} = 0$, відповідно, кругові області і полюси квадратичного диференціала (3).

Правильна наступна лема.

Лема 1. *Нехай B_0, B_1, B_2,...,B_n, $(n \geq 2)$ – попарно неперетині області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $(a_j \in B_j)$, $j = \overline{0,n}$ і $q > 0$, $q \in \mathbb{R}$, $r(B_j, a_j)$ - внутрішній радіус області B_j в точці a_j і $0 < \gamma < n$. Тоді при умові, що*

$$r(B_0, a_0) \geq q^{\frac{1}{\gamma-n}}$$

виконується нерівність:

$$r^{\gamma}(B_0, a_0) \cdot \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq q.$$

Доведення. Нехай

$$r(B_0, a_0) = p \geq q^{\frac{1}{\gamma-n}}.$$

Застосуємо теорему Лаврентьєва [1] для областей B_0 і B_1, отримаємо, що

$$r(B_0, 0) \cdot r(B_1, a_1) \leq \mid a_1 \mid = 1.$$

Оскільки $r(B_0, 0) = p$, то

$$r(B_1, a_1) \leq \frac{1}{p}.$$

Аналогічно

$$r(B_k, a_k) \leq \frac{1}{p}$$

для

$$k = \overline{1, n}.$$

Тоді

$$r^{\gamma}(B_0, a_0) \cdot \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq p^{\gamma} \cdot \tfrac{1}{p^n} = p^{\gamma - n} \leq (q^{\frac{1}{\gamma - n}})^{\gamma - n} = q.$$

Лему доведено. □

Взявши в Лемі 1 $q = I_n^0(\gamma)$, отримаємо, що для $r(B_0, a_0) \geq \left(I_n^0(\gamma)\right)^{\frac{1}{\gamma - n}}$ правильна нерівність (2). Тому нам достатньо розглядати тільки випадок $r(B_0, a_0) < \left(I_n^0(\gamma)\right)^{\frac{1}{\gamma - n}}$.

Зауважимо, що:

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{3} r\left(B_k, a_k\right) = \prod_{k=0}^{3} r\left(B_k, a_k\right) r^{\gamma - 1}\left(B_0, 0\right). \tag{4}$$

За теоремою 1 роботи [12], а також, враховуючи, що $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{2\gamma}}$, правильна нерівність

$$\prod_{k=0}^{3} r\left(B_k, a_k\right) \leq \frac{9}{4^{\frac{8}{3}}} \left(|a_1 - a_2| \cdot |a_1 - a_3| \cdot |a_2 - a_3|\right)^{\frac{2}{3}} <$$

$$< \frac{9}{4^{\frac{8}{3}}} \cdot \left(8 \sin^2 \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right) \sin \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Таким чином, в (4) отримаємо:

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{3} r\left(B_k, a_k\right) < \frac{9}{4^{\frac{5}{3}}} \cdot \left(\sin^2 \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right) \sin \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\right)^{\frac{2}{3}} \left(I_n^0(\gamma)\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma - 3}}. \tag{5}$$

Далі, нехай

$$J_n(\gamma) = \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} = \frac{r^{\gamma}(B_0, 0) \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)}{r^{\gamma}(B_0^{(0)}, 0) \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k^{(0)}, a_k^{(0)})}.$$

Використовуючи (5), отримаємо наступну нерівність:

$$J_n(\gamma) \leqslant \frac{9}{4^{\frac{5}{3}}} \cdot \left(\sin^2 \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right) \sin \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\right)\right)^{\frac{2}{3}} \left(I_n^0(\gamma)\right)^{\frac{2}{\gamma - 3}}. \tag{6}$$

Зауважимо, що $J_n(1.233) < 1$, таким чином для $\gamma = 1.233$ і довільного набору областей B_k і точок a_k, $k = \overline{0,3}$, які задовольняють умови Теореми 1, правильна нерівність $I_n(\gamma) < I_n^0(\gamma)$, а значить для даного випадку теорема доведена. Правильність теореми для $1 < \gamma < 1.233$ випливає з монотонного зростання по γ виразу, записаного в правій частині нерівності (6).

Теорема доведена.$\square$

Цитована література

1. *Лаврентьев М.А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – № 5. – С. 159–245.
2. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Лебедев Н.А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1975. – 336 с.
4. *Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці Ін-ту матем. НАН України. – 2008. – 308 с.
5. *Бахтина Г.П.* Конформные радиусы симметрических неналегающих областей // Проблеми дійсного і комплексного аналізу. – 1984. – 149. – С. 21–27.
6. *Дубинин В.Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении// Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – 168. – С. 48–66.
7. *Дубинин В.Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного// Успехи мат. наук. – 1994. – 49, № 1 (295). – С. 3–76
8. *Ковалев Л.В.* О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей // Изв. вузов. Матем. – 2000. – № 6. – С. 82–87.
9. *Ковалев Л.В.* О трех непересекающихся областях // Дальневосточный матем. журнал. – 2000. – 1, № 1. – С. 3–7.
10. *Заболотный Я.В., Выговская Л.В.* О произведении внутренних радиусов симметричных многосвязных областей // Укр. матем. вісник. – 2017. – 14, № 3. – С. 440–451.
11. *Бахтин А.К., Выговская Л.В., Денега И.В.* Неравенства для внутренних радиусов симметричных неналегающих областей // Укр. матем. журнал. – 2018. – 70, № 9. – С. 1282–1288.
12. *Кузьмина Г.В.* Методы геометрической теории функций. II // Алгебра и анализ. – 1997. – 9, № 5. – С. 1–50.

References

1. Lavrent'ev, M.A (1934). On the theory of conformal mappings. *Travaux Inst. Physico-Math. Stekloff Acad. Sci. USSR*, *5*, 159-245.
2. Goluzin, G.M. (1969). *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable.* Translations of Mathematical Monographs, no. 26, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
3. Lebedev, N.A. (1975). *The area principle in the theory of univalent functions.* Moscow: Science (in Russian).
4. Bakhtin, A.K., Bakhtina, G.P., Zelinskii, Yu.B. (2008). Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis. *Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine* (in Russian).
5. Bakhtina, G.P. (1984). Conformal radii of symmetric nonoverlapping domains, *Current problems in real and complex analysis*, 21-27, 149, Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat., Kiev (in Russian).
6. Dubinin, V.N. (1988). The separating transformation of domains and problems on the extremal partition. *Analytical theory of numbers and theory of functions. Part 9, Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, *168*, 48-46 (in Russian). Translation in (1991) *J. Soviet Math.*, *53*(3), 252-263.
7. Dubinin, V.N. (1994). Symmetrization in the geometric theory of functions of a complex variable.

Uspekhi Mat. Nauk, *49*(1), 3-76 (in Russian). Translation in (1994) *Russian Math. Survey*, *49*(1), 1-79.

8. Kovalev, L.V. (2000). On the inner radii of symmetric nonoverlapping domains. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, *6*, 80-81 (in Russian).
9. Kovalev, L.V. (2000). On three disjoint domains. *Dal'nevost. Mat. Zh.*, *1*(1), 3-7 (in Russian).
10. Zabolotnyi, Ya.V., Vygovskaya, L.V. (2017). On a product of the inner radii of symmetric multiply connected domains. *Ukr. mat. vestnik*, 14(3), 440-451 (in Russian).
11. Bakhtin, A.K., Vygovskaya, L.V., Denega, I.V. (2018). Inequalities for inner radii of symmetric disjoint domains. *Ukrainian Mathem. Journal*, *70*(9), 1477–1483.
12. Kuz'mina, G.V. (1997). Methods of geometric function theory, II. *Algebra Anal.*, *9*(5), 1–50 (in Russian).

A.K. Bakhtin, Ya.V. Zabolotnii

The problem of the product of inner radii of four nonoverlapping domains, some of there are symmetric about unit circle.

Considered in the paper is one quite general problem of geometric function theory on extremal decomposition of the complex plane, namely to determine the maximum of product of the inner radii of n non-overlapping domains $\{B_k\}_{k=1}^{n}$,, symmetric with respect to the unit circle, and the power γ of the inner radius of a domain $\{B_0\}$, which contains the origin. Starting point of the theory of extremal problems on non-overlapping domains is the result of Lavrent'ev [1] who in 1934 solved the problem of a product of conformal radii of two mutually nonoverlapping simply connected domains. It was the first result of this direction. Goluzin [2] generalized this problem in the case of an arbitrary finite number of mutually disjoint domains and obtained an accurate evaluation for the case of three domains. Further, Kuzmina [12] showed that the problem of the evaluation for the case of four domains is reduced to the smallest capacity problems in a certain continuum family and received the exact inequality for $n = 4$. For $n \geq 5$ full solution of the problem is not obtained at this time. The problem, considered in this paper, stated in [7] by V.N. Dubinin and earlier in different form by G.P. Bakhtina [5]. Let $a_0 = 0$, $|a_1| = \ldots = |a_n| = 1$, $a_k \in B_k \in \overline{\mathbb{C}}$, where $B_0, \ldots, B_n$ are disjoint domains, and $B_1, \ldots, B_n$ are symmetric about the unit circle. Find the exact upper bound for $r^{\gamma}(B_0, 0) \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)$, where $r(B_k, a_k)$ is the inner radius of B_k with respect to a_k. For $\gamma = 1$ and $n \geq 2$ this problem was solved by L.V. Kovalev [8, 9] and for $\gamma_n = 0,38n^2$ and $n \geq 2$ under the additional assumption that the maximum α_0 of the angles between neighbouring line segments $[0, a_k]$ do not exceed $2\pi/\sqrt{2\gamma}$ it was solved in [11]. In the present paper this problem is solved for three non-overlapping symmetric domains and for $0 < \gamma \leq 1.233$ without additional restrictions, moreover, for the first time such $1 < \gamma$ are considered for this case. Was proved the lemma, by which it was obtained the estimate of the inner radius of a domain $\{B_0\}$, which contains the origin. Using this lemma and the result of paper [11], it was proved that for $\alpha_0 > 2\pi/\sqrt{2\gamma}$ consided product does not exceed some expression.

Keywords: *inner radius of domain, non-overlapping domains, separating transformation, quadratic differential.*

Інститут математики НАН України, Київ
`yaroslavzabolotnii@gmail.com`

Отримано 31.10.2019