УДК 517.9
DOI: 10.37069/1683-4720-2021-35-5

©2021. **М.В. Краснощок**

ОПТИМИЗАЦІЯ ФОРМИ ОБЛАСТІ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНОЇ ЗАДАЧІ З НЕЛІНІЙНОЮ ГРАНИЧНОЮ УМОВОЮ

У статті досліджено задачу оптимізації області для еліптичного рівняння з нелінійною граничною умовою. Доведено існування розв'язку і отримано необхідну умову оптимальності.

MSC: 49Q10, 49J20.

Ключові слова: *рівняння Лапласа, умови оптимальності, простори Соболева.*

1. Вступ.

Задачі оптимального керування формою області виникають як при проектуванні різного виду конструкцій, так і при вивченні невідомих меж, недоступних для безпосередніх вимірювань. Результати теоретичних і обчислювальних досліджень задач даного типу викладено, наприклад в монографіях [1–4].

Задачі оптимизації форми для еліптичних рівнянь з лінійними мішаними граничними умовами досліджувались, наприклад, в [5–7]. В данній роботі доведено існування оптимального розв'язку для еліптичної задачі з нелінійною граничною умовою. Наскільки відомо автору, задачі оптимального керування формою в такому формулюванні не вивчались.

У другому пункті міститься формулювання задачі, яка розглядається. У третьому доведено існування оптимального розв'язку, а в четвертому виведено необхідну умову оптимальності.

2. Формулювання задачі.

На площині $\mathbb{R}^2$ позначимо $Q = (0,1)\times(0,1)$ і через $\Gamma, \Gamma_N, \Gamma_D$ відповідно нижню, верхню і бічні сторони квадрату Q (тобто на Γ_D маємо $x_1 = 0$ або $x_1 = 1$).

Нехай $\theta(x_1)$ – регулярна функція на відрізку $[0,1]$, така, що $\theta(x_1) < 1$ при $x \in [0,1]$ і $\theta(0) = \theta(1) = 0$. За допомогою даної функції визначимо криву $\Gamma_\theta = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = \theta(x_1),\, x \in (0,1)\}$ і область $Q_\theta = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 > x_2 > \theta(x_1),\, x \in (0,1)\}$.

Визначимо функцію u_θ як розв'язок граничної задачі

$$\Delta u = 0 \text{ в } Q_\theta, \tag{1}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} = b(u) \text{ на } \Gamma_\theta, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ на } \Gamma_N, \tag{3}$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma_D, \tag{4}$$

де ν – зовнішня одинична нормаль відповідно до Γ_θ в (2) і до Γ_N в (3). Припустимо також, що

$$g \in L_2(\Gamma_N), \tag{5}$$

$$b \in C^3(\mathbb{R}),\ b(0) = 0,\ b'(u) \geq 0 \text{ для всіх } u \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Введемо множину допустимих керувань

$$U_{ad} = \{\theta \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1) :\ -\delta \leq \theta(x_1) \leq 1 - \delta, x_1 \in (0,1)\},$$

де $\delta \in (0,1)$. Остання нерівність гарантує, що Γ_θ і Γ_N не перетинаються.

Нехай функцію вартості $J : U_{ad} \to \mathbb{R}$ маємо у вигляді

$$J(\theta) = \|u_\theta - h\|^2_{L_2(\Gamma_N)} + \alpha\|\theta''\|^2_{L_2(0,1)}, \tag{7}$$

де $\alpha > 0$, $h \in L_2(\Gamma_N)$.

Задача оптимального керування формою області полягає у відшуканні функції $\theta_* \in U_{ad}$ такої, що

$$J(\theta_*) = \inf_{\theta \in U_{ad}} J(\theta). \tag{8}$$

Зауваження 1. Задачу (8) можна розглядати як регуляризацію Тіхонова некоректної задачі, яка полягає у знаходженні θ і u_θ за умовами (1)–(4) і додатковою умовою

$$u_\theta = h \text{ на } \Gamma_N. \tag{9}$$

Задачі такого типу виникають при неруйнівному контролі зразка матеріалу, що підлягає дії корозії, на недосяжній до вимірювань поверхні Γ_θ. Можливий рівень корозії може бути виявлено за допомогою електростатичних (теплових) вимірювань на іншій поверхні Γ_N (див. [8,9]). Зазначимо також, що існують різні підходи до вибору значення параметру α (див. [10]), тому надалі вважатимемо, що для деякого $\alpha_0 > 0$ маємо

$$\alpha \geq \alpha_0. \tag{10}$$

3. Існування оптимального роз'язку.

Якщо для $\theta \in U_{ad}$ функція v належить до простору $H^1(Q_\theta)$ та її слід на Γ_D дорівнює нулю, будемо говорити, що $v \in V(Q_\theta)$.

Означення. Будемо говорити, що $u_\theta \in V(Q_\theta)$ є варіаційним роз'язком задачі (1)–(4), якщо

$$\int\limits_{Q_\theta} \nabla u_\theta \cdot \nabla v\, dx + \int\limits_{\Gamma_\theta} b(u_\theta) v\, ds = \int\limits_{\Gamma_N} gv\, ds \text{ для всіх } v \in V(Q_\theta). \tag{11}$$

Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконано умови (5), (6). Тоді існує єдиний розв'язок* $u_\theta \in V(Q_\theta) \cap L_\infty(Q_\theta)$ *задачі (1)-(4), для якого справедлива оцінка*

$$\|u_\theta\|_{H^1(Q_\theta)} + \|u_\theta\|_{L_\infty(Q_\theta)} \leq C(\delta)\|g\|_{L_2(\Gamma_N)}. \tag{12}$$

З припущення $\theta \in U_{ad}$ і теорем вкладення Соболева випливає, що $\theta \in C^{3/2}([0,1])$ і границя області Q_θ належить до класу Ліпшиця. Твердження Теореми 1 випливає з Теорем 4.4, 4.5 монографії [11].

Таким чином, визначено оператор $K : U_{ad} \to V(Q_\theta)$, що елементу $\theta \in U_{ad}$ співпоставляє варіаційний розв'язок $u_\theta \in V(Q_\theta)$. Через τ позначимо оператор сліду $\tau : V(Q_\theta) \to L_2(\Gamma_N)$ і через F композицію $F = \tau \circ K$. Отже функцію вартості можна також записати у вигляді

$$J(\theta) = \|F(\theta) - h\|^2_{L_2(\Gamma_N)} + \alpha\|\theta''\|^2_{L_2(0,1)}. \tag{13}$$

Будемо діяти за схемою розділу 2 [2]. Нам потрібно довести, що оператор F є секвенціально слабо замкненим. Надалі через $\to$ і $\rightharpoonup$ позначатимемо сильну і слабку збіжність у відповідних просторах.

Лема 1. *Нехай послідовність* $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ *така, що* $\theta_n \in U_{ad}$ *для всіх* $n \geq 1$ *і* $\theta_n \rightharpoonup \theta$ *в* $H^2(0,1)$. *Тоді* $\theta \in U_{ad}$ *і* $F(\theta_n) \rightharpoonup F(\theta)$ *в* $L_2(\Gamma_N)$.

Доведення. З теорем вкладення Соболева випливає, що існує стала C_H така, що

$$\|\theta_n\|_{C^{1+1/2}([0,1])} \leq C_H, \tag{14}$$

і, внаслідок теореми Арцела–Асколі,

$$\theta_n \to \theta \text{ в } C^{1+\sigma}([0,1]), \text{ для всіх } \sigma \in [0, 1/2). \tag{15}$$

В області $Q_* = (0,1) \times (-1,1)$ визначимо характеристичні функції χ_n, χ областей Q_{θ_n}, Q_θ. З (15) випливає, що

$$\int_{Q_*} |\chi_n(x) - \chi(x)|^p \, dx = \int_0^1 dx_1 \int_{\min\{\theta(x_1),\theta_n(x_1)\}}^{\max\{\theta(x_1),\theta_n(x_1)\}} |\chi_n(x) - \chi(x)|^p dx_2$$

$$\leq \int_0^1 \max\{\theta(x_1), \theta_n(x_1)\} - \min\{\theta(x_1), \theta_n(x_1)\} dx_1 \leq \int_0^1 |\theta(x_1) - \theta_n(x_1)| dx_1.$$

Отже (див. (15))

$$\chi_n \to \chi \text{ в } L_p(Q_*), \text{ для всіх } p \in [1, \infty). \tag{16}$$

З (14) бачимо, що області Q_{θ_n} задовольняють (див. Означення 3 на с. 192 і Твердження на с. 04 в [12]) рівномірній умові конусу. Тому можемо застосувати теорему про рівномірне продовження (див. Теорему II.1 с.193, Твердження III.2' с. 204

в [12]), яка стверджує, що для кожного n існує лінійний і неперервний оператор продовження $P_{\theta_n} : H^1(Q_{\theta_n}) \to H^1(Q_*)$ з рівномірною оцінкою

$$\|P_{\theta_n}\| \le C(\delta, C_H). \tag{17}$$

Позначимо $\bar{u}_n = P_{\theta_n}[u_{\theta_n}]$. З оцінок (12), (17) випливає, що існує функція $\breve{u} \in H^1(Q_*)$ така, що

$$\bar{u}_n \rightharpoonup \breve{u} \text{ в } H^1(Q_*). \tag{18}$$

Залишається довести, що звуження $\breve{u}$ на Q_θ є варіаційним розв'язком відповідної задачі в Q_θ. Розглянемо варіаційну рівність

$$\int\limits_{Q_*} \nabla\bar{u}_n \nabla v \chi_n \, dx + \int\limits_{\Gamma_{\theta_n}} b(\bar{u}_n) v \, ds = \int\limits_{\Gamma_{\theta_n}} gv \, ds \tag{19}$$

де v – довільний елемент $H^1(Q_*)$ такий, що $v|_{\Gamma_D} = 0$. Перехід до границі при $n \to \infty$ по Q_* можна виконати так само як в Лемі 2.15 [2]. Для граничного переходу по "невідомій межі" Γ_{θ_n} наслідуємо Лему 3.2 з [13]. Нехай $m > 2$, тоді для достатньо великих значень $n \ge N(m)$ (див. (15))

$$\theta(x_1) - \frac{1}{m} \le \theta_n(x_1) \le \theta(x_1) + \frac{1}{m} \text{ для всіх } x \in [0, 1]. \tag{20}$$

Позначимо

$$l_\theta(x_1) = (1 + [\theta'(x_1)]^2)^{1/2}, \quad l_{\theta_n}(x_1) = (1 + [\theta'_n(x_1)]^2)^{1/2}.$$

Маємо

$$I = \int\limits_{\Gamma_\theta} b(\breve{u}) v ds - \int\limits_{\Gamma_{\theta_n}} b(\bar{u}_n) v ds = \int\limits_0^1 [b(\breve{u}) v|_{x_2=\theta(x_1)} l_\theta(x_1) - b(\bar{u}_n) v|_{x_2=\theta_n(x_1)} l_{\theta_n}(x_1)] dx_1. \tag{21}$$

Інтеграл I можна представити у вигляді суми

$$I = I_1 + I_2 + I_3, \tag{22}$$

де

$$I_1 = \int\limits_0^1 [b(\breve{u})|_{x_2=\theta(x_1)} - b(\breve{u})|_{x_2=\theta(x_1)-\frac{1}{m}}] v|_{x_2=\theta(x_1)} l_\theta(x_1) \, dx_1,$$

$$I_2 = \int\limits_0^1 [b(\breve{u})|_{x_2=\theta(x_1)-\frac{1}{m}} v|_{x_2=\theta(x_1)} - b(\bar{u}_n)|_{x_2=\theta(x_1)-\frac{1}{m}} v|_{x_2=\theta_n(x_1)}] l_\theta(x_1) \, dx_1,$$

$$I_3 = \int\limits_0^1 [b(\bar{u}_n)|_{x_2=\theta(x_1)-\frac{1}{m}} v|_{x_2=\theta_n(x_1)} l_\theta(x_1) - b(\bar{u}_n)|_{x_2=\theta_n} v|_{x_2=\theta_n(x_1)} l_{\theta_n}(x_1)]\, dx_1.$$

Зазначимо, що, внаслідок оцінки (12), послідовність функцій u_{θ_n} є рівномірно обмеженою на відповідних областях Q_{θ_n}, тобто для сталої $M = C(\delta)\|g\|_{L_2(\Gamma_N)}$ (див. (12)) маємо $|u_{\theta_n}|(x) \le M$ для всіх $x \in Q_{\theta_n}$ рівномірно по n, тому ми можемо фактично розглядати функцію $b(w)$ на обмеженому відрізку, наприклад [-2M,2M], і вважати, що існує стала M_1 така, що $|b'(w)| \le M_1$ для всіх $w \in \mathbb{R}$ (в межах доведення даної леми ми можемо підходящим чином змінювати функцію $b(u)$ для великих значень u). Для першого інтегралу маємо

$$\left| b(\check{u}(x_1,\cdot))\Big|_{x_2=\theta(x_1)-\frac{1}{m}}^{x_2=\theta(x_1)} \right| \le M_1 \int\limits_{\theta(x_1)-\frac{1}{m}}^{\theta(x_1)} |\check{u}_{x_2}(x_1,x_2)|dx_2 \le \frac{M_1}{\sqrt{m}} \left(\int\limits_{-1}^{1} |\check{u}_{x_2}(x_1,x_2)|^2 dx_2 \right)^{1/2} \tag{23}$$

і

$$|I_1| \le \frac{C}{\sqrt{m}} \|v\|_{L_2(\Gamma_N)} \|\check{u}\|_{H^1(Q_*)}. \tag{24}$$

Так само, як і в [13], інтеграли I_2, I_3 можна записати у вигляді сум

$$I_2 = \int_0^1 b(\check{u}(x_1, \theta(x_1) - \frac{1}{m}))(v(x_1, \theta_n(x_1)) - v(x_1, \theta(x_1)))l_\theta(x_1)dx_1$$
$$+ \int_0^1 v(x_1, \theta(x_1))(b(\check{u}(x_1, \theta(x_1) - \frac{1}{m}) - b(\bar{u}(x_1, \theta(x_1) - \frac{1}{m})))l_\theta(x_1)dx_1,$$

і відповідно

$$I_3 = \int_0^1 v(x_1, \theta_n(x_1))(b(\bar{u}_n(x_1, \theta(x_1) - \frac{1}{m})) - b(\bar{u}_n(x_1, \theta_n(x_1))))l_\theta(x_1)dx_1$$
$$+ \int_0^1 v(x_1, \theta_n(x_1))b(\bar{u}_n(x_1, \theta_n(x_1)))(l_\theta(x_1) - l_{\theta_n}(x_1)dx_1.$$

З наведених виразів бачимо, що подібним чином можна оцінити інтеграли I_2, I_3, де також використовується (15), компактність оператору сліду (див. Теорему 2.1 в [14]), тобто збіжність $\tau\bar{u}_n \to \tau u$ в $L_2(\Gamma_m)$, де $\Gamma_m = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = \theta(x_1) - \frac{1}{m},\, x_1 \in (0,1)\}$. Маємо

$$|I| \le C(\|v\|_{H_1(Q_*)}) \left(\frac{1}{\sqrt{m}} + \|\bar{u}_n - \check{u}\|_{L_2(\Gamma_m)} + \sup_{(0,1)} |\theta_n - \theta| + \sup_{(0,1)} |\theta_n' - \theta'| \right). \tag{25}$$

Використовуючи оцінку (25) і (15) для фіксованого v можна спочатку обрати достатньо велике значення m, а потім спрямувати n до нескінченності в (19) і одержати (11). Лему 1 доведено. □

З Теореми 2.10 монографії [2], Теореми 1 і Леми 1 випливає теорема існування оптимального розв'язку.

Теорема 2. *Нехай виконано умови (5), (6). Тоді існує принаймні один розв'зок задачі (8).*

4. Необхідна умова оптимальності.

Отримаємо необхідну умову оптимальності за допомогою перетворення області (див. [15]) $\mathcal{T}_\theta : Q \to Q_\theta$

$$y = \mathcal{T}_\theta(x) : \quad \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 + (1 - x_2)\theta(x_1). \end{cases} \tag{26}$$

Позначимо (див. також [15])

$$D\mathcal{T}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (1 - x_2)\theta'(x_1) & 1 - \theta(x_1) \end{pmatrix},$$

$$\gamma_\theta = detD\mathcal{T}_\theta = 1 - \theta(x_1), \tag{27}$$

$$A_\theta(x) = (\gamma_\theta D\mathcal{T}_\theta^{-1} D\mathcal{T}_\theta^{-T}) = \begin{pmatrix} 1 - \theta(x_1) & -(1 - x_2)\theta'(x_1) \\ -(1 - x_2)\theta'(x_1) & \frac{(1-x_2)^2[\theta'(x_1)]^2+1}{1-\theta(x_1)} \end{pmatrix},$$

де через $D\mathcal{T}_\theta^{-T}$ позначено транспоновану обернену матрицю до $D\mathcal{T}_\theta$.

Якщо $\theta \in U_{ad}$ і $u_\theta \in V(Q_\Gamma)$ є варіаційним розв'язком задачі (1)–(4), легко переконатися в тому, що функція $u = u_\theta \circ \mathcal{T}_\theta^{-1}$ належить до $V(\theta)$ і задовольняє рівність

$$\int\limits_Q \nabla u \mathcal{A}_\theta \nabla v \, dx + \int\limits_\Gamma b(u) v l_\theta \, ds = \int\limits_{\Gamma_N} gv \, ds \tag{28}$$

для довільних $v \in V(Q)$. Відмітимо, що задачі (11) і (28) є еквівалентними, тому для всіх $\theta \in U_{ad}$ справджується рівномірна оцінка

$$\|u\|_{L_\infty(Q)} \le M. \tag{29}$$

Визначимо оператор $\mathcal{K} : U_{ad} \to V(Q)$, який співпоставляє елементу $\theta \in U_{ad}$ розв'язок $u \in V(Q)$ варіаційної задачі (29). Позначимо $\mathcal{F} = \tau \circ \mathcal{K} : U_{ad} \to L_2\Gamma_n$. Тепер функцію вартості J можна записати у вигляді

$$J(\theta) = \|\mathcal{F}(\theta) - h\|^2_{L_2(\Gamma_n)} + \alpha\|\theta''\|^2_{L_2(0,1)}. \tag{30}$$

Нехай θ і σ є довільними елементами U_{ad} такими, що $\theta + \sigma \in U_{ad}$. Спочатку переконаємося в існуванні похідної Фреше оператору $\mathcal{K}(\theta)$ у напрямку σ, яку позначимо через $\mathcal{K}'_\sigma(\theta)$.

Позначимо

$$l'_{\theta,\sigma} = \frac{d}{dt} l_{\theta+t\sigma}|_{t=0} = -\frac{\theta'\sigma'}{(1+[\theta']^2)^{1/2}}, \tag{31}$$

і (див. [15])

$$\mathcal{A}'_{\theta,\sigma} = \frac{d}{dt}\mathcal{A}_{\theta+t\sigma}|_{t=0} = \begin{pmatrix} -\sigma & -(1-x_2)\sigma' \\ -(1-x_2)\sigma' & \frac{\sigma+2(1-x_2)^2\theta'\sigma'(1-\theta)+(1-x_2)^2[\theta']^2\sigma}{(1-\theta)^2} \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Для скорочення запису позначимо також $u = \mathcal{K}(\theta)$, $w = \mathcal{K}(\theta+\sigma)$. Для різниці $u - w$ отримаємо

$$\int\limits_Q \nabla(u-w)\mathcal{A}_\theta \nabla v\, dx + \int\limits_\Gamma (b(u) - b(w))vl_\theta\, ds \tag{33}$$

$$= \int\limits_Q \nabla w(\mathcal{A}_{\theta+\sigma} - \mathcal{A}_\theta)\nabla v\, dx + \int\limits_\Gamma b(w))v(l_{\theta+\sigma} - l_\theta)\, ds$$

для всіх $v \in V(Q)$. Якщо в (33) покласти $v = u - w$ і врахувати монотонність функції b, тоді отримаємо

$$\|u-w\|_{H^1(Q)} \le C_1\|\sigma\|_{H^2(0,1)}, \tag{34}$$

де стала C_1 залежить від M, $M_0 = \sup\limits_{(-2M,2M)} b(u)$, δ і $\|\theta\|_{H^2(0,1)}$.

Зауваження 2. Безпосередніми обчисленнями можна переконатися в тому, що для довільного $\theta \in U_{ad}$ існують сталі k_θ, k^θ такі, що

$$k_\theta\xi^2 \le (\mathcal{A}_\theta\xi, \xi) \le k^\theta\xi^2, \text{ для всіх } \xi \in \mathbb{R}^2, \tag{35}$$

проте k_θ наближається до нуля, якщо $\sup\limits_{(0,1)} |\theta'|$ нескінченно зростає.

Зауваження 3. В роботі [15] наведено такі міркування. По-перше, (див. Лему 1.1 в [15]) в $H^2(0,1) \cap H^1_0(0,1)$ напівнорма $\|\theta''\|_{L_2(0,1)}$ еквівалентна повній нормі $\|\theta\|_{H^2(0,1)}$. По-друге, оскільки $\theta = 0 \in U_{ad}$, для оптимального розв'язку θ_* маємо

$$J(\theta_*) = \|\mathcal{F}(\theta_*) - h\|^2_{L_2(\Gamma_n)} + \alpha\|\theta''_*\|^2_{L_2(0,1)} \le J(0) = \|\mathcal{F}(0) - h\|^2_{L_2(\Gamma_n)},$$

отже (див.(10))

$$\|\theta_*\|_{H^2(0,1)} \le C_*(\alpha_*, \|\mathcal{F}(0) - h\|^2_{L_2(\Gamma_n)}). \tag{36}$$

Формальним диференцюванням (28), одержимо задачу: знайти $z \in V(Q)$ таку, що

$$\int\limits_Q \nabla z\mathcal{A}_\theta\nabla v\, dx + \int\limits_\Gamma b'(u)zvl_\theta\, ds = -\int\limits_Q \nabla u\mathcal{A}'_{\theta,\sigma}\nabla v\, dx - \int\limits_\Gamma b(u)uvl'_{\theta,\sigma}\, ds, \tag{37}$$

для довільних $v \in V(Q)$. Зауважимо, що задача (37) є лінійною, тому існування її розв'язку можна довести за допомогою теореми Лакса–Мільграма. Маємо переконатися в тому, що $z = \mathcal{K}'_\sigma(\theta)$.

На підставі (29), (31), (32), (35) і нерівності Коші, одержимо оцінку

$$\|z\|_{H^1(Q)} \le C_2 \|\sigma\|_{H^2(0,1)}, \tag{38}$$

де стала C_2 залежить від M, M_0, $M_1 = \sup\limits_{(-2M,2M)} b'(u)$, δ і $\|\theta\|_{H^2(0,1)}$.

Згідно з означенням похідної Фреше, нам треба оцінити функцію $U = u - w - z$. Після рутинних обчислень отримаємо

$$\begin{gathered}\int\limits_Q \nabla U \mathcal{A}_{\theta+\sigma} \nabla v \, dx + \int\limits_\Gamma b'(u) U v l_{\theta+\sigma} \, ds = -\int\limits_Q \nabla u (\mathcal{A}_{\theta+\sigma} - \mathcal{A}_\theta - \mathcal{A}'_{\theta,\sigma}) \nabla v \, dx \\ -\int\limits_Q \nabla z (\mathcal{A}_{\theta+\sigma} - \mathcal{A}_\theta) \nabla v \, dx - \int\limits_\Gamma (b(w) - b(u) - b'(u)(w-u)) v l_{\theta+\sigma} \, ds \\ -\int\limits_\Gamma b(u) v (l_{\theta+\sigma} - l_\theta - l'_{\theta,\sigma}) \, ds - \int\limits_\Gamma b'(u) z v (l_{\theta+\sigma} - l_\theta) \, ds.\end{gathered} \tag{39}$$

Візьмемо $v = U$ в (39). Для довільної функції функції $f \in C^2(\mathbb{R})$ справджується формула Тейлора

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \int\limits_0^1 (1-\mu) f''(x + \mu(y-x)) d\mu (y-x)^2. \tag{40}$$

Формулу (40) можна використати для функцій $b(u)$, $\mathcal{A}_\theta$, l_θ. За допомогою (34), (38, (39), (40), з (39) одержимо оцінку

$$\|U\|_{H^1(Q)} = \|w - u - z\|_{H^1(Q)} \le C_3 \|\sigma\|_{H^2(0,1)}, \tag{41}$$

де C_3 залежить від C_*, C_1, C_2, δ, $\|\theta\|_{H^2(0,1)}$. Остання оцінка доводить, що $z = \mathcal{K}'_\sigma(\theta)$.

Повернемось до функції вартості у вигляді (32). Т.ч., якщо θ_* оптимальний розв'язок і u_{θ_*} відповідний розв'зок задачі (37), тоді

$$\int\limits_{\Gamma_N} u_{\theta_*} \mathcal{F}'_{\theta_*}(\rho - \theta_*) \, ds + \int\limits_0^1 \theta''_*(\rho'' - \theta''_*) \, dx_1 \ge 0, \tag{42}$$

де $\mathcal{F}'_{\theta_*}(\rho - \theta_*) = \tau \circ \mathcal{K}'_{\theta_*}(\rho - \theta_*)$ і $z = \mathcal{F}'_{\theta_*}(\rho - \theta_*)$ знаходиться з розв'язання задачі (37) при $\theta = \theta_*$, $u = u_{\theta_*}$, $\sigma = \rho - \theta_*$.

Теорема 3. *Нехай виконано умови (5), (6) і $\theta_* \in U_{ad}$ – оптимальний розв'язок задачі (8). Тоді виконується умова (42).*

Цитована література

1. *Sokolowski I., Zolesio J.-P.* Introduction to shape optimization. Shape sensitivity analysis. – Berlin etc.: Springer–Verlag, 1992.
2. *Haslinger J., Mäkinen R.A.E.* Introduction to shape optimization. Theory, approximation, and computation. – Philadelphia: SIAM, 2002.
3. *Henrot A., Pierre M.* Variation et optimisation de forms. – Berlin etc.: Springer–Verlag, 2005.
4. *Pironneau O.* Optimal shape design for elliptic systems. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1984.
5. *Rabago J.F.T., Azegami H.* Shape optimization approach to detect-shape identifiction with convective boundary condition via partial boundary measurement // Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics. –2019. – V. 36. – P. 131-–176.
6. *Laurain A., Meftahi H.* Shape and parameter for the Robin transmission inverse problem // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. – 2016. – V. 24. – P. 643-662.
7. *Dapogny Ch., Lebbe N., Oudet E.* Optimization of the shape of regions supporting boundary conditions // Numerische Mathematik. – 2020. – V. 146. – P. 51–104.
8. *Cao H., Pereverzev S.V., Sincich E.* Discretized Tikhonov regularization for Robin boundaries localization // Applied Mathematics and Computation. – 2014. – V. 226. – P. 374–385.
9. *Kaup P.G., Santosa F.* Nondestructing evaluation of corrosion damage using electrostatic measurements // J. Nondestructive Eval. – 1995. – V. 14. – P. 127–136.
10. *Engl H.W., Hanke M. and Neubauer A.* Regularization of Inverse Problems. – Dordrecht: Kluwer, 1996.
11. *Tröltzsch F.* Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen. – Berlin etc.: Springer–Verlag, 2009.
12. *Chenais D.* On the existence of a solution in a domain identification problem // J. Math. Anal. Appl. – 1975. – V. 52. – P. 189–219.
13. *Haslinger J., Neittanmäki*. Penalty method in design optimization of systems goverened by uniliteral boundary value probkem // Annale Faculte des Sciences Toulouse. – 1983. – V. 5. – P. 199–216.
14. *Ladyzhenskaya, O.A., Ural'tseva, N.N.* Linear and quasilinear elliptic equations. – New York: Academic Press, 1968.
15. *Kiniger B., Vexler B.* A priori error estimates for unite element discretizations of a shape optimization problem // ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. – 2013. – V. 47. – P. 1733–1763.

References

1. Sokolowski, I., Zolesio, J.-P. (1992). *Introduction to shape optimization. Shape sensitivity analysis.* Springer series in Computational Mathematics, 16. Berlin etc.: Springer–Verlag.
2. Haslinger, J., Mäkinen, R.A.E. (2002). *Introduction to shape optimization. Theory, approximation, and computation*, Advances in Design and Control, 7. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics SIAM.
3. Henrot, A., Pierre, M. (2005). *Variation et optimisation de forms* Mathematics and Applications. Berlin etc., Springer–Verlag.
4. Pironneau, O. (1984). *Optimal shape design for elliptic systems.* Berlin etc., Springer-Verlag.
5. Rabago, J.F.T., Azegami, H. (2019). Shape optimization approach to detect-shape identifiction with convective boundary condition via partial boundary measurement. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 36*, 131–176.
6. Laurain, A., Meftahi, H. (2016). Shape and parameter for the Robin transmission inverse problem. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems, 24*, 643–662.
7. Dapogny, Ch., Lebbe, N., Oudet, E. (2020). Optimization of the shape of regions supporting boundary conditions. *Numerische Mathematik, 146*, 51–104.
8. Cao, H., Pereverzev, S.V., Sincich, E. (2014). Discretized Tikhonov regularization for Robin boundaries localization . *Applied Mathematics and Computation, 226*, 374–385.
9. Kaup, P.G., Santosa, F. (1995). Nondestructing evaluation of corrosion damage using electrostatic measurements. *J. Nondestructive Eval., 14* 127–136.

10. Engl, H.W., Hanke, M., Neubauer, A. (1996). *Regularization of Inverse Problems.* Dordrecht, Kluwer.
11. Tröltzsch, F. (2009). *Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen*, Berlin etc., Springer-Verlag.
12. Chenais, D. (1975). On the existence of a solution in a domain identification problem. *J. Math. Anal. Appl., 52*, 189–219.
13. Haslinger, J., Neittanmäki. (1983). Penalty method in design optimization of systems goverened by uniliteral boundary value probkem. *Annale Faculte des Sciences Toulouse, 5*, 199–216.
14. Ladyzhenskaya, O.A., Ural'tseva, N.N. (1968). *Linear and quasilinear elliptic equations.* New York, Academic Press.
15. Kiniger, B., Vexler, B. (2013). A priori error estimates for unite element discretizations of a shape optimization problem. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 47*, 1733–1763.

M.V. Krasnoshchok

Shape optimization in elliptic problem with nonlinear boundary conditions.

Shape optimization problems have a long history of mathematical study and a wide range of applications. In recent decades there has been an interest in solving these problems with partial differential equation (PDE) constraints. In practice we often meet problems, leading to the problem of finding an "optimal" shape of systems, the behaviour of which is described by elliptic equations. Problems of this type have been studied by many authors from mathematical as well as from computation point of view. When surfaces of a specimen which have been damaged by a corrosion aggressive attack are not accessible to direct inspection, one is forced to rely on over-determined measurements performed on the accessible part of the boundary. In this study, we consider such a non-destructive inspection technique modelled as a shape optimization problem, which consists of determining an unknown part of the boundary of a simply-connected bounded domain. The solution of Laplace equation u satisfies nonlinear Robin condition on an unknown part of boundaty. We have Dirichlet and Neumann boundary conditions on the rest of boundary. We look for a curve, that minimizes the cost functional represented as a sum of regularizing term and L_2-norm of the difference of the state variable u and some additional measurement on the part of admissible boundary. The existence of at least one curve is proved for an appropriate choice of the class of admissible curves. This will lead us to study properties of continuity of J and compactness of the set of controls. We shall characterize the shape derivative of the cost functional with respect to perturbations of the domain defined by a sufficiently smooth function. In order obtain necessary optimality condition we use the mapping method. This method transforms the unknown domain to a fixed one. The problem under consideration is essentially nonlinear. We prove Frechet differentiability of the solution operator.

Keywords: *Laplace equation, optimality conditions, Sobolev spaces.*

Ін-т прикл. математики і механіки НАН України, Слов'янськ
`iamm012@ukr.net`

Отримано 27.09.21