УДК 517.5
DOI: 10.37069/1683-4720-2019-33-4

©2019. **С.В. Волков, В.І. Рязанов**

ПРО ВІДОБРАЖЕННЯ СКІНЧЕННОГО СПОТВОРЕННЯ ДОВЖИНИ НА РИМАНОВИХ ПОВЕРХНЯХ

У статті, в термінах дилатацій, доведено ряд критеріїв для неперервного і гомеоморфного продовження на границю відображень скінченного спотворення довжини між областями на ріманових поверхнях. Ця робота є продовженням наших попередніх статей [1] і [2], в яких можна знайти короткий історичний огляд та обговорення основних означень. Зазначені роботи були присвячені теорії граничної поведінки відображень зі скінченним спотворенням за Іванцем на ріманових поверхнях, які спершу були визначені на площині в роботі [3], а після узагальнені на $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, в монографії [4]. В даній статті розвивається теорія граничної поведінки на ріманових поверхнях, так званих, відображень зі скінченним спотворенням довжини, що були вперше визначені в роботі [5] в контексті $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, див. також главу 8 монографії [6]. Як було показано в роботах [7] і [8], такі відображення, взагалі кажучі, не є відображеннями зі скінченним спотворенням за Іванцем, оскільки їх перші часткові похідні можуть бути локально не інтегровані. В той же час, цей клас є узагальненням відомого класу відображень з обмеженим спотворенням довжини за Вяйсяля–Мартіо з роботи [9]. Крім того, в цей клас входять в якості підкласу так звані скінченно біліпшицеві відображення, введені в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ в роботі [10], див. секцію 10.6 в [6], які в свою чергу є узагальненням добре відомих класів біліпшицевих відображень, а також ізометрій та квазіізометрій. При дослідженні локальної та граничної поведінки відображень зі скінченним спотворенням довжини в $\mathbb{R}^n$ ключовим фактором було те, що вони задовольняли деяким модульним нерівностям, які сприяли розгляду більш ширших класів відображень, див., наприклад, статті [5, 11, 12] та монографію [6]. Тому природньо, що при дослідженні відображень зі скінченним спотворенням на ріманових поверхнях ми розпочнемо із встановлення відповідних модульних нерівностей, які будуть слугувати для нас основним інструментом при вивченні граничної поведінки таких відображень.

Ключові слова: *ріманові поверхні, гранична поведінка, неперервне і гомеоморфне продовження, відображення скінченного спотворення довжини, сильно досяжні і слабо плоскі границі.*

Присвячується 100-річчю від дня народження Георгія Дмитровича Суворова

1. Означення та попередні зауваження.

В подальшому, ми завжди будемо вважати, що всі відображення, які ми розглядатимемо, є неперервними.

Почнемо з основних визначень роботи [5], адаптованих до випадку областей D в комплексній площині $\mathbb{C}$, див. також главу 8 монографії [6]. Будемо казати, що відображення $f : D \to \mathbb{C}$ – **скінченного метричного спотворення**, пишемо $f \in \mathbf{FMD}$, якщо f володіє (N)–властивістю Лузіна відносно площі та

$$0 \,<\, l(z,f) \,\leqslant L(z,f) \,<\, \infty \quad \text{м.в.}\,, \tag{1}$$

Робота частково підтримана грантом Міністерства освіти і науки України, номер проекту 0119U100421.

де

$$l(z,f) \ := \ \liminf_{\zeta\to z, \zeta\in D} \frac{|f(\zeta)-f(z)|}{|\zeta - z|}\ , \quad L(z,f) \ := \ \limsup_{\zeta\to z, \zeta\in D} \frac{|f(\zeta)-f(z)|}{|\zeta - z|}\ . \qquad (2)$$

Далі кажемо, що відображення $f : D \to \mathbb{C}$ володіє **(L)–властивістю**, якщо для м.в. шляхів γ в D шлях $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ локально спрямляється та $f|_\gamma$ володіє (N)–властивістю Лузіна відносно міри довжини. Нагадаємо, що шлях γ в D є відображенням $\gamma : \Delta \to D$, де Δ – інтервал в $\mathbb{R}$. При цьому кажуть, що деяка властивість має місце для майже всіх **(м.в.)** шляхів, якщо шляхи з порушенням цієї властивості утворюють сімейство нульового конформного модуля, див., наприклад, означення в нашій попередній роботі [1], формули (6) і (7).

Кажемо також, що гомеоморфізм f між двома областями D та D^* в $\mathbb{C}$ – **скінченного спотворення довжини**, пишемо $f \in \mathbf{FLD}$, якщо $f \in$ FMD і при цьому, f та f^{-1} володіють (L)–властивістю. Прикладами таких відображень можуть слугувати **скінченно біліпшицеві** гомеоморфізми, що задовольняють умові (1) всюди, а не тільки м.в., див. теорему 5.7 в статті [13] або теорему 10.11 в монографії [6]. Частинним випадком останніх виступають **біліпшицеві** гомеоморфізми, для яких величини в (1) рівномірно в області D відділені як від нуля, так і від нескінченності. Таким чином, гомеоморфізми скінченного спотворення довжини є далекосяжним узагальненням ізометрій та квазіізометрій.

Зауваження 1. За теоремою 6.10 в [5] або теоремою 8.6 в [6], гомеоморфізми $f \in$ FLD між областями D та D^* в $\mathbb{C}$ задовольняють модульній нерівності

$$M(f\Gamma) \ \leqslant \ \int\limits_D Q(z)\cdot\rho^2(z) \ dm(z) \qquad (3)$$

з $Q = K_f$ для будь-якого сімейства Γ шляхів γ в D і $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. Для визначення дилатації K_f, конформного модуля M сімейства Γ та допустимих ρ, див. [1].

Гомеоморфізми f між областями D та D^* в комплексній площині $\mathbb{C}$, що задовольняють умові (3), прийнято називати **Q–гомеоморфізмами**, див. статті [11] та [12], а також глави 5 та 6 монографії [6]. З огляду на зауваження 1, ці гомеоморфізми представляють собою ще більш широкий клас відображень ніж гомеоморфізми скінченного спотворення довжини.

Перейдемо до відповідних означень на риманових поверхнях. Нехай тепер f – гомеоморфізм між областями D та D^* на риманових поверхнях $\mathbb{S}$ та $\mathbb{S}^*$. Перш за все кажемо, що f є відображенням **скінченного спотворення довжини**, пишемо $f \in \mathbf{FLD}$, якщо f є таким в картах $\mathbb{S}$ та $\mathbb{S}^*$. З огляду на властивості конформних відображень, а саме, властивостей (N)–Лузіна відносно площи та довжини, а також збереження локального спрямлення шляхів, див., наприклад, теорему 5.6 в монографії [14], визначення не залежить від вибору карт. В подальшому також будемо говорити, що f є **локальним Q–гомеоморфізмом** для деякої вимірюваної функції $Q : D \to (0, \infty)$, якщо умова (3) виконується для будь-якого сімейства шляхів Γ в $D \cap U$ для карт U риманової поверхні $\mathbb{S}$, що є околами точок $p \in \overline{D}$.

Зауваження 2. Як відомо, якщо функція $\rho : V \to [0,\infty]$ є допустимою для деякого сімейства $\mathcal{A}$ шляхів α в відкритій множині V комплексної площини $\mathbb{C}$, то функція $\rho^*(\zeta) = \rho(\varphi^{-1}(\zeta))/|\varphi'(\varphi^{-1}(\zeta))|$ є допустимою для сімейства шляхів $\mathcal{B} := \varphi\mathcal{A}$ шляхів $\beta := \varphi \circ \alpha$ при будь-якому конформному відображенні $\varphi : V \to \mathbb{C}$, див. ще раз теорему 5.6 в монографії [14]. Таким чином, права частина в (3) конформно інваріантна, оскільки якобіан конформного відображення $\varphi(z)$ рівний $|\varphi'(z)|^2$.

Пропозиція 1. *Будь-який гомеоморфізм f скінченного спотворення довжини між областями D та D^* на риманових поверхнях $\mathbb{S}$ та $\mathbb{S}^*$, відповідно, є локальним Q–гомеоморфізмом з $Q = K_f$.*

Доведення. Нехай $g : U \to \mathbb{C}$ карта риманової поверхні $\mathbb{S}$, яка є околом довільної точки $p \in \overline{D}$. Оскільки простір $\mathbb{S}$ сепарабельний, відкрита множина $D \cap U$ складається зі зліченої кількості компонент U_k, кожна з яких конформно еквівалентна плоским областям $V_k := g(U_k)$. Таким чином, області $U_k^* := f(U_k)$ гомеоморфні плоским областям V_k і, як наслідок, за загальним принципом Кьобе, див., наприклад, [15], с. 48, конформно еквівалентні цим областям.

Відмітимо також, що сімейство шляхів Γ розбивається на злічений набір сімейства шляхів Γ_k, що попарно не перетинаються, і лежать в областях U_k. Тому сімейство шляхів $\Gamma^* := f\Gamma$ розбивається на злічений набір сімейства шляхів $\Gamma_k^* := f\Gamma_k$, що попарно не перетинаються, і лежать в областях U_k^*, тобто, таких, що лежать у відповідних картах риманової поверхні $\mathbb{S}^*$. Таким чином, за зауваженням 1 роботи [1] та за зауваженням 1 і 2 даної роботи, отримаємо необхідний висновок.

2. Основна лема.

В подальшому, $\Delta(E,F;\Omega)$ для множин E, F і Ω на римановій поверхні $\mathbb{S}$ означає сімейство кривих $\gamma : [a,b] \to \mathbb{S}$, які з'єднують множини E і F в Ω, тобто $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in \Omega$ при $a < t < b$. Нагадаємо також, що фактор-простір $\mathbb{D}/G$ одиничного кола $\mathbb{D}$ по дискретній групі G без нерухомих точок є римановою поверхнею з картами з проекції $\pi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}/G$, див., наприклад, теорему 6.2.1 в [16].

Лема 1. *Нехай G – дискретна група дробово-лінійних відображень $\mathbb{D}$ на себе без нерухомих точок, $f : D \to D^*$ – гомеоморфізм скінченного спотворення довжини між областями D та D^* на риманових поверхнях $\mathbb{D}/G$ та $\mathbb{S}^*$. Тоді*

$$M\left(\Delta\left(fC_1, fC_2; fA\right)\right) \leqslant \int\limits_{A\cap D} K_f(p)\cdot\ \xi^2(h(p,p_0))\ dh(p) \qquad \forall\ p_0 \in \overline{D} \tag{4}$$

для будь-яких кілець $A = A(p_0, R_1, R_2) = \{p \in \mathbb{D}/G : R_1 < h(p,p_0) < R_2\}$, кіл $C_1 = \{z \in \mathbb{D}/G :\ h(p,p_0) = r_1\}$, $C_2 = \{p \in \mathbb{D}/G :\ h(p,p_0) = r_2\}$, $0 < R_1 < R_2 < \varepsilon(p_0)$, і, для будь-яких вимірних функцій $\xi : (R_1, R_2) \to [0,\infty]$, таких, що

$$\int\limits_{R_1}^{R_2} \xi(R)\ dR \geqslant\ 1\ , \tag{5}$$

і проекція $\pi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}/G$ *конформна на крузі* $\{z \in \mathbb{D} : h(z, z_0) < \varepsilon(p_0)\}$, $p_0 = \pi(z_0)$.

Доведення. Як обговорювалось в секції 2 роботи [1], тут ми ототожнюємо поверхню $\mathbb{D}/G$ з фундаментальною множиною F в $\mathbb{D}$ для G з метрикою d, визначеною (2.10) в [1], яка містить фундаментальний многокутник Пуанкаре D_{z_0} для G з центром в точці $z_0 \in \mathbb{D}$, орбіта якої G_{z_0} і є p_0. Без обмежень загальності, будемо рахувати $z_0 = 0$. Це досягається за рахунок дробово-лінійного відображення $\mathbb{D}$ на себе $g_0(z) = (z - z_0)/(1 - z\overline{z_0})$, що переводить точку z_0 в початок координат. Переходячи до нової групи G_0, отримаємо риманову поверхню $\mathbb{D}/G_0$, яка будет конформно еквівалентною $\mathbb{D}/G$, а всі величини й умови в лемі 1 конформно інваріантні. Оберемо $\varepsilon(p_0) \in (0, \delta_0)$ настільки малими, щоб при $d(0, z) \leqslant \varepsilon(p_0)$ виконувалась рівність $d(0, z) = h(0, z)$, де $\delta_0 \ = \ \min\left[\inf\limits_{\zeta \in \partial D_0} d(0,\,\zeta),\ \sup\limits_{z \in D} d(0,\,z)\right]$.

Відмітимо, що за визначенням гіперболічної метрики, див., напр., (11) в [1],

$$R \ := \ h(0, z) \ = \ \log\, \frac{1+r}{1-r}\ , \qquad \text{где} \qquad r \ := \ |z|\ ,$$

і, відповідно,

$$dR \ = \ \frac{2dr}{1-r^2}\ , \qquad r \ = \ \frac{e^R - 1}{e^R + 1}\ ,$$

$$A = \{z \in \mathbb{D} : r_1 < |z| < r_2\}\ , \quad C_1 = \{z \in \mathbb{D} : |z| = r_1\}\ , \quad C_2 = \{z \in \mathbb{D} : |z| = r_2\}\ ,$$

$$r_1 \ := \ \frac{e^{R_1} - 1}{e^{R_1} + 1}\ , \quad r_2 \ := \ \frac{e^{R_2} - 1}{e^{R_2} + 1}\ .$$

Як наслідок,

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\ dr \geqslant \ 1\ , \qquad \text{де} \qquad \eta(r) \ = \ \frac{2}{1-r^2} \cdot\ \xi\left(\log\, \frac{1+r}{1-r}\right)\ ,$$

тому функція $\rho(z) \ := \ \eta(|z|)$, $z \ \in \ A$, є допустимою для зазначеного сімейства шляхів, якщо її продовжити нулем поза A і D. Крім того,

$$\int\limits_{A \cap D} K_f(z) \cdot\ \xi^2(h(z, z_0))\ dh(z) \ = \ \int\limits_{A \cap D} K_f(z) \cdot\ \eta^2(|z|)\ dm(z)\ , \tag{6}$$

де елемент площі $dm(z) \ := \ dx\,dy$ відповідає мірі Лебега на площині $\mathbb{C}$. Таким чином, висновок леми випливає з пропозиції 1.

Зауваження 3. За теоремою уніформізації Клейна–Пуанкаре, див. II.3 в [1], а також 7.4 в [17], будь-яка риманова поверхня $\mathbb{S}$ конформно еквівалентна фактор-простору одиничного круга $\mathbb{D}$ за дискретною групою G без нерухомих точок, за виключенням найпростіших випадків, коли $\mathbb{S}$ конформно еквівалентна $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, кільцю або тору.

У випадку тора, $\mathbb{S}$ конформно еквівалентна фактор-простору $\mathbb{C}/G$ за групою G зсувів з двома генераторами $z \to z + \omega_1$ і $z \to z + \omega_2$, де ω_1 і $\omega_2 \in \ \mathbb{C} \setminus \{0\}$ і

$\mathrm{Im}\ \omega_1/\omega_2 > 0$. В цьому випадку, фундаментальна область F є паралелограмом зі сторонами паралельними ω_1 та ω_2, після склейки протилежних сторін якого і отримується тор. Оскільки Евклідові відстані і площі інваріантні відносно зсувів, то метрика і площа на поверхні $\mathbb{C}/G$ в малому також співпадають з Евклідовим.

Таким чином, за пропозицією 1 відношення (4) має місце для всіх вказаних особливих випадків з Евклідовим відстаням і площею замість гіперболічних. Хоча, зберігаємо теж позначення для універсальності.

3. Про продовження на границю обернених відображень.

Тут і далі розуміємо, що дилатація K_f продовжена нулем поза D і $\mathbb{S}$, пишемо $K_f \in L^1_{\mathrm{loc}}$, якщо K_f локально інтегрується в картах $\mathbb{S}$. Будемо також казати як і в роботі [1], що гомеоморфізм $f : D \to D^*$ між областями D та D^* в компактифікаціях Керекьярто-Стоілова $\overline{\mathbb{S}}$ та $\overline{\mathbb{S}^*}$ є **відображенням зі скінченним спотворенням довжини**, пишемо $f \in \mathbf{FLD}$, якщо ця властивість має місце для його звуження в $\mathbb{S}$. Нагадаємо, що гомеоморфізм між областями в $\mathbb{S}$ та $\mathbb{S}^*$ завжди продовжується до гомеоморфізму між відповідними областями в $\overline{\mathbb{S}}$ та $\overline{\mathbb{S}^*}$.

Наступна лема є основною при дослідженні проблеми неперервного продовження обернених відображень f^{-1} для $f \in \mathrm{FLD}$ на границю.

Лема 2. *Нехай $\mathbb{S}$ та $\mathbb{S}^*$ – риманові поверхні, D та D^* – області в $\overline{\mathbb{S}}$ і $\overline{\mathbb{S}^*}$, відповідно, $\partial D \subset \mathbb{S}$ і $\partial D^* \subset \mathbb{S}^*$, і ∂D^* – слабо плоска. Якщо $f : D \to D^*$ – гомеоморфізм зі скінченним спотворенням довжини і $K_f \in L^1_{\mathrm{loc}}$, тоді в точках p_1 і $p_2 \in \partial D$, $p_1 \neq p_2$, локальної зв'язності області D*

$$C(p_1, f) \cap C(p_2, f) = \varnothing\ , \tag{7}$$

де $C(p_0, f)$ для будь-якої точки $p_0 \in \partial D \subset \mathbb{S}$ означає множину точок накопичення $f(p)$ при $p \to p_0$ на римановій поверхні $\mathbb{S}^*$.

Доведення. Згідно зауваження 3, ми можемо обмежитись випадком поверхонь гіперболічного типу. Відмітимо також, що ∂D та ∂D^* мають околи, які не містять жодних граничних елементів поверхонь $\mathbb{S}$ і $\mathbb{S}^*$ з моделі Керекьярто-Стоілова, оскільки $\partial D \subset \mathbb{S}$ і $\partial D^* \subset \mathbb{S}^*$.

Нехай $E_i = C(p_i, f)$, $i = 1, 2$. Тоді з наслідку 1 статті [1] $E_i \subseteq \partial D^*$, $i = 1, 2$. Допустимо, що $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$ і нехай $p_* \in E_1 \cap E_2$.

Позначимо через δ число $\varepsilon(p_1)$ з леми 1. Так як область D локально зв'язна в точках p_1 і p_2, існують їх відкриті околи U_1 і U_2 в $\mathbb{S}$, відповідно, такі, що $W_1 = D \cap U_1$ і $W_2 = D \cap U_2$ є областями, а також $U_1 \subset B(p_1,\, \delta/3)$ і $U_2 \subset \mathbb{S} \setminus B(p_1,\, 2\delta/3)$. Тоді за нерівністю трикутника $h(W_1,\, W_2) \geqslant \delta/3$. Розглянемо функцію

$$\xi(t) = \begin{cases} 3/\delta, & t \in (\delta/3,\, 2\delta/3), \\ 0, & t \notin (\delta/3,\, 2\delta/3). \end{cases}$$

Зрозуміло, що $\int\limits_{\delta/3}^{2\delta/3} \xi(t)\, dt = 1$ й за принципом мінорирування та лемою 1 для будь-яких континумів $C_1 \subset W_1$ і $C_2 \subset W_2$:

$$M(f(\Delta(C_1,C_2,D))) \ \leqslant \int\limits_{A(p_1,\delta/3,2\delta/3)} K_f(p)\cdot\ \xi^2(h(p,p_1))\ dh(p)\ \leqslant$$

$$\leqslant\ \frac{3^2}{\delta^2}\int\limits_{A(p_1,\delta/3,2\delta/3)} K_f(p)\ dh(p)\ <\ \infty\ ,$$

так як $K_f \in\ L^1(A)$, де $A = A(p_1, \delta/3, 2\delta/3)$ та припускається, що K_f продовжена нулем поза D.

Проте, ця оцінка протиречить умові, що ∂D^* є слабо плоскою. Дійсно, $p_* \in E_1 \cap E_2\ \subseteq\ \overline{fW_1} \cap \overline{fW_2}$ і тоді в областях $W_1^* = fW_1$ і $W_2^* = fW_2$ знайдеться по неперервній кривій, що перетинає будь-які наперед задані кола $\partial B(p_*, r_0)$ і $\partial B(p_*, r_*)$ з достатньо малими радіусами r_0 і r_*. Таким чином, припущення, що $E_1 \cap\ E_2 \neq \varnothing$ було хибним.

На відміну від прямих відображень, див. наступну секцію, має місце простий критерій для продовження обернених відображень на границю.

Теорема 1. *Нехай $\mathbb{S}$ і $\mathbb{S}^*$ – риманові поверхні, D та D^* – області в $\overline{\mathbb{S}}$ та $\overline{\mathbb{S}^*}$, відповідно, $\partial D \subset \mathbb{S}$ і $\partial D^* \subset \mathbb{S}^*$, D локально звя'зна на границі і ∂D^* – слабо плоска. Якщо $f : D \to D^*$ – гомеоморфізм зі скінченним спотворенням довжини і $K_f \in L^1_{\mathrm{loc}}$, то f^{-1} продовжується за неперервністю в $\overline{D^*}$.*

Доведення. За теоремою Урисона $\overline{\mathbb{S}}$ є простір з можливістю визначення метрики, див., наприклад, теорему 22.II.1 в [18]. Тому компактність $\overline{\mathbb{S}}$ еквівалентна секвенціальній компактності, див., наприклад, зауваження 41.I.3 в [19]. Отже, гранична множина $C(p_*, f^{-1})$ не пуста для будь-якої точки $p_* \in \partial D^*$ з огляду секвенціальної компактності $\overline{\mathbb{S}}$ і $C(p_*, f^{-1}) \subseteq \partial D \subset \mathbb{S}$ за наслідком 1 з роботи [1]. Таким чином, достатньо переконатись, що $C(p_*, f^{-1})$ складається з єдиної точки, див., наприклад, теореми 20.V.1 і 21.II.1 в [18], оскільки на $\overline{\mathbb{S}}$ може бути визначена метрика.

Допустимо, що знайдеться принаймні дві точки p_1 і $p_2 \in \partial D$ в $C(p_*, f^{-1})$. Тоді $p_* \in\ C(p_1, f) \cap C(p_2, f)$, що протиречить лемі 2. Отримане протиріччя спростовує зроблене допущення, і тим самим, доводить висновок теореми 1.

4. Неперервне продовження на границю прямих відображень.

На відміну від випадку обернених відображень, як це було встановлено ще на площині, жодна степінь інтегрованості дилатації не призводить до продовження Q–гомеоморфізмів (і як наслідок, гомеоморфізмів класу FLD) на границю, див., наприклад, пропозицію 6.3 в [6]. Відповідний критерій для цього, наведений нижче, є значно витонченішим. Як і раніше, ми розуміємо, що дилатація K_f продовжена нулем за межі області D.

Лема 3. *Нехай $\mathbb{S}$ і $\mathbb{S}^*$ – риманові поверхні, D і D^* – області в $\overline{\mathbb{S}}$ та $\overline{\mathbb{S}^*}$, відповідно, $\partial D \subset \mathbb{S}$, $\partial D^* \subset \mathbb{S}^*$, D локально зв'язна в точці $p_0 \in \partial D$. Допустимо, що $f : D \to D^*$ – гомеоморфізм скінченного спотворення довжини такий, що*

∂D^* сильно досяжна хоча б в одній точці $C(p_0, f)$ і, в деякій карті U поверхні $\mathbb{S}$ з локальною координатою z_0 точки p_0,

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} K_f(z)\cdot\psi^2_{z_0,\varepsilon}(|z-z_0|)\,dm(z) \;=\; o(I^2_{z_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)), \qquad \textit{при} \quad \varepsilon\to 0 \tag{8}$$

для деякого $\varepsilon_0>0$, де $\psi_{z_0,\varepsilon}(t)$ – сімейство невід'ємних вимірних (по Лебегу) функцій на $(0,\infty)$, таких що задовольняють

$$0 \;<\; I_{z_0,\varepsilon_0}(\varepsilon):\;=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi_{z_0,\varepsilon}(t)\,dt \;<\; \infty \qquad \forall\,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)\;. \tag{9}$$

Тоді відображення f продовжується по неперервності в точку p_0 і $f(p_0)\in\partial D^*$.

Відмітимо, що умови (8)-(9) приводять до того, що $I_{z_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$ і, що ε_0 може бути обрано настільки малим на скільки потрібно зі збереженням (8)-(9).

Доведення. Переходячи до карти U, ми можемо вважати, без обмеження загальності, що $\mathbb{S}$ і D – плоскі області. Тоді за принципом уніформізації Кьобе, див., наприклад, [15], с. 48, область $D^* = fD$ також є картою на римановій поверхні $\mathbb{S}^*$. Таким чином, за пропозицією 1

$$M\left(\Delta\left(fC_1, fC_2;\, fD\right)\right) \;\leqslant\; \int\limits_A K_f(z)\cdot\;\eta^2(|z-z_0|)\;dm(z) \tag{10}$$

для будь-яких кілець $A = A(z_0, r_1, r_2) = \{z\in\mathbb{C} : r_1 < |z-z_0| < r_2\}$, $0<r_1<r_2<\varepsilon_* := \sup\limits_{z\in D}|z-z_0|$, континумів C_1 і C_2 в D, що належать різним компонентам зв'язності доповнення A в $\mathbb{C}$, і для будь-яких функцій, що вимірюються $\eta:(r_1,r_2)\to[0,\infty]$, таких, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\;dr \geqslant\; 1\;, \tag{11}$$

див., наприклад, пропозицію 2.4 в [20] або 13.4 в [6].

Нагадаємо, що за теоремою Урисона $\overline{\mathbb{S}^*}$ є простором з визначенням метрики, див., наприклад, теорему 22.II.1 в [18]. Тому компактність $\overline{\mathbb{S}^*}$ еквівалентна секвенціальній компактності, див., наприклад, зауваження 41.I.3 в [19]. З цього слідує, гранична множина $C(z_0, f)$ не є пустою з огляду на секвенціальну компактність $\overline{\mathbb{S}^*}$, і $C(z_0, f)\subseteq\partial D^*\subset\mathbb{S}^*$ за наслідком 1 з роботи [1] . Таким чином, достатньо показати, що $C(z_0, f)$ складається з єдиної точки, див., наприклад, теореми 20.V.1 і 21.II.1 в [18], оскільки $\overline{\mathbb{S}^*}$ метризується.

За умовою леми, ∂D^* сильно досяжна в деякій точці $p_1\in C(z_0, f)$. Допустимо, що існує ще хоча б одна точка $p_2\in C(z_0, f)$. Через d позначимо одну з відстаней в $\overline{\mathbb{S}^*}$. Нехай $d_0\in(0,\, d(p_1, p_2))$.

З огляду на локальну звя'зність області D в точці z_0, знайдеться послідовність відкритих околів U_k точки z_0 така, що $D_k = D \cap U_k$ – області і $\operatorname{diam} U_k \to 0$ при $k \to \infty$. Тоді знайдуться точки ζ_k і $\zeta_k^* \in D_k^* := fD_k$, близькі до p_1 і p_2, відповідно, для яких $d(p_1, \zeta_k) < d_0$ і $d(p_1, \zeta_k^*) > d_0$, і які можна з'єднати кривими C_k в областях D_k^*, $k = 1, 2, \ldots$. З огляду на зв'язність C_k,

$$C_k \cap \partial B(p_1, d_0) \neq \varnothing\,, \qquad \text{де} \quad B(p_1, d_0) \;=\; \{p \in \mathbb{S}^* :\; d(p, p_1) < d_0\}\,. \tag{12}$$

За умови сильної досяжності точки p_1 знайдуться континум $C_0 \subset D^*$ і число $\delta > 0$ такі, що

$$M(\Delta(C_0, C_k;\, D^*)) \;\geqslant\; \delta \tag{13}$$

для достатньо великих k, оскільки $\operatorname{dist}(p_1, C_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Відмітимо, що $K_0 := f^{-1}(C_0)$ також є континумом як неперервний образ континума. Таким чином, $\varepsilon^* := \operatorname{dist}(z_0, K_0)) > 0$. Визначимо в умові леми $\varepsilon_0 < \min(\varepsilon_*, \varepsilon^*)$.

Зауважимо, що для функції

$$\eta_\varepsilon(t) \;:=\; \begin{cases} \psi_{z_0,\varepsilon}(t)/I_{z_0,\varepsilon_0}(\varepsilon), & t \in (\varepsilon, \varepsilon_0), \\ 0, & t \notin (\varepsilon, \varepsilon_0), \end{cases} \tag{14}$$

виконана умова

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta_\varepsilon(t)\, dt \;=\; 1\,.$$

Таким чином, для довільного континума $K \subset D(z_0, \varepsilon) := \{z \in D : |z - z_0| < \varepsilon\}$, за властивістю (10),

$$M(\triangle(fK_0, fK;\, D^*)) \;\leqslant \int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} K_f(z)\cdot\,\eta_\varepsilon^2(|z - z_0|)\, dm(z) \;=$$

$$=\; \frac{1}{I^2_{z_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)} \int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} K_f(z)\cdot\,\psi^2_{z_0,\varepsilon}(|z - z_0|)\, dm(z) \;\to\; 0 \qquad \text{при } \varepsilon \;\to\; 0 \tag{15}$$

з огляду на умову (8).

З іншого боку, для будь-якого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ при великих k має місце включення $D_k \subset D(z_0, \varepsilon)$ і, як наслідок, $f^{-1}(C_k) \subset D(z_0, \varepsilon)$. Таким чином, отримаємо протиріччя між (13) і (15). Це протиріччя спростовує гіпотезу про існування другої точки p_2 в $C(z_0, f)$, що і завершує доведення.

Теорема 2. *Нехай $\mathbb{S}$ та $\mathbb{S}^*$ – риманові поверхні, D і D^* – області в $\overline{\mathbb{S}}$ та $\overline{\mathbb{S}^*}$, відповідно, $\partial D \subset \mathbb{S}$, $\partial D^* \subset \mathbb{S}^*$, D локально зв'язна на границі і ∂D^* сильно досяжна, $f : D \to D^*$ – гомеоморфізм скінченного спотворення довжини.*

Допустимо, що для будь-якої точки $p_0 \in \partial D$ з локальною координатою z_0 в деякій карті U поверхні $\mathbb{S}$,

$$\int\limits_0^\delta \frac{dr}{||K_f||\,(z_0, r)} \;=\; \infty \tag{16}$$

при всіх достатньо малих $\delta > 0$*, де*

$$||K_f||\,(z_0, r) \;=\; \int\limits_{|z-z_0|=r} K_f(z)\;|\,d\,z|\;. \tag{17}$$

Тоді відображення f *продовжується по неперервності на* ∂D*.*

Доведення. Дійсно, при $\psi_{z_0}(t) = 1/||K_f||\,(z_0,t)$ для всіх $t \in (0,\varepsilon_0)$ і достатньо малому $\varepsilon_0 > 0$, та $\psi_{z_0}(t) = 1$ для всіх $t \in (\varepsilon_0,\infty)$, з (16) отримаємо, що

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} K_f(z)\cdot\psi^2_{z_0}(|z-z_0|)\,d\,m(z) \;=\; I_{z_0,\varepsilon_0}(\varepsilon) \;=\; o(I^2_{z_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)) \qquad \text{при} \quad \varepsilon \to 0\;,$$

де з огляду умов $K_f(z) \geqslant 1$ в D і $K_f \in L^1_{\rm loc}$,

$$0 \;<\; I_{z_0,\varepsilon_0}(\varepsilon) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{z_0}(t)\,dt \;<\; \infty\;.$$

Таким чином, теорема 2 випливає з леми 3 та теореми 1.

Наслідок 1. *В частинному випадку, висновок теореми 2 має місце якщо, для будь-якої точки* $p_0 \in \partial D$ *з локальною координатою* z_0 *в карті* U *поверхні* $\mathbb{S}$,

$$K_f(z) \;\; = O\left(\log\frac{1}{|z-z_0|}\right) \qquad \text{при} \quad z \to z_0\;, \tag{18}$$

або, більш загально,

$$k_{z_0}(\varepsilon) = O\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad \text{при} \quad \varepsilon \to 0\;, \tag{19}$$

де $k_{z_0}(\varepsilon)$ *– середнє значення функції* K_f *на колі* $|z-z_0| = \varepsilon$*.*

З урахуванням теореми 3.1 в роботі [21] та результату теореми 2, отримаємо наступне.

Теорема 3. *Нехай* $\mathbb{S}$ *та* $\mathbb{S}^*$ *– риманові поверхні,* D *і* D^* *– області в* $\overline{\mathbb{S}}$ *та* $\overline{\mathbb{S}^*}$*, відповідно,* $\partial D \subset \mathbb{S}$*,* $\partial D^* \subset \mathbb{S}^*$*,* D *локально зв'язна на границі і* ∂D^* *сильно досяжна,* $f : D \to D^*$ *– гомеоморфізм скінченного спотворення довжини.*

Допустимо, що для будь-якої точки $p_0 \in \partial D$ *з локальною координатою* z_0 *в деякій карті* U *поверхні* $\mathbb{S}$,

$$\int \Phi(K_f(z))\;d\,m(z) \;<\; \infty\;, \tag{20}$$

де $\Phi : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *– неспадаюча випукла функція з умовою, для деякого* $\delta > \Phi(0)$*,*

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau\Phi^{-1}(\tau)} = \infty\;. \tag{21}$$

Тоді відображення f продовжується по неперервності на ∂D.

Зауваження 4. Відмітимо, що за теоремою 5.1 та зауваженням 5.1 в [13] умова (21) є не тільки достатньою, а й необхідною для неперервного продовження на границю всіх відображень f скінченного спотворення довжини з інтегральними обмеженнями виду (20).

Зауважимо також, що за теоремою 2.1 в [21] умова (21) еквівалентна будь-якій із наступних умов, де $H(t) = \log\Phi(t)$:

$$\int\limits_{\Delta}^{\infty} H'(t)\,\frac{dt}{t} = \infty \tag{22}$$

або

$$\int\limits_{\Delta}^{\infty} \frac{dH(t)}{t} = \infty \tag{23}$$

або

$$\int\limits_{\Delta}^{\infty} H(t)\,\frac{dt}{t^2} = \infty \tag{24}$$

для декого $\Delta > 0$, а також кожній із рівностей:

$$\int\limits_{0}^{\delta} H\left(\frac{1}{t}\right)\,dt = \infty \tag{25}$$

для деякого $\delta > 0$,

$$\int\limits_{\Delta_*}^{\infty} \frac{d\eta}{H^{-1}(\eta)} = \infty \tag{26}$$

для деякого $\Delta_* > H(+0)$.

Інтеграл в (23) розуміється як інтеграл Лебега–Стилтьєса, а інтеграли в (28), (24)–(26) як звичайні інтеграли Лебега.

Необхідно навести ще пояснення. В правих частинах умов (22)–(26) маємо на увазі $+\infty$. Якщо $\Phi(t) = 0$ для $t \in [0, t_*]$, то $H(t) = -\infty$ для $t \in [0, t_*]$, і ми завершуємо означення в (22), вважаючи $H'(t) = 0$ для $t \in [0, t_*]$. Відмітимо, що умови (23) і (24) виключають випадок того, що t_* належить інтервалу інтегрування, оскільки в протилежному випадку ліві частини в (23) і (24) або рівні $-\infty$, або не визначені. Тому припусткаємо, що в (22–(25) $\delta > t_0$, відповідно, $\Delta < 1/t_0$, де $t_0 := \sup_{\Phi(t)=0} t$, і вважаємо $t_0 = 0$, якщо $\Phi(0) > 0$.

Найбільш цікавим із вказаних вище умов є умова (24), яка може бути записана у вигляді:

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \log\Phi(t)\,\frac{dt}{t^2} \;=\; \infty\,. \tag{27}$$

Наслідок 2. *Зокрема, висновок теореми 3 має місце, якщо при деякому* $\alpha > 0$

$$\int e^{\alpha K_f(z)}\, dm(z) \ < \ \infty \, . \tag{28}$$

Наступне твердження є наслідком теореми 1 і леми 3 при $\psi(t) = 1/t$.

Теорема 4. *Нехай* $\mathbb{S}$ *та* $\mathbb{S}^*$ *– риманові поверхні,* D *і* D^* *– області в* $\overline{\mathbb{S}}$ *та* $\overline{\mathbb{S}^*}$*, відповідно,* $\partial D \subset \mathbb{S}$*,* $\partial D^* \subset \mathbb{S}^*$*,* D *локально зв'язна на границі і* ∂D^* *сильно досяжна,* $f : D \to D^*$ *– гомеоморфізм скінченного спотворення довжини.*

Допустимо, що для будь-якої точки $p_0 \in \partial D$ *з локальною координатою* z_0 *в деякій карті* U *поверхні* $\mathbb{S}$*,*

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} K_f(z)\, \frac{dm(z)}{|z-z_0|^2} \ = \ o\left(\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^2\right) \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0 \, . \tag{29}$$

Тоді відображення f *продовжується по неперервності на* ∂D*.*

Зауваження 5. Обираючи в лемі 3 функцію $\psi(t) = 1/(t\log 1/t)$ замість $\psi(t) = 1/t$ отримаємо, що умова (29) може бути замінена умовою

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} \frac{K_f(z)\ dm(z)}{\left(|z-z_0|\ \log\frac{1}{|z-z_0|}\right)^2} \ = \ o\left(\left[\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^2\right) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0 \, . \tag{30}$$

Аналогічно, умова (19) за теоремою 2 може бути замінена більш слабкою умовою

$$k_{z_0}(\varepsilon) \ = \ O\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\log\,\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0 \, . \tag{31}$$

Звичайно, ми могли б тут навести велику кількість відповідних умов логарифмічного типу, використовуючи функции $\psi(t)$, що підходять.

Аналогічно як в [22], говоримо, що функція $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ на відкритій множині $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ має **скінченне середнє коливання** в точці $z_0 \in D$, пишемо $\varphi \in \mathrm{FMO}(z_0)$, якщо

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\ \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int\limits_{B(z_0,\varepsilon)} |\ \varphi(z) - \widetilde{\varphi}_\varepsilon|\ dm(z) \ < \ \infty \, , \tag{32}$$

де $\widetilde{\varphi}_\varepsilon$ – середнє значення функції φ в крузі $B(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < \varepsilon\}$.

За лемою 3 з вибором $\psi_{z_0,\varepsilon}(t) \equiv 1/t\log\frac{1}{t}$, див. також наслідок 2.3 в [22], отримаємо наступний результат.

Теорема 5. *Нехай* $\mathbb{S}$ *та* $\mathbb{S}^*$ *– риманові поверхні,* D *і* D^* *– області в* $\overline{\mathbb{S}}$ *та* $\overline{\mathbb{S}^*}$*, відповідно,* $\partial D \subset \mathbb{S}$*,* $\partial D^* \subset \mathbb{S}^*$*,* D *локально зв'язна на границі і* ∂D^* *сильно досяжна,* $f : D \to D^*$ *– гомеоморфізм скінченного спотворення довжини.*

Допустимо, що для будь-якої точки $p_0 \in \partial D$ з локальною координатою z_0 в деякій карті U поверхні $\mathbb{S}$, для деякої функції $Q : U \to \mathbb{R}^+$,

$$K_f(z) \ \leqslant \ Q(z) \in \ \mathrm{FMO(z_0)} \qquad \forall\, z \in U\ . \tag{33}$$

Тоді відображення f продовжується по неперервності на ∂D.

За наслідком 2.1 в [22] з теореми 5 також маємо:

Наслідок 3. *Зокрема, висновок теореми 5 має місце, якщо*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \ \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int\limits_{B(z_0,\,\varepsilon)} K_f(z)\ d\,m(z) \ < \ \infty\ .$$

Зауваження 6. Лема 3 дозволяє проводити поточковий аналіз: якщо виконані умови на дилатацію в будь-якій граничній точці D, то в цій точці має місце продовження на границю по неперервності.

5. Про гомеоморфне продовження відображень на границю.

Комбінуючи теорему 1 з результатами попереднього розділу, можна отримати цілу низку ефективних критеріїв гомеоморфного продовження на границю для відображень зі скінченним спотворенням довжини між областями на риманових поверхнях. Як і раніше, тут ми будемо розуміти, що функція K_f продовжена нулем поза областю D.

Теорема 6. *Нехай в доповнення до умов теореми 1, для будь-якої точки $p_0 \in \partial D$ з локальною координатою z_0 в деякій карті U поверхні $\mathbb{S}$,*

$$\int\limits_0^{\delta} \frac{dr}{||K_f||\,(z_0, r)} \ = \ \infty \tag{34}$$

при всіх достатньо малих $\delta > 0$, де

$$||K_f||\,(z_0, r) \ = \int\limits_{|z-z_0|=r} K_f(z)\ |\,d\,z|\ . \tag{35}$$

Тоді відображення f можна продовжити до гомеоморфізму $\overline{D}$ на $\overline{D^*}$.

Наслідок 4. *В частинному випадку, висновок теореми 6 має місце якщо, для будь-якої точки $p_0 \in \partial D$ з локальною координатою z_0 в карті U поверхні $\mathbb{S}$,*

$$K_f(z) \quad = O\left(\log \frac{1}{|z - z_0|}\right) \qquad \textit{при} \quad z \to z_0\ , \tag{36}$$

або, більш загально,

$$k_{z_0}(\varepsilon) = O\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0\ , \tag{37}$$

де $k_{z_0}(\varepsilon)$ *– середнє значення функції* K_f *на колі* $|z - z_0| = \varepsilon$.

Теорема 7. *За умов теореми 1, нехай для будь-якої точки* $p_0 \in \partial D$ *знайдеться карта поверхні* $\mathbb{S}$*, що містить* p_0*, в локальних координатах якої*

$$\int \Phi(K_f(z))\, dm(z) \ < \ \infty \ , \tag{38}$$

де $\Phi : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *– неспадаюча випукла функція з умовою, для деякого* $\delta > \Phi(0)$,

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(\tau)} = \infty \ . \tag{39}$$

Тоді відображення f *можна продовжити до гомеоморфізму* $\overline{D}$ *на* $\overline{D^*}$.

Наслідок 5. *Зокрема, висновок теореми 7 має місце, якщо при деякому* $\alpha > 0$

$$\int e^{\alpha K_f(z)}\, dm(z) \ < \ \infty \ . \tag{40}$$

Теорема 8. *Нехай за умов теореми 1, для будь-якої точки* $p_0 \in \partial D$ *з локальною координатою* z_0 *в деякій карті* U *поверхні* $\mathbb{S}$,

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} K_f(z)\ \frac{dm(z)}{|z-z_0|^2} \ = \ o\left(\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^2\right) \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0 \ . \tag{41}$$

Тоді відображеня f *продовжується до гомеоморфізму* $\overline{D}$ *на* $\overline{D^*}$.

Теорема 9. *Нехай за умов теореми 1, для будь-якої точки* $p_0 \in \partial D$ *з локальною координатою* z_0 *в деякій карті* U *поверхні* $\mathbb{S}$, $K_f(z) \leqslant Q(z) \in \mathrm{FMO}$. *Тоді відображення* f *продовжується до гомеоморфізму* $\overline{D}$ *на* $\overline{D^*}$.

Наслідок 6. *Зокрема, висновок теореми 9 має місце, якщо*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \ \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int\limits_{B(z_0,\varepsilon)} K_f(z)\, dm(z) \ < \ \infty \ .$$

Цитована література

1. *Волков С.В., Рязанов В.И.* О граничном поведении отображений класса Соболева на римановых поверхностях // Труды ИПММ НАН Украины. – 2015. – Т. 29. – С. 34–53.
2. *Ryazanov V., Volkov S.* On the boundary behavior of mappings in the class W1,1loc on Riemann surfaces // Complex Anal. Oper. Theory – 2017.– Vol. 11, № 7. – P. 1503–1520.
3. *Iwaniec T., Sverak V.* On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1993. – Vol. 118. – P. 181–188.
4. *Iwaniec T., Martin G.* Geometric function theory and non-linear analysis. – Oxford, Oxford Univ. Press. – 2001.

5. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. Anal. Math. –2004. – Vol. 93. – P. 215–236.
6. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York. – 2009.
7. *Kovtonyuk D., Petkov I., Ryazanov V.* On the boundary behavior of mappings with finite distortion in the plane // Lobachevskii J. Math. –2017.– Vol. 38, № 2. – P. 290–306.
8. *Kovtonyuk D., Petkov I., Ryazanov V.* Prime ends in theory of mappings with finite distortion in the plane // Filomat. – 2017.– Vol. 31, № 5. – P. 1349–1366.
9. *Martio O., Väisälä J.* Elliptic equations and maps of bounded length distortion // Math. Ann. – 1988. – Vol. 282, №3. – P. 423–443.
10. *Kovtonyuk D., Ryazanov V.* On the boundary behavior of generalized quasi-isometries // J. Anal. Math. – 2011. – Vol. 115. – P. 103–120.
11. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Q-homeomorphisms // Complex analysis and dynamical systems. Contemp. Math. – 2004. – Vol. 364. – P. 193–203.
12. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On Q-homeomorphisms// Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2005. – Vol. 30, № 1. – P. 49–69.
13. *Kovtonyuk D., Ryazanov V.* On the theory of mappings with finite area distortion // J. Anal. Math. – 2008. – Vol. 104. – P. 291–306.
14. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. – Lecture Notes in Mathematics, Vol. 229. – Springer-Verlag, Berlin–New York. – 1971.
15. *Крушкаль С.Л., Апанасов Б.Н., Гусевский Н.А.* Клейновы группы и униформизация в примерах и задачах. – Наука, Новосибирск. – 1981.
16. *Бердон А.* Геометрия в дискретных группах. – М.: Наука, 1986.
17. *Zieschang H., Vogt E., Coldewey H.* Surfaces and planar discontinuous groups. – Lecture Notes in Mathematics, Vol. 835. – Springer, Berlin. – 1980.
18. *Куратовский К.* Топология, т. 1. – М.: Мир, 1966.
19. *Куратовский К.* Топология, т. 2. – М.: Мир, 1969.
20. *Рязанов В.И., Салимов Р.Р.* Слабо плоские пространства и границы в теории отображений // Укр. мат. вісник. – 2007. – Т. 4, № 2. – С. 199–234; transl. in Ukrainian Math. Bull. – 2007. – Vol. 4, № 2. – P. 199–234.
21. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Integral conditions in the mapping theory // Укр. мат. вісник. – 2010. – Т. 7, № 1. – С. 73–87; transl. in J. Math. Sci. – 2011. – Vol. 173, No. 4. – P. 397–407.
22. *Игнатьев А. А., Рязанов В.И.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вісник. – 2005. – Т. 2, № 3. – С. 395–417; transl. in Ukrainian Math. Bull. – 2005. – Vol. 2, № 3. – P. 403–424.

References

1. Volkov, S.V., Ryazanov, V.I. (2015). O granichnom povedenii otobrazhenij klassa Soboleva na rimanovy‘kh poverkhnostyakh. *Trudy IPMM NAN Ukrainy, 29*, 34-53 (in Russian).
2. Ryazanov, V., Volkov, S. (2017). On the boundary behavior of mappings in the class $W^1, 1_{loc}$ on Riemann surfaces. *Complex Anal. Oper. Theory, 11*(7), 1503–1520.
3. Iwaniec, T., Sverak, V. (1993). On mappings with integrable dilatation. *Proc. Amer. Math. Soc., 118*, 181-188.
4. Iwaniec, T., Martin, G. (2001). *Geometric function theory and non-linear analysis.* Oxford, Oxford Univ.
5. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2004). Mappings with finite length distortion. *J. Anal. Math., 93*, 215–236.
6. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2009). *Moduli in modern mapping theory.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York.
7. Kovtonyuk, D., Petkov, I., Ryazanov, V. (2017). On the boundary behavior of mappings with finite distortion in the plane. *Lobachevskii J. Math., 38*(2), 290–306.
8. Kovtonyuk, D., Petkov, I., Ryazanov, V. (2017). Prime ends in theory of mappings with finite

distortion in the plane. *Filomat*, *31*(5), 1349–1366.
9. Martio, O., Väisälä, J. (1988). Elliptic equations and maps of bounded length distortion. *Math. Ann., 282*(3), 423–443.
10. Kovtonyuk, D., Ryazanov, V. (2011). On the boundary behavior of generalized quasi-isometries. J. *Anal. Math., 115*, 103-120.
11. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2004). Q-homeomorphisms. *Complex analysis and dynamical systems, Contemp. Math., 364*, 193–203.
12. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2005). On Q-homeomorphisms. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 30*(1), 49–69.
13. Kovtonyuk, D., Ryazanov, V. (2008). On the theory of mappings with finite area distortion. *J. Anal. Math., 104*, 291–306.
14. Väisälä, J. (1971). *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 229. Springer-Verlag, Berlin-New York.
15. Krushkal‘, S.L., Apanasov, B.N., Gusevskij, N.A. (1981). *Klejnovy‘ gruppy‘ i uniformizacziya v primerakh i zadachakh.* Nauka, Novosibirsk (in Russian).
16. Berdon, A. (1986). *The geometry of discrete groups.* Nauka, Moscow (in Russian).
17. Zieschang, H., Vogt, E., Coldewey, H. (1980). *Surfaces and planar discontinuous groups.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 835. Springer, Berlin.
18. Kuratovskij, K. (1966). *Topologiya, t. 1.* Mir, Moskva (in Russian).
19. Kuratovskij, K. (1969). *Topologiya, t. 2.* Mir, Moskva (in Russian).
20. Ryazanov, V.I., Salimov, R.R. (2007). Slabo ploskie prostranstva i graniczy‘ v teorii otobrazhenij. *Ukr. mat. visnik, 4*(2), 199-234 (in Russian).
21. Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2011). Integral conditions in the mapping theory. *J. Math. Sci.*, *173*(4), 397-407.
22. Ignat‘ev, A.A., Ryazanov, V.I. (2005). Konechnoe srednee kolebanie v teorii otobrazhenij. *Ukr. mat. visnik,* 2(3), 395-417 (in Russian).

S.V. Volkov, V.I. Ryazanov

On mappings with finite length distortion on Riemann surfaces.

The present paper is a natural continuation of our previous paper (2017) on the boundary behavior of mappings in the Sobolev classes on Riemann surfaces, where the reader will be able to find the corresponding historic comments and a discussion of many definitions and relevant results. The given paper was devoted to the theory of the boundary behavior of mappings with finite distortion by Iwaniec on Riemannian surfaces first introduced for the plane in the paper of Iwaniec T. and Sverak V. (1993) On mappings with integrable dilatation and then extended to the spatial case in the monograph of Iwaniec T. and Martin G. (2001) devoted to Geometric function theory and non-linear analysis. At the present paper, it is developed the theory of the boundary behavior of the so–called mappings with finite length distortion first introduced in the paper of Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E. (2004) in the spatial case, see also Chapter 8 in their monograph (2009) on Moduli in modern mapping theory. As it was shown in the paper of Kovtonyuk D., Petkov I. and Ryazanov V. (2017) On the boundary behavior of mappings with finite distortion in the plane, such mappings, generally speaking, are not mappings with finite distortion by Iwaniec because their first partial derivatives can be not locally integrable. At the same time, this class is a generalization of the known class of mappings with bounded distortion by Martio–Vaisala from their paper (1988). Moreover, this class contains as a subclass the so-called finitely bi-Lipschitz mappings introduced for the spatial case in the paper of Kovtonyuk D. and Ryazanov V. (2011) On the boundary behavior of generalized quasi-isometries, that in turn are a natural generalization of the well-known classes of bi-Lipschitz mappings as well as isometries and quasi-isometries. In the research of the local and boundary behavior of mappings with finite length distortion in the spatial case, the key fact was that they satisfy some modulus inequalities which was a motivation for the consideration more wide classes of mappings, in particular, the Q-homeomorphisms (2005) and the mappings with finite area distortion (2008). Hence it is natural that under the research of mappings with finite length distortion on Riemann surfaces we start from establishing the corresponding modulus inequalities that are the main tool for us. On this basis, we prove here a series of criteria in terms of dilatations for the continuous and homeomorphic extension to the boundary of the mappings with finite length distortion between domains on arbitrary Riemann surfaces.

Keywords: *Riemann surfaces, boundary behavior, continuous and homeomorphic extension, mappings of finite length distortion, strongly accessible and weakly flat boundaries.*

ДВНЗ Донецький національний технічний університет,
Покровськ,
Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Слов'янськ
Черкаський національний університет імені
Богдана Хмельницького
`serhii.volkov@donntu.edu.ua,`
`vl.ryazanov1@gmail.com, Ryazanov@nas.gov.ua`

Отримано 11.10.19