УДК 517.956.25
DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-3

©2019. **М.В. Войтович**

НЕПЕРЕРВНІСТЬ СЛАБКИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ З ПІДСИЛЕНОЮ ЕЛІПТИЧНІСТЮ ЧЕРЕЗ ПОТЕНЦІАЛИ ВОЛЬФА

Розглядаються нелінійні дивергентні рівняння четвертого порядку з L^1 правими частинами і умовою підсиленої еліптичності на коефіцієнти. Основним результатом статті є теорема про оцінку коливання в кулі узагальнених розв'язків розглянутих рівнянь через потенціали Вольфа їх правих частин. Як наслідок одержано новий результат про внутрішню неперервність розв'язків рівнянь з правими частинами з класу Като, який характеризується рівномірною збіжністю до нуля відповідних потенціалів Вольфа. Розглянуто окремі важливі випадки виконання цієї умови: права частина рівняння належить до простору Морі з показником більше певного граничного значення, тоді розв'язки є локально неперервними за Гельдером; права частина належить до граничних класів Лоренца–Зігмунда, розв'язки є локально неперервними, але не Гельдер-неперервними, всередині області. У разі, коли сумовність правих частин розглянутих рівнянь характеризується показниками, меншими зазначених граничних значень, існують приклади необмежених розривних розв'язків. Встановлені факти є точними аналогами відповідних результатів в теорії еліптичних рівнянь другого порядку.

MSC: 31C15, 35B45, 35D30, 35J30, 35J62.

Ключові слова: *нелінійні еліптичні рівняння, слабкі розв'язки, неперервність, потенціал Вольфа, клас Като.*

1. Вступ.

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, Ω – обмежена відкрита множина в $\mathbb{R}^n$, і нехай $f \in L^1(\Omega)$. Розглядається нелінійне диференціальне рівняння з частинними похідними четвертого порядку у дивергентному вигляді:

$$\sum_{\alpha\in\Lambda_2}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha A_\alpha(x,\nabla_2 u)=f(x),\quad x=(x_1,\dots x_n)\in\Omega. \tag{1}$$

Тут і надалі ми використовуємо такі позначення: $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ — n-вимірний мультиіндекс з невід'ємними цілими компонентами α_i, $i=1,\dots,n$, $|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n$; Λ_2 — множина всіх n-вимірних мультиіндексів, таких, що $|\alpha|=1$ або $|\alpha|=2$; $\mathbb{R}^{n,2}$ — простір, який складається з усіх векторів $\xi=\{\xi_\alpha\in\mathbb{R}:\alpha\in\Lambda_2\}$; $D^\alpha=\partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}$ і $\nabla_2 u=\{D^\alpha u:|\alpha|=1,2\}$.

Стосовно коефіцієнтів $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_2}$ рівняння (1) робимо такі припущення:

(H1) Для будь-якого $\alpha\in\Lambda_2$, $A_\alpha:\Omega\times\mathbb{R}^{n,2}\to\mathbb{R}$ є функцією Каратеодорі, тобто для кожного $\xi\in\mathbb{R}^{n,2}$ функція $A_\alpha(\cdot,\xi)$ є вимірною на Ω, і для майже всіх $x\in\Omega$ функція $A_\alpha(x,\cdot)$ є неперервною в $\mathbb{R}^{n,2}$.

(H2) Нехай $1<p<n/2$ і $2p<q\leqslant n$. Існують додатні сталі c_1, c_2 і невід'ємні функції f_1, $f_2\in L^1(\Omega)$, такі, що для майже всіх $x\in\Omega$ і кожного $\xi\in\mathbb{R}^{n,2}$

виконуються нерівності:

$$\sum_{|\alpha|=1,2} A_\alpha(x,\xi)\xi_\alpha \geqslant c_1\Big\{\sum_{|\alpha|=1}|\xi_\alpha|^q+\sum_{|\alpha|=2}|\xi_\alpha|^p\Big\}-f_1(x), \tag{2}$$

$$\sum_{|\alpha|=1}|A_\alpha(x,\xi)|^{q/(q-1)}+\sum_{|\alpha|=2}|A_\alpha(x,\xi)|^{p/(p-1)} \leqslant c_2\Big\{\sum_{|\alpha|=1}|\xi_\alpha|^q+\sum_{|\alpha|=2}|\xi_\alpha|^p\Big\}+f_2(x). \tag{3}$$

Через $W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ позначаємо банахів простір $W^{1,q}(\Omega)\cap W^{2,p}(\Omega)$ з нормою

$$\|u\|=\|u\|_{W^{1,q}(\Omega)}+\sum_{|\alpha|=2}\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}, \quad u\in W^{1,q}_{2,p}(\Omega).$$

Тут $W^{1,q}(\Omega)$ і $W^{2,p}(\Omega)$ — класичні простори Соболєва [11, гл. 7]. Замикання множини $C_0^\infty(\Omega)$ у просторах $W^{1,q}(\Omega)$ і $W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ позначаємо через $W_0^{1,q}(\Omega)$ і $\mathring{W}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ відповідно.

Означення. Слабким (або узагальненим) розв'язком рівняння (1) називається функція $u\in W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$, така, що для будь-якої функції $v\in \mathring{W}^{1,q}_{2,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ з компактним носієм в Ω виконується інтегральна рівність

$$\int_\Omega\Big\{\sum_{\alpha\in\Lambda_2}A_\alpha(x,\nabla_2 u)D^\alpha v\Big\}dx=\int_\Omega f v\,dx. \tag{4}$$

Існування узагальнених розв'язків рівняння (1) можна довести методом монотонних операторів, якщо, додатково до припущень (H1) і (H2), коефіцієнти $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_2}$ задовольняють умову монотонності, а права частина рівняння f має підвищену сумовність, так, що права частина рівності (4) є неперервним лінійним функціоналом, визначеним у просторі $W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$. З точки зору нелінійної теорії потенціалу, якої ми дотримуємося в цій статті, остання умова виконується, якщо

$$\int_\Omega |f(x)|\,\mathbf{W}^f_{1,q}(x;R)\,dx<+\infty$$

для деякого $R>0$ (див. [12, Теорема 1]). Тут функцію f продовжено нулем на $\mathbb{R}^n\setminus\Omega$, і

$$\mathbf{W}^f_{a,b}(y;R)=\int_0^R\left(\frac{1}{r^{n-ab}}\int_{B_r(y)}|f(x)|\,dx\right)^{1/(b-1)}\frac{dr}{r}, \quad b>1, \quad n\geqslant ab$$

є різновид нелінійного потенціалу [25], так званий потенціал Вольфа [1,12]. Запис $B_r(y)$, як завжди, позначає множину $\{x\in\mathbb{R}^n : |x-y|<r\}$ – відкриту кулю з центром у точці $y\in\mathbb{R}^n$ і радіусом $r>0$. У разі, коли функція f належить тільки до $L^1(\Omega)$ і не має кращої сумовності, ми посилаємося на [16, 20] для доведення розв'язності рівняння (1) в припущеннях (H1) і (H2).

Квазілінійні дивергентні рівняння високого порядку ($2m$, $m \geqslant 2$), зокрема четвертого, зі структурними умовами на коефіцієнти на зразок нерівностей (2), (3) вперше з'явились в роботі І.В. Скрипника [34] в контексті проблеми регулярності розв'язків еліптичних рівнянь з частинними похідними у багатовимірних областях евклідового простору $\mathbb{R}^n$ (19-а проблема Гільберта). Для рівнянь другого порядку ($m = 1$) цю проблему спочатку розв'язали Е. Де Джорджі, Дж. Неш, Ю. Мозер для лінійних рівнянь, і згодом Дж. Серрін, О.А. Ладиженська і Н.М. Уральцева у загальному випадку квазілінійних рівнянь. В результаті цих досліджень, з якими можна ознайомитись, наприклад, за монографіями [7, 11, 22], сформувалися природні (стандартні) припущення на коефіцієнти квазілінійних еліптичних рівнянь другого порядку, що забезпечили коректне означення, існування, а згодом, і регулярність їх слабких розв'язків з просторів Соболєва $W^{1,p}(\Omega)$, коли $n \geqslant p > 1$.

Для рівнянь вищих порядків аналогічні, стандартні для простору $W^{m,p}(\Omega)$, умови вже не гарантують регулярності розв'язків, якщо $n > mp$. Відповідні контрприклади необмежених, розривних розв'язків навели В.Г. Мазья [24], Е. Де Джорджі [7], І.В. Скрипник [33, 34] та ін. Саме з метою уникнення розгляду таких прикладів в роботі [34] було виділено підклас дивергентних рівнянь порядку $2m$, $m \geqslant 2$, у яких всі узагальнені розв'язки локально неперервні за Гельдером і які характеризуються підсиленою умовою еліптичності (коерцитивності у просторі $W^{m,p}(\Omega) \cap W^{1,q}(\Omega)$, $n \geqslant q > mp$) і відповідною умовою зростання на коефіцієнти. У новій роботі [38] ми використовуємо термін "m-(p,q) умови"для позначення цього факту. Для $m = 2$ ці умови збігаються з нерівностями (2), (3), а при $m = 1$ перетворюються на так звані нестандартні (p,q)-умови зростання для коефіцієнтів рівнянь другого порядку (для більш докладної інформації дивись, наприклад, публікації [26, 36, 38] і посилання в них).

Структурні m-(p,q) умови наділяють рівняння високого порядку якісними властивостями, притаманними рівнянню q-Лапласа:

$$-\mathrm{div}(|\nabla u|^{q-2}\nabla u) = f \text{ в } \Omega, \tag{5}$$

на зразок теорії Де Джорджі-Неша-Мозера (див. [4, 17–19, 29, 30, 34, 37]).

Особливо добре це видно на прикладі роботи [38], в якій на рівняння з m-(p,q) структурними умовами поширено знаменитий результат Т. Кілпелайнена і Я. Мали [15] про поточкові оцінки для розв'язків $u \in W^{1,q}(\Omega)$ рівняння (5), що мають вигляд:

$$|u(x_0)| \leqslant C\left(R^{-n}\int_{B_R(x_0)} |u|^{(q-1)(1+\lambda)}\,dx\right)^{\frac{1}{(q-1)(1+\lambda)}} + C\mathbf{W}^f_{1,q}(x_0;2R), \tag{6}$$

$$C'\mathbf{W}^f_{1,q}(x_0;R) \leqslant u(x_0) \leqslant C'' \inf_{B_R(x_0)} u + C''\mathbf{W}^f_{1,q}(x_0;2R) \quad (u, f \geqslant 0 \text{ в } \Omega), \tag{7}$$

де $\lambda \in (0, \frac{q-1}{n-q+1})$, C, C', C'' – додатні сталі, залежні тільки від n, q і λ, $x_0 \in \Omega$ – довільна лебегова точка функції u і $B_{3R}(x_0) \subset \Omega$. Ці оцінки цікаві тим, що дозволяють вивчати локальні властивості розв'язків рівняння (5) (і більш загальних квазілінійних рівнянь), аналізуючи відповідні потенціали [15, 20, 21, 23]. Прообразом такого підходу є класична теорія потенціалу Ньютона і рівняння Пуассона [5, 13]. Метод Кілпелайнена-Мали можна розглядати як узагальнення методу Де Джорджі, перед яким він має відомі переваги. Зокрема, він не вимагає стандартної для методу Де Джорджі умови $f \in L^\tau(\Omega)$ з $\tau > n/q$ на сумовність правої частини рівняння (5). Фактично для реалізації методу Кілпелайнена–Мали достатньо тільки припущення $f \in L^1(\Omega)$. З цієї точки зору він є універсальним, а завдяки наявності двобічних оцінок в (7) для значення $u(x_0)$, і оптимальним в певному розумінні. До того ж, використання методу Кілпелайнена-Мали в граничних точках області Ω вирішує питання про необхідну умову регулярності за Вінером цих точок для нелінійних рівнянь другого порядку [15, 23]. Для рівнянь порядку $2m$ ($m \geqslant 2$) з m-(p,q) структурними умовами ця проблема все ще є актуальною (про відповідну достатню умову див. [35]). Наразі її розв'язання стає цілком можливим завдяки цій роботі і [38].

Для довільного розв'язку $u \in W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ рівняння (1) за умов (H1) і (H2) аналог оцінки (6) має вигляд (див. [38, Теорема 3.2])

$$\begin{aligned} |u(x_0)| \leqslant C_1 \Big(R^{-n} \int_{B_R(x_0)} |u|^{(q-1)(1+\lambda)}\, dx \Big)^{\frac{1}{(q-1)(1+\lambda)}} \\ + C_1 \Big(\mathbf{W}^f_{1,q}(x_0; 2R) + \mathbf{W}^{f_1+f_2}_{\frac{q}{q+1}, q+1}(x_0; 2R) + R^{\frac{q-2p}{q-p}} \Big), \end{aligned} \tag{8}$$

де стала $C_1 > 0$ залежить тільки від n, p, q і сталих c_1 і c_2 в умовах (2), (3). З цієї оцінки випливає локальна обмеженість розв'язку u (див. [38, Теорема 3.6]): якщо $\mathcal{O}$ – відкрита підмножина Ω, яка компактно входить до Ω ($\overline{\mathcal{O}} \subset \Omega$),

$$0 < \varrho < \min\big\{1, \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\overline{\mathcal{O}}, \partial\Omega)\big\} \quad \text{і} \quad \sup_{x' \in \overline{\mathcal{O}}} \mathbf{W}^f_{1,q}(x'; 2\varrho) + \sup_{x' \in \overline{\mathcal{O}}} \mathbf{W}^{f_1+f_2}_{\frac{q}{q+1}, q+1}(x'; 2\varrho) < +\infty,$$

то $\operatorname{ess\,sup}_{\overline{\mathcal{O}}} |u| < +\infty$.

Доведення внутрішньої неперервності розв'язку u в термінах потенціалів $\mathbf{W}^f_{1,q}$ і $\mathbf{W}^{f_1+f_2}_{\frac{q}{q+1}, q+1}$ вимагає додаткових досліджень, які призводять до умови

$$\lim_{\rho \to 0} \Big(\sup_{x \in \Omega} \mathbf{W}^f_{1,q}(x; \rho) + \sup_{x \in \Omega} \mathbf{W}^{f_1+f_2}_{\frac{q}{q+1}, q+1}(x; \rho) \Big) = 0. \tag{9}$$

Такі дослідження в роботі [38] відсутні, їм присвячено цю статтю.

Умову (9) можна подати в термінах так званих Като-класів функцій наступним чином:

$$f \in K_{1,q}(\Omega), \quad f_1, f_2 \in K_{\frac{q}{q+1}, q+1}(\Omega),$$

де за означенням $K_{a,b}(\Omega) = \{g \in L^1(\Omega) : \lim_{\rho \to 0} \sup_{x \in \Omega} \mathbf{W}^g_{a,b}(x; \rho) = 0\}$. Дослідження локальних властивостей розв'язків рівнянь другого порядку з коефіцієнтами з класів Като і бібліографію з цієї проблематики можна знайти в [20].

Ця стаття організована в такий спосіб. У наступному розділі наведено формулювання основних результатів. Головним з них є Теорема 1 про оцінку коливання розв'язку u у кулі $B_\rho(x_0) \subset \Omega$, для якого ми використовуємо таке позначення:

$$\operatorname{osc}\{u; B_\rho(x_0)\} := \operatorname*{ess\,sup}_{B_\rho(x_0)} u - \operatorname*{ess\,inf}_{B_\rho(x_0)} u.$$

Безпосереднім наслідком цієї теореми є Теорема 2 про неперервність довільного розв'язку $u \in W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ рівняння (1) в припущеннях (H1), (H2) і (9). Ми також розглядаємо окремі важливі випадки виконання умови (9) (див. Теореми 3-6). Доведенню Теореми 1 присвячено четвертий розділ. Воно спирається на потенціальні поточкові оцінки функцій із класів, які ми називаємо класами Кілпелайнена–Мали і позначаємо через $\mathsf{KM}^{f_1,f_2,f}_{2,p,q,t,\lambda}(B_R(x_0); K_1, K_2, K_3)$. Точне означення цих класів і відповідні оцінки наведено в третьому розділі.

2. Основні результати.

Для будь-якого $\rho > 0$ покладемо

$$\mathbf{W}^f_{1,q}(\rho) = \sup_{x\in\Omega} \mathbf{W}^f_{1,q}(x;\rho), \quad \mathbf{W}^{f_1+f_2}_{\frac{q}{q+1},q+1}(\rho) = \sup_{x\in\Omega} \mathbf{W}^{f_1+f_2}_{\frac{q}{q+1},q+1}(x;\rho),$$

$$\psi(\rho) = \mathbf{W}^f_{1,q}(4\rho) + \mathbf{W}^{f_1+f_2}_{\frac{q}{q+1},q+1}(4\rho). \tag{10}$$

Наступна теорема є головним результатом статті.

Теорема 1. *Нехай* $u \in W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ *– слабкий розв'язок рівняння* (1) *за умови виконання припущень* (H1), (H2)*, і нехай* $B_{2R}(x_0) \subset \Omega$*,* $R \leqslant 1$*. Тоді для будь-яких* $\rho \in (0, R]$ *і* $\theta \in (0,1)$ *виконується нерівність*

$$\operatorname{osc}\{u; B_\rho(x_0)\} \leqslant C\Big((\rho/R)^\vartheta \operatorname{osc}\{u; B_R(x_0)\} + (\rho^\theta R^{1-\theta})^{\frac{q-2p}{2(q-p)}} + \psi(\rho^\theta R^{1-\theta})\Big) \tag{11}$$

де $C = C(n,p,q,c_1,c_2)$ *і* $\vartheta = \vartheta(n,p,q,\theta,c_1,c_2)$ *– деякі додатні сталі.*

З оцінки (11) випливає, що в умовах Теореми 1 розв'язок u буде неперервним в Ω, якщо $\lim\limits_{\rho\to 0} \psi(\rho) = 0$, тобто, якщо виконується умова (9). Отже, маємо такий результат.

Теорема 2. *Нехай* $u \in W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ *– слабкий розв'язок рівняння* (1) *за умови виконання припущень* (H1), (H2) *і* (9)*. Тоді розв'язок* u *є неперервним в* Ω*.*

Умова (9) є суттєвою для правильності Теореми 2 (див. [38, приклади 6.1, 6.2]). Розглянемо окремі важливі випадки, коли виконується ця умова. Нехай спочатку

$$f, f_1, f_2 \in M^\tau(\Omega) \ \text{ для деякого } \tau > n/q, \tag{12}$$

де запис $g \in M^\tau(\Omega)$, $\tau > 1$, означає (див. [11]) існування сталої $K > 0$, такої, що

$$\int_{\Omega\cap B_r} |g|dx \leqslant K r^{n(\tau-1)/\tau} \ \text{ для всіх куль } B_r \subset \mathbb{R}^n.$$

Найменша стала K, що задовольняє цю нерівність називається нормою функції $g \in M^\tau(\Omega)$ і позначається через $\|g\|_{M^\tau(\Omega)}$. З умови (12) випливає, що для будь-якого $\rho > 0$ виконуються очевидні нерівності

$$\mathbf{W}^f_{1,q}(\rho) \leqslant \frac{\tau(q-1)}{\tau q - n}\, \|f\|^{1/(q-1)}_{M^\tau(\Omega)}\, \rho^{\frac{\tau(q-1)}{\tau q - n}}, \mathbf{W}^{f_1+f_2}_{\frac{q}{q+1},q+1}(\rho) \leqslant \frac{\tau q}{\tau q - n}\, \|f_1 + f_2\|^{1/q}_{M^\tau(\Omega)}\, \rho^{\frac{\tau q - n}{\tau q}},$$

які в комбінації з Теоремою 1 дають такий результат.

Теорема 3. *Нехай $u \in W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ – слабкий розв'язок рівняння* (1) *за умов* (H1), (H2) *і* (12). *Тоді розв'язок u є локально неперервним за Гельдером в Ω.*

Зауваження 1. У випадку, коли $f_1 \equiv f_2 \equiv 0$ і $f \geqslant 0$, має місце результат, обернений до Теореми 3: з гельдерової неперервності розв'язку $0 \leqslant u \in W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ рівняння (1) випливає, що $f \in M^\tau_{\rm loc}(\Omega)$ для деякого $\tau > n/q$ [38, Теорема 3.14]). Про аналогічні результати для рівнянь другого порядку дивись [15, 31].

У граничному випадку, коли $f,\ f_1,\ f_2 \in M^{n/q}(\Omega)$, рівняння у вигляді (1)–(3) можуть мати необмежені розривні розв'язки [38, Приклад 6.1]. Теорія еліптичних рівнянь другого порядку [9] підказує уточнення останньої умови, яке гарантує неперервність розв'язків (але не гельдерову неперервність [2]):

$$f \in L^{n/q,\,1/(q-1)}(\Omega), \quad f_1,\, f_2 \in L^{n/q,\,1/q}(\Omega). \tag{13}$$

Нагадаємо, що за означенням (див., наприклад, [3, гл. 4]) *простір Лоренца* $L^{a,b}(\Omega)$ $(0 < a, b \leqslant +\infty)$ складається з усіх вимірних і майже всюди скінчених функцій $g : \Omega \to \mathbb{R}$, для яких величина

$$\|g\|_{a,b} = \begin{cases} \Big(\int_0^{|\Omega|} [\, s^{1/a} g^*(s)]^{\,b}\, \frac{ds}{s} \Big)^{1/b}, & \text{якщо } \ 0 < b < +\infty, \\ \sup\limits_{0<t<|\Omega|} [\, s^{1/a} g^*(s)], & \text{якщо } \ b = +\infty, \end{cases}$$

є скінченою. Тут символ $|\Omega|$ позначає n-вимірну міру Лебега множини Ω, а запис $g^* : [0, |\Omega|) \to [0, +\infty)$ позначає *спадну перестановку* функції g, визначену як $g^*(s) = \sup\{t \geqslant 0 : |\{x \in \Omega : |g(x)| > t\}| > s\}$ для $0 \leqslant s < |\Omega|$.

З [8, Розділ 3.2] випливає, що умова (9) виконується, якщо виконано (13). Тому маємо такий результат.

Теорема 4. *Нехай $n > q$, і нехай $u \in W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ – слабкий розв'язок рівняння* (1) *за умов* (H1), (H2) *і* (13). *Тоді розв'язок u є неперервним в Ω.*

Розглянемо ще один граничний випадок, коли $n = q$. У цьому випадку умова (9) виконується, якщо

$$\int_0^{|\Omega|} \left(\int_0^t f^*(s)\, ds \right)^{1/(n-1)} \frac{dt}{t} < +\infty, \tag{14}$$

$$\int_0^{|\Omega|} \left(\int_0^t [f_1^*(s) + f_2^*(s)]\, ds \right)^{1/n} \frac{dt}{t} < +\infty. \tag{15}$$

Цей факт випливає з відомої нерівності Харді–Літлвуда: якщо $g \in L^1(\Omega)$ і $E \subset \Omega$ – вимірна за Лебегом множина, то

$$\int_E |g(x)|dx \leqslant \int_0^{|E|} g^*(s)ds.$$

Як наслідок сказаного, а також Теореми 2, маємо такий результат (див. [14] для порівняння з випадком $m = 1$).

Теорема 5. *Нехай $n = q$, і нехай $u \in W^{1,n}_{2,p}(\Omega)$ – слабкий розв'язок рівняння* (1) *за умов* (H1), (H2), (14) *і* (15). *Тоді розв'язок u є неперервним в Ω.*

Нарешті, за аналогією з [14, 38] можна показати, що умови (14) і (15) виконуються, якщо для деякого $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} f &\in L(\log L)^{n-1}(\log\log L)^{n-2}\cdots(\log\cdots\log L)^{n-2}(\log\cdots\log L)^{n-2+\epsilon}(\Omega), \\ f_1, f_2 &\in L(\log L)^{n}(\log\log L)^{n-1}\cdots(\log\cdots\log L)^{n-1}(\log\cdots\log L)^{n-1+\epsilon}(\Omega). \end{aligned} \tag{16}$$

Точне означення *простору Зігмунда* $L(\log L)^{\sigma_1}\cdots(\log\cdots\log L)^{\sigma_k}(\Omega)$, $\sigma_1,\dots\sigma_k \in \mathbb{R}$, можна знайти, наприклад, в [3, гл. 4], [14].

Теорема 6. *Нехай $n = q$, і нехай $u \in W^{1,n}_{2,p}(\Omega)$ – слабкий розв'язок рівняння* (1) *за умов* (H1), (H2) *і* (16). *Тоді розв'язок u є неперервним в Ω.*

Зауваження 2. Теорема 6 стає неправильною, якщо в умовах (16) покласти $\epsilon = 0$ (див. [38, Приклад 6.2]).

3. Поточкові потенціальні оцінки для функцій із класів Кілпелайнена–Мали.

Означення. Нехай $B_{2R}(x_0) \subset \Omega$, $0 < R \leqslant 1$, $t \geqslant 1$ і $\lambda \in \left(0, \frac{q-1}{n-q+1}\right)$. Говоримо, що функція $u \in W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ належить до класу $\mathsf{KM}^{f_1,f_2,f}_{2,p,q,t,\lambda}(B_R(x_0); K_1, K_2, K_3)$, якщо існують додатні сталі K_1, K_2 і K_3, такі, що для будь-яких концентричних куль $B_r(x_0)$ і $B_{r-\sigma r}(x_0)$, $R/2 \leqslant r - \sigma r < r \leqslant R$, і будь-яких чисел $l \geqslant 0$ і $\delta > R^{\frac{q-2p}{2(q-p)}}$ виконується нерівність (для порівняння див. [38, нерівність 4.10]):

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega_{r-\sigma r,l}(x_0)} \frac{[U_{l,\delta}(u)]^{t-1}|D^\alpha u|^q}{\left(1+U^t_{l,\delta}(u)\right)^{1+\lambda/t}}\,dx &\leqslant \frac{K_1\delta^q}{(\sigma r)^q}\int_{\Omega_{r,l}(x_0)} \left(1+U^t_{l,\delta}(u)\right)^{\frac{(\lambda+1)(q-1)}{t}}dx \\ &\quad + K_2\int_{B_r(x_0)}(f_1+f_2)dx + K_3\delta\int_{B_r(x_0)}|f|\,dx, \end{aligned} \tag{17}$$

де $\Omega_{r,l}(x_0) = B_r(x_0) \cap \{x \in \Omega : |u(x)| > l\}$ і, для будь-якого $s \in \mathbb{R}$,

$$U_{l,\delta}(s) = \max\left\{\frac{(|s|-l)}{\delta}, 0\right\} = \frac{(|s|-l)_+}{\delta}. \tag{18}$$

Теорема 7. *Нехай $B_{2R}(x_0) \subset \Omega$, $0 < R \leqslant 1$, $t \geqslant 1$, $0 < \lambda < (q-1)/(n-q+1)$,*

$$u \in \mathsf{KM}^{f_1,f_2,f}_{2,p,q,t,\lambda}(B_R(x_0); K_1, K_2, K_3),$$

і нехай x_0 – точка Лебега функції u. Тоді виконується така нерівність:

$$|u(x_0)| \leqslant C\biggl(R^{-n}\int_{B_R(x_0)}|u|^{(\lambda+1)(q-1)}dx\biggr)^{\frac{1}{(\lambda+1)(q-1)}}$$
$$+\,C\biggl(K_2^{1/q}\mathbf{W}^{f_1+f_2}_{\frac{q}{q+1},q+1}(x_0;2R)+K_3^{1/(q-1)}\mathbf{W}^{f}_{1,q}(x_0;2R)+R^{\frac{q-2p}{2(q-p)}}\biggr),$$

де C – додатна стала, залежна тільки від n, p, q, λ, t і K_1.

Ми не наводимо тут доведення Теореми 2. Воно повторює з незначними змінами міркування, що викладені в [38, Розд. 4.2, 4.3]). Також в [38, Лема 4.1] показано, що для будь-якого $\lambda \in \bigl(0, \frac{q-1}{n-q+1}\bigr)$ і деякого $t = t(p,q) > 2$ довільний слабкий розв'язок $u \in W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ рівняння (1) за умов (H1) і (H2) належить до класу $\mathsf{KM}^{f_1,f_2,f}_{2,p,q,t,\lambda}(B_R(x_0); K_1, K_2, K_3)$, в якому константи K_1, K_2 і K_3 залежать тільки від n, p, q, c_1, c_2 і λ. Саме звідси і з Теореми 2 випливає слушність оцінки (8).

Важливим новим моментом, який відрізняє цю роботу від [38], є той факт, що до класів $\mathsf{KM}^{f_1,f_2,f}_{2,p,q,t,\lambda}(B_R(x_0); K_1, K_2, K_3)$ належать не тільки розв'язки рівняння (1), але і їх суперпозиції з деякими допоміжними функціями, на кшталт логарифмічних функцій Мозера [27, 28]. Цей факт буде встановлено і використано для доведення Теореми 1 в наступному розділі.

4. Доведення Теореми 1.

Нехай x_0 – довільна точка в Ω, $\partial\Omega$ – границя Ω, і $d = \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$. Зафіксуємо радіуси

$$R < \min\{d/8, 1\} \quad \text{і} \quad 0 < \rho \leqslant R, \tag{19}$$

і зробимо такі позначення:

$$M(\rho) = \operatorname*{ess\,sup}_{B_\rho(x_0)} u, \quad m(\rho) = \operatorname*{ess\,inf}_{B_\rho(x_0)} u, \quad \omega(\rho) = \operatorname{osc}\{u; B_\rho(x_0)\} = M(\rho) - m(\rho).$$

Внаслідок [38, Теорема 3.6] маємо: $M(\rho) < +\infty$, $m(\rho) < +\infty$, і тому $\omega(\rho) < +\infty$. Визначимо такі множини:

$$G'_\rho = \Bigl\{x \in B_\rho(x_0) : u(x) \leqslant m(\rho) + \frac{\omega(\rho)}{2}\Bigr\}, \quad G''_\rho = B_\rho(x_0) \setminus G'_\rho. \tag{20}$$

Далі визначимо функцію $V : B_\rho(x_0) \to (0, +\infty)$ в такий спосіб:

$$V(x) = V(u(x)) = \begin{cases} \ln \dfrac{2\omega(\rho)}{u(x) - m(\rho) + \rho^{\frac{q-2p}{2(q-p)}} + \psi(\rho)}, & \text{якщо } |G'_\rho| \leqslant \dfrac{1}{2}|B_\rho(x_0)|, \\ \ln \dfrac{2\omega(\rho)}{M(\rho) - u(x) + \rho^{\frac{q-2p}{2(q-p)}} + \psi(\rho)}, & \text{якщо } |G''_\rho| \leqslant \dfrac{1}{2}|B_\rho(x_0)|, \end{cases} \tag{21}$$

де значення $\psi(\rho)$ визначено за допомогою (10). Припускаємо також, що $\omega(\rho) > \rho^{\frac{q-2p}{2(q-p)}} + \psi(\rho)$, і тому

$$V > 0 \ \text{ в } \ B_\rho(x_0), \tag{21$'$}$$

інакше нерівність (11) виконується.

Наші подальші міркування скеровані на доведення обмеженості функції V в кулі $B_{\rho/2}(x_0)$. Звідси, як буде показано нижче, і випливає оцінка (11). Ідея використання обмеженості логарифмічної функції на зразок функції (21) для доведення неперервності розв'язку u походить з робіт Ю. Мозера [27, 28] і його ітераційного методу для лінійних еліптичних рівнянь другого порядку. Для нелінійних рівнянь вищих порядків з досить регулярними даними подібні ідеї реалізовано Й. Фрезе [10], К.-О. Відманом [39], І.В. Скрипником [32–34] і згодом багатьма іншими авторами, див., наприклад, [4, 6, 17, 18, 29, 30, 35, 37]. Наразі, ми не можемо застосувати ітераційний метод Мозера для доведення обмеженості функції V, оскільки права частина f рівняння (1) є слабко сумовною. Фактично, f належить тільки до $L^1(\Omega)$. Ми скористаємося Теоремою 2, яка не вимагає від f підвищеної сумовності і дає можливість для доведення обмеженості функції V в термінах величин $\mathbf{W}^{f_1+f_2}_{\frac{q}{q+1},q+1}(4\rho)$ і $\mathbf{W}^{f}_{1,q}(4\rho)$.

Візьмемо довільну точку Лебега $\overline{x} \in B_{\rho/2}(x_0)$ функції V, концентричні кулі $B_r(\overline{x})$ і $B_{r-\sigma r}(\overline{x})$ з радіусами

$$\rho/8 \leqslant r - \sigma r < r \leqslant \rho/4 \leqslant 1, \tag{22}$$

функцію $\eta \in C_0^\infty(B_r(\overline{x}))$ з такими властивостями:

$$0 \leqslant \eta \leqslant 1 \text{ в } B_r(\overline{x}), \quad \eta = 1 \text{ в } B_{r-\sigma r}(\overline{x}), \tag{23}$$

$$|D^\alpha \eta| \leqslant c_n(\sigma r)^{-|\alpha|} \text{ для кожного } \alpha \in \Lambda_2, \tag{24}$$

і дійсні числа λ і t, що задовольняють умови:

$$0 < \lambda < \frac{1}{n-1} < \frac{q-1}{n-q+1}, \quad t > 2. \tag{25}$$

Покажемо, що

$$V \in \mathsf{KM}^{f_1,f_2,f}_{2,p,q,t,\lambda}(B_{\rho/4}(\overline{x}); K_1, K_2, K_3), \tag{26}$$

де

$$K_1 = c_3, \quad K_2 = c_3[\psi(\rho)]^{-q}, \quad K_3 = c_3[\psi(\rho)]^{1-q}, \tag{27}$$

і через c_i, $i = 3, 4, \ldots$, позначено сталі, що залежать тільки від c_1, c_2, n, p, q, λ, t.

Для цього фіксуємо числа l і δ,

$$l \geqslant 0, \quad \delta > \rho^{\frac{q-2p}{2(q-p)}}. \tag{28}$$

Визначимо функції $h_{l,\delta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (див. [38, рівність (4.11)]) і $\widetilde{v} : \Omega \to \mathbb{R}$ в такий спосіб:

$$h_{l,\delta}(s) = \Big[1 - \big(1 + U^t_{l,\delta}(s)\big)^{-\lambda/t}\Big] \operatorname{sign} s \quad \text{для будь-якого } s \in \mathbb{R},$$

$$\widetilde{v} = \begin{cases} B^{1-q} h_{l,\delta}(V(u))\eta^q & \text{в } B_r(\overline{x}), \\ 0 & \text{в } \Omega \setminus B_r(\overline{x}), \end{cases} \tag{29}$$

де функція $U_{l,\delta}(s)$ визначена за допомогою (18), а функція $B : B_\rho(x_0) \to (0, +\infty)$ – в такий спосіб:

$$B(x) = \begin{cases} u(x) - m(\rho) + \rho^{\frac{q-2p}{2(q-p)}} + \psi(\rho), & \text{якщо } |G'_\rho| \leqslant \dfrac{1}{2}|B_\rho(x_0)|, \\ M(\rho) - u(x) + \rho^{\frac{q-2p}{2(q-p)}} + \psi(\rho), & \text{якщо } |G''_\rho| \leqslant \dfrac{1}{2}|B_\rho(x_0)|. \end{cases} \tag{30}$$

Ясно, що $h_{l,\delta} \in C^2(\mathbb{R})$ і для будь-якого $s \in \mathbb{R}$ виконуються співвідношення (див., також, [38, нерівність (4.13)]):

$$\begin{aligned} h'_{l,\delta}(s) &= \lambda\, \delta^{-1}\big(1 + U^t_{l,\delta}(s)\big)^{-1-\lambda/t}\, U^{t-1}_{l,\delta}(s), \\ |h''_{l,\delta}(s)| &\leqslant c_4\, \delta^{-2}\, \big(1 + U^t_{l,\delta}(s)\big)^{-1-\lambda/t}\, U^{t-2}_{l,\delta}(s). \end{aligned} \tag{31}$$

Безпосередні обчислення з використанням (21), (24), (29), (30), (31) показують, що функція $\widetilde{v}$ належить до $\mathring{W}^{1,q}_{2,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, має компактний носій в $B_r(\overline{x}) \subset \Omega$, і виконуються такі твердження:

якщо $\alpha \in \Lambda_2$ і $|\alpha| = 1$, то

$$\begin{aligned} &\left| D^\alpha \widetilde{v} \pm \frac{\lambda}{\delta}\, \frac{U^{t-1}_{l,\delta}(V) B^{-q} D^\alpha u\, \eta^q}{\big(1 + U^t_{l,\delta}(V)\big)^{1+\lambda/t}} \pm (q-1) B^{-q} h_{l,\delta}(V) D^\alpha u\, \eta^q \right| \\ &\qquad\qquad \leqslant \frac{c_5 q}{\sigma r} B^{1-q} h_{l,\delta}(V) \eta^{q-1} \quad \text{м.в. в } \Omega; \end{aligned} \tag{32}$$

якщо $\alpha \in \Lambda_2$ і $|\alpha| = 2$, то

$$\begin{aligned} &\left| D^\alpha \widetilde{v} \pm \frac{\lambda}{\delta}\, \frac{U^{t-1}_{l,\delta}(V) B^{-q} D^\alpha u\, \eta^q}{\big(1 + U^t_{l,\delta}(V)\big)^{1+\lambda/t}} \pm (q-1) B^{-q} h_{l,\delta}(V) D^\alpha u\, \eta^q \right| \\ &\leqslant c_6 \sum_{|\beta|=1} |D^\beta u|^2 B^{-q-1} (|h_{l,\delta}(V)| + h'_{l,\delta}(V) + |h''_{l,\delta}(V)|) \eta^q \\ &+ \frac{c_6}{\sigma r} \sum_{|\beta|=1} |D^\beta u| B^{-q} (|h_{l,\delta}(V)| + h'_{l,\delta}(V)) \eta^{q-1} \\ &+ \frac{c_6}{(\sigma r)^2} B^{1-q} h_{l,\delta}(V) \eta^{q-2} \quad \text{м.в. в } \Omega. \end{aligned} \tag{33}$$

Надалі, для зручності, ми використовуємо такі скорочені позначення:

$$V_{l,\delta} = U_{l,\delta}(V) \ \text{ і } \ \Phi = \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u|^p. \tag{34}$$

Підставивши функцію $\widetilde{v}$ в (4) замість v, і скориставшись умовою (2) і твердженнями (32) і (33), отримаємо нерівність

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda c_1}{\delta} \int_{\Omega_{r,l}(\overline{x})} \frac{\Phi V^{t-1}_{l,\delta} B^{-q} \eta^q}{(1 + V^t_{l,\delta})^{1+\lambda/t}}\, dx \leqslant \\ &\leqslant c_7 \bigg(\sum_{i=1}^4 I_i + \frac{\lambda}{\delta} \int_{\Omega_{r,l}(\overline{x})} \frac{f_1 V^{t-1}_{l,\delta} B^{-q} \eta^q}{(1 + V^t_{l,\delta})^{1+\lambda/t}}\, dx + \int_{\Omega_{r,l}(\overline{x})} |f| \widetilde{v}\, dx \bigg), \end{aligned} \tag{35}$$

де

$$I_1 = \sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega_{r,l}(\overline{x})} (\sigma r)^{-1} |A_\alpha(x, \nabla_2 u)| \, |h_{l,\delta}(V)| B^{1-q} \eta^{q-1} dx,$$

$$I_2 = \sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega_{r,l}(\overline{x})} (\sigma r)^{-2} |A_\alpha(x, \nabla_2 u)| \, |h_{l,\delta}(V)| B^{1-q} \eta^{q-2} dx,$$

$$I_3 = \sum_{|\alpha|=2} \sum_{|\beta|=1} \sum_{\kappa=0,1} \int_{\Omega_{r,l}(\overline{x})} (\sigma r)^{-1} |A_\alpha(x, \nabla_2 u)| \, |D^\beta u| \, |h^{(\kappa)}_{l,\delta}(V)| B^{-q} \eta^{q-1} dx,$$

$$I_4 = \sum_{|\alpha|=2} \sum_{|\beta|=1} \sum_{\kappa=0}^{2} \int_{\Omega_{r,l}(\overline{x})} |A_\alpha(x, \nabla_2 u)| \, |D^\beta u|^2 \, |h^{(\kappa)}_{l,\delta}(V)| B^{-q-1} \eta^q dx.$$

Нам знадобляться такі оцінки для I_i, $i = 1, 2, 3, 4$, з довільним $\varepsilon \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} I_i \leqslant \frac{c_2 \varepsilon}{\delta} \int_{\Omega_{r,l}(\overline{x})} \frac{\Phi V_{l,\delta}^{t-1} B^{-q} \eta^q}{(1 + V_{l,\delta}^t)^{1+\lambda/t}} \, dx \\ + \frac{c_8}{\varepsilon^{c_4}} \frac{\delta^{q-1}}{(\sigma r)^q} \int_{\Omega_{r,l}(\overline{x})} (1 + V_{l,\delta}^t)^{\frac{(1+\lambda)(q-1)}{t}} dx + \frac{\varepsilon}{\delta} \int_{\Omega_{r,l}(\overline{x})} \frac{f_2 V_{l,\delta}^{t-1} B^{-q} \eta^q}{(1 + V_{l,\delta}^t)^{1+\lambda/t}} \, dx. \end{aligned} \tag{36}$$

Ми не наводимо тут детальне доведення нерівності (36), яке можна виконати на зразок роботи [38]. Зауважимо тільки, що воно ґрунтується на акуратному використанні нерівності Юнга в комбінації з нерівностями (3), (22)–(25), (28), (31) і відповідному виборі параметру $t = t(p, q) > 2$.

Оцінки (36) разом з (35) за умови вибору достатньо малого $\varepsilon > 0$ дають:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{r,l}(\overline{x})} \frac{\Phi V_{l,\delta}^{t-1} B^{-q} \eta^q}{(1 + V_{l,\delta}^t)^{1+\lambda/t}} \, dx \leqslant \frac{c_9 \delta^q}{(\sigma r)^q} \int_{\Omega_{r,l}(\overline{x})} (1 + V_{l,\delta}^t)^{\frac{(1+\lambda)(q-1)}{t}} dx \\ + c_9 \int_{\Omega_{r,l}(\overline{x})} \frac{(f_1 + f_2) V_{l,\delta}^{t-1} \eta^q}{B^q (1 + V_{l,\delta}^t)^{1+\lambda/t}} \, dx + c_9 \delta \int_{\Omega_{r,l}(\overline{x})} |f| \widetilde{v} \, dx. \end{aligned}$$

З огляду на (23), (29) і (30) для інтегралів в правій частині останньої нерівності, що містять функції f_1, f_2 і f, маємо такі оцінки:

$$\int_{\Omega_{r,l}(\overline{x})} \frac{(f_1 + f_2) V_{l,\delta}^{t-1} \eta^q}{B^q (1 + V_{l,\delta}^t)^{1+\lambda/t}} \, dx \leqslant \frac{1}{[\psi(\rho)]^q} \int_{\Omega_{r,l}(\overline{x})} (f_1 + f_2) dx,$$

$$\int_{\Omega_{r,l}(\overline{x})} |f| \widetilde{v} \, dx \leqslant [\psi(\rho)]^{1-q} \int_{\Omega_{r,l}(\overline{x})} |f| dx,$$

які у поєднанні з попередньою нерівністю, властивістю (23) і визначеннями функцій V, B, $V_{l,\delta}$ і Φ (див. рівності (21), (30) і (34), відповідно) дають:

$$\sum_{|\alpha|=1}\int_{\Omega_{r-\sigma r,l}(\overline{x})}\frac{[U_{l,\delta}(V)]^{t-1}|D^\alpha V|^q}{\left(1+U^t_{l,\delta}(V)\right)^{1+\lambda/t}}\,dx\leqslant\frac{c_9\delta^q}{(\sigma r)^q}\int_{\Omega_{r,l}(\overline{x})}\left(1+U^t_{l,\delta}(V)\right)^{\frac{(1+\lambda)(q-1)}{t}}dx$$
$$+\frac{c_9}{[\psi(\rho)]^q}\int_{\Omega_{r,l}(\overline{x})}(f_1+f_2)dx+\frac{c_9\delta}{[\psi(\rho)]^{q-1}}\int_{\Omega_{r,l}(\overline{x})}|f|dx.$$

Одержана нерівність означає, що для функції V, визначеної за допомогою рівності (21), виконується нерівність вигляду (17) зі сталими K_1, K_2, K_3, визначеними в (27) і з радіусами r і $r-\sigma r$ як в (22). Таким чином, доведення включення (26) завершено.

Тепер Теорема 2 з урахуванням (26), (27), нерівностей $(\lambda+1)(q-1)<q$ (див. (25)), Гельдера і включень $B_{\rho/4}(\overline{x})\subset B_{3\rho/4}(x_0)\subset B_\rho(x_0)$ означає правильність такої нерівності:

$$\begin{aligned}V(\overline{x})&\leqslant c_{10}\left(\rho^{-n}\int_{B_{\rho/4}(\overline{x})}V^{(\lambda+1)(q-1)}dx\right)^{\frac{1}{(1+\lambda)(q-1)}}\\&\quad+\frac{c_{10}}{\psi(\rho)}\left(\mathbf{W}^{f_1+f_2}_{\frac{q}{q+1},q+1}(\overline{x};\rho/2)+\mathbf{W}^{f}_{1,q}(\overline{x};\rho/2)\right)+c_{10}\rho^{\frac{q-2p}{2(q-p)}}\\&\leqslant c_{10}\left(\rho^{-n}\int_{B_\rho(x_0)}V^q dx\right)^q+\frac{c_{10}}{\psi(\rho)}\left(\mathbf{W}^{f_1+f_2}_{\frac{q}{q+1},q+1}(\rho)+\mathbf{W}^{f}_{1,q}(\rho)\right)+c_{10}\rho^{\frac{q-2p}{2(q-p)}}.\end{aligned}\tag{37}$$

Щоб оцінити інтеграл в правій частині цієї нерівності зауважимо, що функція V належить до $W^{1,q}(B_\rho(x_0))$ і має таку властивість: існує множина $G\subset B_\rho(x_0)$ і додатні сталі C' і C'' такі, що $|G|\geqslant C'\rho^n$ і $\operatorname*{ess\,sup}_G|V|\leqslant C''$. Дійсно, з огляду на (21) можемо покласти $G=G''_\rho$, якщо $|G'_\rho|\leqslant\frac{1}{2}|B_\rho(x_0)|$, і $G=G'_\rho$, якщо $|G''_\rho|\leqslant\frac{1}{2}|B_\rho(x_0)|$. Тоді, внаслідок (20), (21) і (21$'$), матимемо

$$|G|\geqslant|B_\rho(x_0)|/2\quad\text{і}\quad 0<V\leqslant\frac{2\omega(\rho)}{\frac{1}{2}\omega(\rho)+\rho^{\frac{q-2p}{2(q-p)}}+\psi(\rho)}<4\ \text{ на }\ G.$$

Для функції V із зазначеною властивістю виконується нерівність на зразок нерівності Пуанкаре (див., наприклад, [11, нерівність (7.45)], [33, гл.1, §2, Лема 4]):

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho(x_0)}V^q dx&\leqslant C\left(\rho^q\sum_{|\alpha|=1}\int_{B_\rho(x_0)}|D^\alpha V|^q dx+\rho^n\right)\\&=C\left(\rho^q\int_{B_\rho(x_0)}\left\{\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u|^q\right\}B^{-q}dx+\rho^n\right)\end{aligned}\tag{38}$$

з додатною сталою C, що залежить тільки від n, q, C' і C''. Останній інтеграл в правій частині одержаної нерівності можна оцінити наступним чином:

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(x_0)} \Big\{ \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^q \Big\} B^{-q} dx \leqslant c_{11}\rho^{n-q} \\ + \frac{c_{11}}{[\psi(\rho)]^{q-1}} \int_{B_{2\rho}(x_0)} |f| dx + \frac{c_{11}}{[\psi(\rho)]^q} \int_{B_{2\rho}(x_0)} (f_1+f_2) dx. \end{aligned} \tag{39}$$

Для цього в інтегральній тотожності (4) слід виконати підстановку

$$v = \begin{cases} B^{1-q}\zeta^q & \text{в } B_{2\rho}(x_0), \\ 0 & \text{в } \Omega \setminus B_{2\rho}(x_0), \end{cases}$$

де функція $\zeta \in C_0^\infty(B_{2\rho}(x_0))$ має такі властивості:

$$0 \leqslant \zeta \leqslant 1, \quad \zeta = 1 \text{ в } B_\rho(x_0), \quad |D^\alpha \zeta| \leqslant c_n \rho^{-|\alpha|}. \tag{40}$$

Оцінювання інтегральних доданків, що виникають під час такої підстановки, виконується на зразок [37, Лема 4.2] з використанням нерівності Юнга, (40), структурних умов (2), (3) і елементарних нерівностей:

$$\int_{B_{2\rho}(x_0)} f B^{1-q}\zeta^q dx \leqslant \frac{1}{[\psi(\rho)]^{q-1}} \int_{B_{2\rho}(x_0)} |f| dx.$$

$$\int_{B_{2\rho}(x_0)} (f_1+f_2) B^{-q}\zeta^q dx \leqslant \frac{1}{[\psi(\rho)]^{q}} \int_{B_{2\rho}(x_0)} (f_1+f_2) dx.$$

Поєднання оцінок (37), (38), (39), нерівності (19) і елементарних нерівностей

$$\left(\rho^{q-n} \int_{B_{2\rho}(x_0)} (f_1+f_2) dx\right)^{1/q} \leqslant 2^{n/q} \mathbf{W}^{f_1+f_2}_{\frac{q}{q+1},q+1}(x_0;4\rho),$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho^{q-n}}{[\psi(\rho)]^{q-1}} \int_{B_{2\rho}(x_0)} |f| dx\right)^{1/q} \\ \leqslant 1 + \frac{1}{\psi(\rho)} \left(\rho^{q-n} \int_{B_{2\rho}(x_0)} |f| dx\right)^{1/(q-1)} \leqslant 1 + \frac{2^{\frac{n-1}{q-1}}}{\psi(\rho)} \mathbf{W}^f_{1,q}(x_0;4\rho), \end{aligned}$$

з урахуванням (10) і довільного вибору Лебегової точки $\overline{x} \in B_{\rho/2}(x_0)$ функції V, дає

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_{\rho/2}(x_0)} V \leqslant c_{12} + \frac{c_{12}}{\psi(\rho)} \left(\mathbf{W}^{f_1+f_2}_{\frac{q}{q+1},q+1}(4\rho) + \mathbf{W}^f_{1,q}(4\rho) \right) \leqslant c_{13}.$$

З одержаної нерівності та з означення функції V (див. рівність (21)) випливає, що для кожного $\rho \in (0, R]$ виконується нерівність:

$$\omega(\rho/2) \leqslant \frac{c_{13}-1}{c_{13}} \omega(\rho) + \rho^{\frac{q-2p}{2(q-p)}} + \psi(\rho).$$

Тепер твердження Теореми 1 є простим наслідком одержаного співвідношення і відомої ітераційної леми (див., наприклад, [11, Лема 8.23]).

Доведення Теореми 1 завершено. □

Цитована література

1. *Adams D.R., Hedberg L.I.* Function Spaces and Potential Theory, in: Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 314. – Springer-Verlag, Berlin. – 1996.
2. *Alberico A., Ferone V.* Regularity properties of solutions of elliptic equations in $\mathbb{R}^2$ in limit cases // Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. – 1995. – 6, No. 4. – P. 237–250.
3. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of operators. – Academic Press, Boston. – 1988.
4. *Bonafede S., Voitovych M.V.* Hölder continuity up to the boundary of solutions to nonlinear fourth-order elliptic equations with natural growth terms // Differ. Equ. Appl. – 2019. – 11, No. 1. – P. 107–127.
5. *Брело М.* Основы классической теории потенциала. – М.: Мир. – 1964.
6. *D'Asero S., Cataldo V., Nicolosi F.* Regularity of minimizers of some integral functionals with degenerate integrands // Nonlinear Anal. – 2008. – 68, No. 11. – P. 3283–3293.
7. *De Giorgi E.* Selected papers. – Springer-Verlag, Berlin. – 2006.
8. *Duzaar F., Mingione G.* Gradient continuity estimates // Calc. Var. Partial Differential Equations. –2010. – 39, No. 3-4. – P. 379–418.
9. *Ferone V., Fusco N.* Continuity properties of minimizers of integral functionals in a limit case // J. Math. Anal. Appl. – 1996. – 202, No. 1. – P. 27–52.
10. *Frehse J.* On the boundedness of weak solutions of higher order nonlinear elliptic partial differential equations // Boll. Un. Mat. Ital. – 1970. – 3, No. 4. – P. 607–627.
11. *Gilbarg D., Trudinger N.S.* Elliptic partial differential equations of second order. – Berlin: Springer-Verlag. – 1983.
12. *Hedberg L.I., Wolff T.H.* Thin sets in nonlinear potential theory // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). – 1983. – 33, No. 4. – P. 161–187.
13. *Helms L.L.* Potential theory. Second edition. – Universitext. Springer, London. – 2014.
14. *Jiang R., Koskela P., Yang D.* Continuity of solutions to n-harmonic equations // Manuscripta Math. – 2012. – 139, No. 1–2. – P. 237–248.
15. *Kilpeläinen T., Malý J.* The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations // Acta Math. – 1994. – 172, No. 1. – P. 137–161.
16. *Ковалевский А.А.* Энтропийные решения задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка с L^1-правыми частями // Изв. РАН. Сер. матем. – 2001. – 65, No. 2. – P. 27–80.
17. *Kovalevsky A., Nicolosi F.* Boundedness of solutions of variational inequalities with nonlinear degenerated elliptic operators of high order // Appl. Anal. – 1997. – 65. – P. 225–249.
18. *Kovalevsky A., Nicolosi F.* On regularity up to the boundary of solutions to degenerate nonlinear elliptic high-order equations // Nonlinear Anal. – 2000. – 40, No. 1–8. – P. 365–379.
19. *Ковалевский А.А., Войтович М.В.* О повышении суммируемости обобщенных решений задачи Дирихле для нелинейных уравнений четвертого порядка с усиленной эллиптичностью // Укр. мат. журн. – 2006. – 58, № 11. – С. 1511–1524.
20. *Kovalevsky A.A., Skrypnik I.I., Shishkov A.E.* Singular solutions of nonlinear elliptic and parabolic equations. – Berlin/Boston: Walter de Gruyter GmbH. – 2016.
21. *Kuusi T., Mingione G.* Guide to nonlinear potential estimates // Bull. Math. Sci. – 2014. – 4, No. 1. – P. 1–82.
22. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – Москва, Наука. – 1973.
23. *Malý J., Ziemer W.P.* Fine Regularity of Solutions of Elliptic Partial Differential Equations, in: Math. Surveys and Monogr., vol. 15. – American Math. Soc., Providence, RI. – 1997.

24. *Мазья В.Г.* Примеры нерегулярных решений квазилинейных эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами // Функц. анализ и его прил. – 1968. – 2, № 3. – С. 53–57.
25. *Мазья В.Г., Хавин В.П.* Нелинейная теория потенциала // Успехи матем. наук. – 1972. – 27, No. 6(168). – С. 67–138.
26. *Mingione G.* Regularity of minima: an invitation to the dark side of the calculus of variations // Appl. Math. – 2006. – 51, No. 4. – С. 355–426.
27. *Moser J.* A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations // Comm. Pure Appl. Math. – 1960. – 13. – P. 457–468.
28. *Moser J.* On Harnack's theorem for elliptic differential equations // Comm. Pure Appl. Math. – 1961. – 14. – P. 577–591.
29. *Nicolosi F., Skrypnik I.V.* Nirenberg–Gagliardo interpolation inequality and regularity of solutions of nonlinear higher order equations // Topol. Methods Nonlinear Anal. – 1996. – 7, No. 2. – P. 327–347.
30. *Nicolosi F., Skrypnik I.V.* On Harnack type theorems for nonlinear higher order elliptic equations // Nonlinear Anal. – 2002. – 50, No. 1. – P. 129–147.
31. *Rakotoson J.M., Ziemer W.P.* Local behavior of solutions of quasilinear elliptic equations with general structure // Trans. Amer. Math. Soc. – 1990. – 139, No. 2. – P. 747–764.
32. *Скрыпник И.В.* Условие регулярности обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений высшего порядка // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1973. – 37, № 6. – Р. 1376–1427.
33. *Скрыпник И.В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. – Киев, Наукова думка. – 1973.
34. *Скрыпник И.В.* О квазилинейных эллиптических уравнениях высшего порядка с непрерывными обобщенными решениями // Дифференц. уравнения. – 1978. – 14, № 6. – С. 1104–1118.
35. *Скрыпник И.В.* Регулярность граничной точки для квазилинейного эллиптического уравнения высшего порядка // Тр. МИАН. – 1991. – 200. – С. 310–321.
36. *Skrypnik I.I., Voitovych M.V.* $\mathfrak{B}_1$ classes of De Giorgi, Ladyzhenskaya and Ural'tseva and their application to elliptic and parabolic equations with nonstandard growth // Ukr. Mat. Visn. – 2019. – 16, No. 3. – P. 403–446.
37. *Voitovych M. V.* Hölder continuity of bounded generalized solutions for nonlinear fourth-order elliptic equations with strengthened coercivity and natural growth terms // Electron. J. Differential Equations. – 2017. – 2017, No. 63. – P. 1–18.
38. *Voitovych M.V.* Pointwise estimates of solutions to $2m$-order quasilinear elliptic equations with m-(p,q) growth via Wolff potentials // Nonlinear Anal. – 2019. – 181. – P. 147–179.
39. *Widman K.-O.* Local bounds for solutions of higher order nonlinear elliptic partial differential equations // Math. Z. – 1971. – 121, No. 1. – P. 81–95.

References

1. Adams, D.R., Hedberg, L.I. (1996). Function Spaces and Potential Theory, in: *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 314*, Springer-Verlag, Berlin.
2. Alberico, A., Ferone, V. (1995). Regularity properties of solutions of elliptic equations in $\mathbb{R}^2$ in limit cases. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, *6*(4), 237-250.
3. Bennett, C., Sharpley, R. (1988). *Interpolation of operators.* Academic Press, Boston.
4. Bonafede, S., Voitovych, M.V. (2019). Hölder continuity up to the boundary of solutions to nonlinear fourth-order elliptic equations with natural growth terms. *Differ. Equ. Appl.*, *11*(1), 107-127.
5. Brelot, M. (1965). *Éléments de la théorie classique du potentiel.* 3e édition. Les cours de Sorbonne. 3e cycle. Centre de Documentation Universitaire, Paris.
6. D'Asero, S., Cataldo, V., Nicolosi, F. (2008) Regularity of minimizers of some integral functionals with degenerate integrands. *Nonlinear Anal., 68*(11), 3283-3293.
7. De Giorgi, E. (2006). *Selected papers.* Springer-Verlag, Berlin.
8. Duzaar, F., Mingione, G. (2010). Gradient continuity estimates. *Calc. Var. Partial Differential*

Equations, 39(3-4), 379-418.
9. Ferone, V., Fusco, N. (1996). Continuity properties of minimizers of integral functionals in a limit case. *J. Math. Anal. Appl., 20*(1), 27-52.
10. Frehse, J. (1970). On the boundedness of weak solutions of higher order nonlinear elliptic partial differential equations. *Boll. Un. Mat. Ital., 3*(4), 607-627.
11. Gilbarg, D., Trudinger, N.S. (1983). *Elliptic partial differential equations of second order*. Berlin: Springer-Verlag.
12. Hedberg, L.I., Wolff, T.H. (1983). Thin sets in nonlinear potential theory. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 33*(4), 161–187.
13. Helms, L.L. (2014). *Potential theory.* Second edition. Universitext. Springer, London.
14. Jiang, R., Koskela, P., Yang, D. (2012). Continuity of solutions to n-harmonic equations. *Manuscripta Math., 139*(1-2), 237-248.
15. Kilpeläinen, T., Malý, J. (1994). The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations. *Acta Math., 172*(1), 137-161.
16. Kovalevskii, A.A. (2001). Entropy solutions of the Dirichlet problem for a class of non-linear elliptic fourth-order equations with right-hand sides in L^1. *Izv. Math., 65*(2), 231-283.
17. Kovalevsky, A., Nicolosi, F. (1997). Boundedness of solutions of variational inequalities with nonlinear degenerated elliptic operators of high order. *Appl. Anal., 65*, 225-249.
18. Kovalevsky, A., Nicolosi, F. (2000). On regularity up to the boundary of solutions to degenerate nonlinear elliptic high-order equations. *Nonlinear Anal., 40*(1-8), 365-379.
19. Kovalevskii, A.A., Voitovich, M.V. (2006). On the improvement of summability of generalized solutions of the Dirichlet problem for nonlinear equations of the fourth order with strengthened ellipticity. *Ukr. Mat. Zh., 58*(11), 1511-1524.
20. Kovalevsky, A.A., Skrypnik, I.I., Shishkov, A.E. (2016). *Singular solutions of nonlinear elliptic and parabolic equations*. Berlin/Boston: Walter de Gruyter GmbH.
21. Kuusi, T., Mingione, G. (2014). Guide to nonlinear potential estimates. *Bull. Math. Sci., 4*(1), 1-82.
22. Ladyzhenskaya, O.A., Ural'tseva, N.N. (1973). *Linear and quasilinear elliptic equations*. Nauka, Moscow.
23. Malý, J., Ziemer, W.P. (1997). Fine Regularity of Solutions of Elliptic Partial Differential Equations, in: *Math. Surveys and Monogr., vol. 15*. American Math. Soc., Providence, RI.
24. Maz'ya, V.G. (1968). Examples of nonregular solutions of quasilinear elliptic equations with analytic coefficients. *Funct. Anal. Appl., 2*(3), 230-234.
25. Maz'ya, V.G., Havin, V.P. (1972). Non-linear potential theory. *Russian Math. Surveys, 27*(6), 71-148.
26. Mingione, G. (2006). Regularity of minima: an invitation to the dark side of the calculus of variations. *Appl. Math., 51*(4), 355-426.
27. Moser, J. (1960). A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. *Comm. Pure Appl. Math., 13*, 457-468.
28. Moser, J. (1961). On Harnack's theorem for elliptic differential equations. *Comm. Pure Appl. Math., 14*, 577-591.
29. Nicolosi, F., Skrypnik, I.V. (1996). Nirenberg–Gagliardo interpolation inequality and regularity of solutions of nonlinear higher order equations. *Topol. Methods Nonlinear Anal., 7*(2), 327-347.
30. Nicolosi, F., Skrypnik, I.V. (2002). On Harnack type theorems for nonlinear higher order elliptic equations. *Nonlinear Anal., 50*(1), 129-147.
31. Rakotoson, J.M., Ziemer, W.P. (1990). Local behavior of solutions of quasilinear elliptic equations with general structure. *Trans. Amer. Math. Soc., 319*(2), 747-764.
32. Skrypnik, I.V. (1973). A regularity condition for generalized solutions of higher-order quasilinear elliptic equations. *Math. USSR-Izv., 7*(6), 1371-1421.
33. Skrypnik, I.V. (1973). *Nonlinear higher order elliptic equations.* Naukova dumka, Kiev (in Russian).
34. Skrypnik, I.V. (1978). Higher order quasilinear elliptic equations with continuous generalized solutions. *Differentsial'nye Uravneniya, 14*(6), 1104-1118 (in Russian).
35. Skrypnik, I.V. (1993). Regularity of a boundary point for a quasi-linear elliptic equation of higher

order. *Proc. Steklov Inst. Math., 200*, 339-351.
36. Skrypnik, I.I., Voitovych, M.V. (2019). $\mathfrak{B}_1$ classes of De Giorgi, Ladyzhenskaya and Ural'tseva and their application to elliptic and parabolic equations with nonstandard growth. *Ukr. Mat. Visn., 16*(3), 403-446.
37. Voitovych, M.V. (2017). Hölder continuity of bounded generalized solutions for nonlinear fourth-order elliptic equations with strengthened coercivity and natural growth terms. *Electron. J. Differential Equations, 2017*(63), 1-18.
38. Voitovych, M.V. (2019). Pointwise estimates of solutions to $2m$-order quasilinear elliptic equations with m-(p, q) growth via Wolff potentials. *Nonlinear Anal., 181*, 147-179.
39. Widman K.-O. (1971). Local bounds for solutions of higher order nonlinear elliptic partial differential equations. *Math. Z., 121*(1), 81-95.

M.V. Voitovych

Continuity of weak solutions to nonlinear fourth-order equations with strengthened ellipticity via Wolff potentials.

In the present article nonlinear fourth-order equations in the divergence form with L^1-right-hand sides and the strengthened ellipticity condition on the coefficients are analyzed. Such equations, but with sufficiently regular right-hand sides, first appeared in the works of Professor I.V. Skrypnik concerning the regularity of generalized solutions for multidimensional nonlinear elliptic equations of high order. This class of equations correctly generalizes the corresponding nonlinear second-order elliptic equations with non-standard growth conditions on the coefficients, which are models for numerous physical phenomena in non-homogeneous medium. The main result of the article is a theorem on an estimation of oscillations in a ball of solutions to the given equations via the Wolff potentials of their right-hand sides. To prove this, we use the improved Kilpeläinen-Malý method and pointwise potential estimates of functions related to special subclasses of Sobolev spaces, akin to the well-known De Giorgi classes. A new point is the verification that these classes contain superpositions of solutions and Moser logarithmic functions that include the Wolf potential of the right-hand side of the equation. As a corollary, a new result is obtained on the interior continuity of solutions to the equations with right-hand sides from the Kato class, which is characterized by the uniform convergence to zero of the corresponding Wolff potentials. Some important cases of fulfilling this condition are considered: the right-hand side of the equation belongs to the Morrey space with an index exceeding a certain limiting value, then the solutions are locally Hölder continuous; if the right-hand side belongs to the borderline Lorentz-Zygmund classes, then the solutions are only locally continuous, but they are not Hölder continuous in the domain. In the case when the summability exponents of the right-hand sides of the equations under consideration are less than the borderline values, there are examples of unbounded discontinuous solutions. These facts are exact analogues of the corresponding results in the theory of second-order elliptic equations.

Keywords: *nonlinear elliptic equations, weak solutions, continuity, Wolff potential, Kato class.*

Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ
`voitovichmv76@gmail.com`

Отримано 02.12.19