УДК 517.9
DOI: 10.37069/1683-4720-2021-35-7

©2021. **С.М. Чуйко, О.В. Чуйко, К.С. Шевцова**

ЛІНІЙНА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-АЛГЕБРАЇЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА З НЕВИРОДЖЕНИМ ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

Дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач започатковане у роботах К. Вейєрштрасса, М.М. Лузіна та Ф.Р. Гантмахера. Систематичному вивченню диференціально-алгебраїчних крайових задач присвячені роботи С. Кемпбелла, Ю.Є. Бояринцева, В.Ф. Чистякова, А.М. Самойленка, М.О. Перестюка, В.П. Яковця, О.А. Бойчука, А. Ілчманна та Т. Рейса. Вивчення диференціально-алгебраїчних крайових задач пов'язане з численними застосуваннями таких задач у теорії нелінійних коливань, у механіці, біології, радіотехніці, теорії керування, теорії стійкості руху. В той же час дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач тісно пов'язане з дослідженням імпульсних крайових задач для диференціальних рівнянь, започаткованим у роботах М.М. Боголюбова, А.Д. Мишкіса, А.М. Самойленка, М.О. Перестюка та О.А. Бойчука. Отже, актуальною проблемою є перенесення результатів, отриманих у статтях С. Кемпбелла, А.М. Самойленка, М.О. Перестюка та О.А. Бойчука на імпульсні крайові задачі для диференціально-алгебраїчних рівнянь, зокрема, знаходження необхідних та достатніх умов існування шуканих розв'язків, а також, конструкції оператора Гріна задачі Коші та узагальненого оператора Гріна імпульсної крайової задачі для диференціально-алгебраїчного рівняння.

У статті знайдено умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчного рівняння з невиродженим імпульсним впливом. Знайдено умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна для лінійної нетерової крайової задачі для диференціально-алгебраїчного рівняння з невиродженим імпульсним впливом. Запропонована у статті схема дослідження лінійних нетерових крайових задач для диференціально-алгебраїчного рівняння з невиродженим імпульсним впливом у критичних і некритичних випадках може бути перенесена на крайові задачі для диференціально-алгебраїчних рівнянь з виродженим імпульсним впливом. Побудована схема аналізу лінійної нетерової крайової задачі для диференціально-алгебраїчного рівняння з невиродженим імпульсним впливом узагальнює результати С. Кемпбелла, А.М. Самойленка, М.О. Перестюка та О.А. Бойчука і може бути поширена для доведення розв'язності та побудови розв'язків нелінійної імпульсної крайової задачі для диференціально-алгебраїчного рівняння у критичних і некритичних випадках.

MSC: 34N05.

Ключові слова: *диференціально-алгебраїчні системи, нетерові крайові задачі, невироджений імпульсний вплив.*

1. Постановка задачі.

Розглянемо задачу про знаходження розв'язків [1, 2]

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[a, b] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\}$$

лінійного неоднорідного диференціально-алгебраїчного рівняння

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t), \ t \neq \tau_i \tag{1}$$

з невиродженим ($\det(I_n + S_i) \neq 0$) імпульсним впливом

$$\Delta z(\tau_i) = S_i z(\tau_i - 0) + a_i, \ i = 1, \ 2, \ \dots \ , \ p, \tag{2}$$

які задовольняють крайовій умові

$$\ell z(\cdot) = \alpha \in \mathbb{R}^q. \tag{3}$$

Тут $A(t), \ B(t) \in \mathbb{C}_{m\times n}[a,b]$ – неперервні матриці, $f(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ – неперервний вектор; $\ell z(\cdot)$ — лінійний обмежений векторний функціонал

$$\ell z(\cdot) : \mathbb{C}^1\left\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\right\} \to \mathbb{R}^q.$$

Матрицю $A(t)$ припускаємо, взагалі кажучи, прямокутною: $m \neq n$, або ж квадратною, але виродженою матрицею сталого рангу. Розв'язок $z(t)$ вважатимемо неперервним зліва

$$z(\tau_j) = \lim_{t\to\tau_j+0} z(t), \ j = 1, \ 2, \ \dots \ , \ p.$$

Крім того, розв'язок $z(t)$ нетерової ($q \neq n$) диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1)–(3) з імпульсним впливом у точках

$$a < \tau_1 < \tau_2 < \ ... < \tau_p < b,$$

можливо, зазнає розриви

$$\Delta z(\tau_i) := z(\tau_i + 0) - z(\tau_i - 0), \ i = 1, \ 2, \ \dots \ , \ p$$

першого роду; тут S_i– сталі $(n \times n)$-вимірні матриці, $a_i \in \mathbb{R}^n$.

Дослідженню диференціально-алгебраїчних рівнянь за допомогою центральної канонічної форми і досконалих пар і трійок матриць присвячені монографії [3–5]. Достатні умови звідності диференціально-алгебраїчної лінійної системи до центральної канонічної форми були отримані А.М. Самойленком і В.П. Яковцем [6]. У статтях [7, 8] запропоновано достатні умови розв'язності, а також конструкцію узагальненого оператора Гріна для лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (3) без використання центральної канонічної форми і досконалих пар і трійок матриць.

Задача (1), (2) є узагальненням задач з невиродженим імпульсним впливом [1] на випадок диференціально-алгебраїчної лінійної системи (1). За умови $A(t) \equiv I_n$ задача про знаходження умов існування та побудову розв'язків системи диференціальних рівнянь (1) з невиродженим імпульсним впливом була розв'язана А.М. Самойленком та М.О. Перестюком у монографії [1] та узагальнювала задачу з крайовими умовами типу "shock conditions" [9]. За умови [7, 8]

$$P_{A^*(t)} \equiv 0 \tag{4}$$

система (1) розв'язна відносно похідної

$$z' = A^+(t)B(t)z + \mathfrak{F}_0(t, \nu_0(t)); \tag{5}$$

тут rank $A(t) = m \leq n$. Крім того

$$\mathfrak{F}_0(t, \nu_0(t)) := A^+(t)f(t) + P_{A_{\rho_0}}(t)\nu_0(t),$$

$A^+(t)$ – псевдообернена (за Муром–Пенроузом) матриця, $P_{A^*(t)}$ – матриця-ортопроектор [2]:

$$P_{A^*}(t) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(A^*(t)),$$

$P_{A_{\rho_0}}(t)$ – $(n \times \rho_0)$-вимірна матриця, утворена із ρ_0 лінійно-незалежних стовпців $(n \times n)$– матриці-ортопроектора

$$P_A(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(A(t)).$$

Таким чином, за умови (4) система (5), розв'язана відносно похідної, як і її розв'язок, залежать від довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$. Позначимо $X_0(t)$ нормальну фундаментальну матрицю

$$X_0'(t) = A^+(t)B(t)X_0(t), \ X_0(a) = I_n$$

отриманої традиційної системи звичайних диференціальних рівнянь (5). За умови (4) для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$ система (5), а відповідно і система (1), має розв'язок вигляду [7, 8]

$$z(t, c) = X_0(t)c + K_0\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), \ c \in \mathbb{R}^n,$$

де

$$K_0\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t) := X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)\,\mathfrak{F}_0(s, \nu_0(s))\,ds, \ a \leq t \leq \tau_1$$

– узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1).

2. Критичний випадок.

За умови (4) система (1) розв'язна для довільної неоднорідності $f(t)$. Крім того, нормальна фундаментальна матриця $X_0(t)$ невироджена, тому для розв'язання диференціально-алгебраїчної системи (1), (2) з невиродженим імпульсним впливом застосовний метод, запропонований А.М. Самойленком та М.О. Перестюком у монографії [1]. Загальний розв'язок задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1) з невиродженим імпульсним впливом (2) для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$ на відрізку $[\tau_1, \tau_2]$ зображується у вигляді

$$z(t, \gamma_1) = X_0(t)\gamma_1 + X_0(t)\int_{\tau_1}^t X_0^{-1}(s)\,\mathfrak{F}_0(s, \nu_0(s))\,ds, \ \gamma_1 \in \mathbb{R}^n.$$

Нормальна фундаментальна матриця $X_0(t)$ невироджена, тому

$$\gamma_1 = X_0^{-1}(\tau_1)(I_n + S_1)K_0\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\tau_1) + X_0^{-1}(\tau_1)\, a_1.$$

Таким чином, за умови (4) для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$ система (1) з невиродженим імпульсним впливом (2) має розв'язок вигляду

$$z(t,c) = X_1(t)c + K_1\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), \;\; c \in \mathbb{R}^n,$$

де

$$X_1(t) = X_0(t)X_0^{-1}(\tau_1)(I_n + S_1)X_0(\tau_1), \;\; \tau_1 \le t < \tau_2,$$

крім того

$$K_1\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t) := X_0(t)X_0^{-1}(\tau_1)(I_n + S_1)K_0\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\tau_1) +$$

$$+ X_0(t)X_0^{-1}(\tau_1)\, a_1 + X_0(t)\int_{\tau_1}^{t} X_0^{-1}(s)\, \mathfrak{F}_0(s, \nu_0(s))\, ds, \;\; \tau_1 \le t < \tau_2$$

– узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1) з невиродженим імпульсним впливом (2). Продовжуючи, за умови (4), для фіксованої неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$ отримуємо розв'язок системи (1) з невиродженим імпульсним впливом (2)

$$z(t,c) = X_0(t)\, c + K_p\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), \;\; c \in \mathbb{R}^n,$$

де

$$X_p(t) = X_0(t)X_0^{-1}(\tau_p)(I_n + S_p)X_{p-1}(\tau_p), \;\; \tau_p \le t \le b,$$

крім того

$$K_p\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t) := X_0(t)X_0^{-1}(\tau_p)(I_n + S_p)K_{p-1}\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\tau_p) +$$

$$+ X_0(t)X_{p-1}^{-1}(\tau_p)\, a_p + X_{p-1}(t)\int_{\tau_p}^{t} X_{p-1}^{-1}(s)\, \mathfrak{F}_0(s, \nu_0(s))\, ds, \;\; \tau_p \le t \le b$$

– узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1) з невиродженим імпульсним впливом (2). Таким чином, за умови (4), для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$ отримуємо розв'язок системи (1) з невиродженим імпульсним впливом (2)

$$z(t,c) = X(t)\, c + K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), \;\; c \in \mathbb{R}^n,$$

де [10]

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t), & a \le t < \tau_1, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_p(t), & \tau_p \le t \le b, \end{cases}$$

крім того

$$K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t) = \begin{cases} K_0\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), & a \le t < \tau_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K_p\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), & \tau_p \le t \le b \end{cases}$$

– узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1) з невиродженим імпульсним впливом (2). Останній оператор у випадку $A(t) \equiv I_n$ дещо відрізняється від побудованого у статті [10]. На відміну від статті [12], отримана нормальна фундаментальна матриця $X(t)$ системи (1) з невиродженим імпульсним впливом (2) невироджена.

За умови $A(t) \equiv I_n$ задача про знаходження умов існування та побудову розв'язків лінійної крайової задачі (1)–(3) з невиродженим імпульсним впливом була розв'язана А.М. Самойленком, М.О. Перестюком та О.А. Бойчуком у статті [11]. Таким чином, метою даної статті є перенесення результатів [3–8] на диференціально-алгебраїчну крайову задачу (1)–(3) з невиродженим імпульсним впливом.

Підставляючи загальний розв'язок $z(t, c)$ задачі Коші $z(a) = c$ для диференціально-алгебраїчної системи (1) з невиродженим імпульсним впливом (2) у крайову умову (3), приходимо до лінійного алгебраїчного рівняння

$$Q\, c = \alpha - \ell K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\cdot). \tag{6}$$

Рівняння (6) розв'язне тоді і тільки тоді, коли

$$P_{Q_d^*}\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{7}$$

Тут P_{Q^*} – ортопроектор: $\mathbb{R}^q \to \mathbb{N}(Q^*)$; матриця $P_{Q_d^*}$ утворена з d лінійно-незалежних рядків ортопроектора P_{Q^*}, крім того $Q := \ell X(\cdot) \in \mathbb{R}^{q\times n}$. За умови (7) і тільки за неї загальний розв'язок рівняння (6)

$$c = Q^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\cdot)\Big\} + P_{Q_r}\, c_r,\ c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає загальний розв'язок лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1)–(3)

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + X(t)Q^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](\cdot)\Big\} + K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t),\ c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут P_Q – матриця-ортопроектор: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q)$; матриця $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ утворена з r лінійно-незалежних стовпців ортопроектора P_Q. Зазначимо, що навідміну від [5] при доведенні теореми не використовується вимога про приведення системи (1) до центральної канонічної форми. Таким чином, доведена наступна лема.

Лема. *За умови (4) для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$ розв'язок задачі Коші $z(a) = 0$ для системи (1) з невиродженим імпульсним впливом (2)*

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\left\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\right\}$$

має вигляд

$$z(t,c) = X(t)\,c + K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t),\ \ c \in \mathbb{R}^n.$$

Для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$, за умови (7) і тільки за неї, загальний розв'язок лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1)–(3)

$$z(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s);\nu_0(s);\alpha\Big](t),\ \ X_r(t) := X(t)P_{Q_r},\ \ c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\Big[f(s);\nu_0(s);\alpha\Big](t) := X(t)Q^+\left\{\alpha - \ell K\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](\cdot)\right\} + K\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](t)$$

диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1)–(3).

Доведена лема узагальнює відповідні результати, отримані для задач з невиродженим імпульсним впливом [1,2] на випадок диференціально-алгебраїчної лінійної системи (1). Відзначимо, що при доведенні леми ми не використовували центральну канонічну форму і досконалі пари матриць.

Приклад 1. *Знайдемо розв'язок*

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\left\{[0,2\pi] \setminus \{\pi\}_I\right\}$$

лінійної диференціально-алгебраїчної антиперіодичної крайової задачі

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t),\ \ t \neq \tau_1 := \pi,\ \ \ell z(\cdot) := z(0) + z(2\pi) = 0 \qquad (8)$$

з невиродженим $(\det(I_n + S_1) \neq 0)$ *імпульсним впливом*

$$\Delta z(\tau_1) = S_1\, z(\tau_1 - 0). \qquad (9)$$

Тут

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \end{pmatrix},\ \ B(t) := \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -\cos t \end{pmatrix},$$

крім того

$$f(t) := \begin{pmatrix} 2\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \ S_1 := -2\, I_3.$$

Оскільки умову (4) виконано, система (8), розв'язна відносно похідної, а її розв'язок, залежить від довільної неперервної скалярної функції $\nu_0(t)$. Покладемо $\nu_0(t) := 0$, при цьому система (8), має розв'язок вигляду

$$z(t,c) = X_0(t)c + K_0\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), \ 0 \le t < \tau_1, \ c \in \mathbb{R}^3,$$

де

$$K_0\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1-\cos 2t \\ -2\sin 2t \\ 1-\cos 2t \end{pmatrix}$$

– узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(0) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (8), крім того

$$X_0(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos t & \sin t & \cos t - 1 \\ -2\,\sin t & 2\,\cos t & -2\,\sin t \\ \cos t - 1 & \sin t & 1+\cos t \end{pmatrix}.$$

Система (8) з невиродженим імпульсним впливом (9) має розв'язок вигляду

$$z(t,c) = X_1(t)c + K_1\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), \ \tau_1 \le t \le 2\pi, \ c \in \mathbb{R}^3,$$

де

$$K_1\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t) = K_0\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t),$$

крім того

$$X_1(t) = -X_0(t).$$

Крайова задача (8) з невиродженим імпульсним впливом (9) являє собою критичний випадок, оскільки $P_{Q^*} = I_3$. В той же час, крайова задача (8) з невиродженим імпульсним впливом (9) розв'язна, оскільки умову (7) виконано. Загальний розв'язок

$$z(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s);\nu_0(s);\alpha\Big](t), \ X_r(t) = X(t), \ c_r \in \mathbb{R}^3$$

крайової задачі (8) з невиродженим імпульсним впливом (9) визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\Big[f(s);\nu_0(s);\alpha\Big](t) = K_1\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t) = K_0\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t).$$

У загальному випадку, а саме для довільної неперервної вектор-функції

$$\nu_0(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0}[a,b]$$

розв'язність лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1)–(3) істотно залежить від вибору цієї функції. Покладемо

$$\nu_0(t) := \Psi(t)\gamma, \ \gamma \in \mathbb{R}^w;$$

тут

$$\Psi(t) \in \mathbb{C}_{\rho_0 \times w}[a,b]$$

– довільна неперервна матриця повного рангу. За умови (4) узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1) з невиродженим імпульсним впливом (2) зображується у вигляді

$$K\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t) = K\Big[f(s)\Big](t) + K\Big[P_{A_{\rho_0}}(s)\nu_0(s)\Big](t).$$

Позначимо матрицю

$$\mathcal{D} := \Big[\ Q\ ;\ \ell K\Big[P_{A_{\rho_0}}(s)\Psi(s)\Big](\cdot)\ \Big] \in \mathbb{R}^{q\times(n+w)}.$$

Підставляючи загальний розв'язок задачі Коші для диференціально-алгебраїчного рівняння (1) з невиродженим імпульсним впливом (2) у крайову умову (3), приходимо до лінійного алгебраїчного рівняння

$$\mathcal{D}\,\check{c} = \alpha - \ell K\Big[f(s)\Big](\cdot), \ \check{c} := \operatorname{col}(c, \gamma) \in \mathbb{R}^{n+w}. \tag{10}$$

Рівняння (10) розв'язне тоді і тільки тоді, коли

$$P_{\mathcal{D}^*_d}\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{11}$$

Тут $P_{\mathcal{D}^*}$ – ортопроектор:

$$\mathbb{R}^q \to \mathbb{N}(\mathcal{D}^*);$$

матриця $P_{\mathcal{D}^*_d}$ утворена з d лінійно-незалежних рядків ортопроектора $P_{\mathcal{D}^*}$. За умови (11) і тільки за неї загальний розв'язок рівняння (10)

$$\check{c} = \mathcal{D}^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} + P_{\mathcal{D}}\,\delta, \ \delta \in \mathbb{R}^{n+w}$$

визначає загальний розв'язок лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1)–(3)

$$z(t,\delta) = K\Big[f(s)\Big](t) + \Big\{X(t); K\Big[P_{A_{\rho_0}}\Psi(s)\Big](t)\Big\}\mathcal{D}^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} +$$

$$+\left\{X(t); K\left[P_{A_{\rho_0}}(s)\Psi(s)\right](t)\right\}P_{\mathcal{D}}\,\delta,\ \ \delta \in \mathbb{R}^{n+w}.$$

Тут $P_{\mathcal{D}}$ – матриця-ортопроектор: $\mathbb{R}^{n+w} \to \mathbb{N}(\mathcal{D})$. Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема. *За умови (4) для фіксованої неперервної матриці повного рангу $\Psi(t)$ у випадку (11) розв'язок лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1)–(3) з невиродженим імпульсним впливом*

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\left\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\right\}$$

має вигляд

$$z(t, c_r) = W_r(t)c_r + G\left[f(s); \psi(s); \alpha\right](t),\ \ c_r \in \mathbb{R}^r;$$

тут

$$G\left[f(s); \psi(s); \alpha\right](t) := K\left[f(s)\right](t) + W(t)\mathcal{D}^+\left\{\alpha - \ell K\left[f(s)\right](\cdot)\right\}$$

– узагальнений оператор Гріна диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1)–(3) з невиродженим імпульсним впливом. Матриця $X_r(t)$ утворена з r лінійно-незалежних стовпців матриці $W(t)P_{\mathcal{D}}$ тут

$$W(t) := \left\{X(t); K\left[P_{A_{\rho_0}}(s)\Psi(s)\right](t)\right\}.$$

Відзначимо, що навідміну від [5,13] при доведенні теореми не використовується вимога про приведення системи (1) до центральної канонічної форми. На відміну від [14, 15] доведена теорема узагальнює узагальнений оператор Гріна, отриманий для диференціальної крайової задачі, до диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1)–(3) з невиродженим імпульсним впливом.

3. Приведення до некритичного випадку.

За умови $P_{\mathcal{D}^*} \neq 0$ будемо казати, що диференціально-алгебраїчна крайова задача (1)–(3) з невиродженим імпульсним впливом представляє критичний випадок, і навпаки: за умови $P_{Q^*} \neq 0,\ P_{\mathcal{D}^*} = 0$ будемо казати, що диференціально-алгебраїчна крайова задача (1)–(3) з невиродженим імпульсним впливом приведена до некритичного випадку. Останнє означення є узагальненням некритичного випадку ($P_{Q^*} = 0$) для нетерової крайової задачі для диференціальної системи, яка отримується з системи (1) при $A(t) \equiv I_n$, на випадок залежності узагальненого оператора Гріна задачі Коші для диференціально-алгебраїчної системи (1) від довільної неперервної функції [8].

Приклад 2. *Знайдемо розв'язок лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі*

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t),\ \ t \neq \tau_1 := \pi,\ \ \ell z(\cdot) := \Omega\left(z(0) + z(2\pi)\right) = 0 \qquad (12)$$

з невиродженим $(\det(I_n + S_1) \neq 0)$ *імпульсним впливом (9). Тут*

$$\Omega := \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

матриці $A(t), S_1$ *та функція* $f(t)$ *наведені у прикладі 1.*

Оскільки умову (4) виконано, система (12), розв'язна відносно похідної, а її розв'язок, залежить від довільної неперервної скалярної функції $\nu_0(t)$. Покладемо $\nu_0(t) := 1$, при цьому система (12), має розв'язок вигляду

$$z(t,c) = X_0(t)c + K_0\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), \ 0 \le t < \tau_1, \ c \in \mathbb{R}^3,$$

де

$$K_0\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix}$$

– узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(0) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (12), крім того

$$X_0(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\cos t & \sin t & \cos t - 1 \\ -2\sin t & 2\cos t & -2\sin t \\ \cos t - 1 & \sin t & 1+\cos t \end{pmatrix}.$$

Система (12) з невиродженим імпульсним впливом (9) має розв'язок вигляду

$$z(t,c) = X_1(t)c + K_1\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t), \ \tau_1 \le t \le 2\pi, \ c \in \mathbb{R}^3,$$

де

$$K_1\Big[f(s), \nu_0(s)\Big](t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-\cos 2t \\ -2\sin 2t \\ 1-\cos 2t \end{pmatrix}, \ X_1(t) = -X_0(t).$$

Крайова задача (12) з невиродженим імпульсним впливом (9) являє собою критичний випадок, оскільки $P_{Q^*} = I_3$, причому крайова задача (8) з невиродженим імпульсним впливом (9) для фіксованої функції $\nu_0(t) := 1$ не розв'язна, оскільки умову (7) не виконано. В той же час для функції $\Psi(t) := 1$ крайова задача (8) з невиродженим імпульсним впливом (9) являє некритичний випадок, оскільки

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– матриця повного рангу, отже умову (11) виконано. Загальний розв'язок

$$z(t,c_r) = W_r(t)c_r + G\Big[f(s); \nu_0(s); \alpha\Big](t), \ c_r \in \mathbb{R}^3$$

крайової задачі (12) з невиродженим імпульсним впливом (9) визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\Big[f(s);\nu_0(s);\alpha\Big](t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1-\cos 2t \\ -2\sin 2t \\ 1-\cos 2t \end{pmatrix};$$

тут

$$W_r(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos t & \sin t & \cos t - 1 \\ -2\,\sin t & 2\,\cos t & -2\,\sin t \\ \cos t - 1 & \sin t & 1+\cos t \end{pmatrix},\ 0 \le t < \tau_1,$$

а також

$$W_r(t) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos t & \sin t & \cos t - 1 \\ -2\,\sin t & 2\,\cos t & -2\,\sin t \\ \cos t - 1 & \sin t & 1+\cos t \end{pmatrix},\ \tau_1 \le t \le 2\pi.$$

У найпростішому, а саме, у некритичному випадку $P_{Q^*} = 0$ умова (7) виконується, отже лінійна диференціально-алгебраїчна крайова задача (1)–(3) розв'язна для довільних неоднорідностей $f(t)$ та α.

Наслідок. *За умов (4) та $P_{Q^*} = 0$ для довільної неперервної вектор-функції $\nu_0(t)$ та довільних неоднорідностей $f(t)$ та α розв'язок лінійної диференціально-алгебраїчної крайової задачі з невиродженим імпульсним впливом (1)–(3)*

$$z(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\Big[f(s);\nu_0(s);\alpha\Big](t),\ X_r(t) := X(t)P_{Q_r},\ c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\Big[f(s);\nu_0(s);\alpha\Big](t) := X(t)Q^+\Big\{\alpha - \ell K\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](\cdot)\Big\} + K\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](t).$$

Приклад 3. *Знайдемо розв'язок лінійної періодичної диференціально-алгебраїчної крайової задачі*

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + f(t),\ t \ne \tau_1 := \pi,\ \ell z(\cdot) := z(0) - z(2\pi) = 0 \qquad (13)$$

з невиродженим $(\det(I_n + S_1) \ne 0)$ *імпульсним впливом (9). Матриці $A(t), S_1$ та функція $f(t)$ наведені у прикладі 1.*

Оскільки умову (4) виконано, система (13), розв'язна відносно похідної, а її розв'язок, залежить від довільної неперервної скалярної функції $\nu_0(t)$. Покладемо $\nu_0(t) := \sin t$, при цьому система (13), має розв'язок вигляду

$$z(t,c) = X_0(t)c + K_0\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](t),\ 0 \le t < \tau_1,\ c \in \mathbb{R}^3,$$

де

$$K_0\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](t)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5-4\cos t-\cos 2t \\ -2\sin 2t \\ -3+4\cos t-\cos 2t \end{pmatrix}$$

— узагальнений оператор Гріна задачі Коші $z(0)=0$ для диференціально-алгебраїчної системи (13), крім того

$$X_0(t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos t & \sin t & \cos t-1 \\ -2\,\sin t & 2\,\cos t & -2\,\sin t \\ \cos t-1 & \sin t & 1+\cos t \end{pmatrix}.$$

Система (8) з невиродженим імпульсним впливом (9) має розв'язок вигляду

$$z(t,c)=X_1(t)c+K_1\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](t),\ \ \tau_1\le t\le 2\pi,\ \ c\in\mathbb{R}^3,$$

де

$$K_1\Big[f(s),\nu_0(s)\Big](t)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -11-4\cos t-\cos 2t \\ -2\sin 2t \\ 13+4\cos t-\cos 2t \end{pmatrix},$$

крім того

$$X_1(t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Крайова задача (13) з невиродженим імпульсним впливом (9) являє собою некритичний випадок, оскільки $P_{Q^*}=0$, отже, крайова задача (13) з невиродженим імпульсним впливом (9) розв'язна, оскільки умову (7) виконано. Розв'язок

$$z(t,c_r)=G\Big[f(s);\nu_0(s);\alpha\Big](t)$$

крайової задачі (13) з невиродженим імпульсним впливом (9) єдиний; його визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\Big[f(s);\nu_0(s);\alpha\Big](t)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3-4\cos t-\cos 2t \\ -2\sin 2t \\ 5+4\cos t-\cos 2t \end{pmatrix},\ \ 0\le t\le 2\pi.$$

Запропонована у статті схема дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач з невиродженим імпульсним впливом (1)–(3) аналогічно [16] може бути перенесена на нелінійні диференціально-алгебраїчні крайові задачі, в тому числі, у частинних похідних [17, 18].

Цитована література

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища школа, 1987.
2. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016.
3. *Campbell S.L.* Singular Systems of differential equations. – San Francisco–London–Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. – 1980.
4. *Бояринцев Ю.Е., Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. – Новосибирск: Наука, 1998.
5. *Бойчук А.А., Шегда Л.М.* Вироджені нетерові крайові задачі // Нелінійні коливання. – 2007. – Т. 10, № 3. – С. 303–312.
6. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. – К.: Вища школа, 2000.
7. *Chuiko S.M.* On a reduction of the order in a differential-algebraic system // Journal of Math. Sciences. – 2018. – T. 235, № 1. – P. 2–14.
8. *Чуйко С.М.* О разрешимости дифференциально-алгебраической краевой задачи // Математические труды. – 2020. – Т. 23. – С. 1–20.
9. *Wexler D.* On Boundary Value Problems for an Ordinary Linear Differential Systems // Ann. Vft. Pura et Appl. – 1968. – V. 80. – P. 123–136.
10. *Бойчук А.А., Чуйко Е.В., Чуйко С.М.* Обобщенный оператор Грина краевой задачи с вырожденным импульсным воздействием // Укр. мат. журнал. – 1996. – Т. 48, № 5. – С. 588–594.
11. *Бойчук А.А., Перестюк Н.А., Самойленко А.М.* Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27, № 9. — С. 1516 — 1521.
12. *Чуйко С.М.* Нетеровы краевые задачи для вырожденных дифференциально-алгебраических систем с линейным импульсным воздействием // Динамические системы. – 2014. – Т. 4 (32), № 1–2. – С. 89–100.
13. *Бойчук А.А., Покутный ,А.А., Чистяков В.Ф.* О применении теории возмущений к исследованию разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – Т. 53, № 6. – С. 958–969.
14. *Чуйко С.М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37, № 8. – С. 1132–1135.
15. *Чуйко С.М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Доклады Академии наук. – Июль 2001. – Т. 379, № 2. – С. 170–172.
16. *Чуйко С.М., Несмелова О.В.* Нелінійні крайові задачі для вироджених диференціально-алгебраїчних систем // Український математичний вісник. – 2020. – Т. 17, № 3. – С. 313–324.
17. *Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I.* The Dirichlet problem for the Poisson type equations in the plane // Доповіді Національної академії наук України. – 2020. – № 5. – С. 10–16.
18. *Skrypnik I.I.* Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption // Israel Journal of Mathematics. – 2016. – V. 215, № 1. – P. 163–179.

References

1. Samoilenko, A.M., Perestyuk, N.A. (1987). *Impulsive Differential Equations.* Kiev, Vishcha shkola (in Russian).
2. Boichuk, A.A., Samoilenko, A.M. (2016). *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition).* Berlin; Boston, De Gruyter. https://doi.org/10.1515/ 9783110944679.
3. Campbell, S.L. (1980). *Singular Systems of differential equations.* San Francisco – London – Melbourne, Pitman Advanced Publishing Program.
4. Boyarintsev, Yu.E., Chistyakov, V.F. (1998). *Algebro-Differential Systems. Methods for Solving and Studying.* Novosibirsk, Nauka (in Russian).

5. Boichuk, A.A., Shehda, L.M. (2009). Degenerate nonlinear boundary-value problems. *Ukrainian Mathematical Journal*, *61*(9), 1387–1403 (in Russian).
6. Samoilenko, A.M., Shkil', M.I., Yakovets, V.P. (2000). *Linear Systems of Differential Equations with Degeneration.* Kiev, Vyshcha Shkola (in Russian).
7. Chuiko, S.M. (2018). On a reduction of the order in a differential-algebraic system. *Journal of Mathematical Sciences*, *235*(1), 2–14.
8. Chuiko, S.M. (2020). A generalized Green operator for a linear Noetherian differential-algebraic boundary value problem. *Siberian Advances in Mathematics, 30*, 177–191.
9. Wexler, D. (1968). On Boundary Value Problems for an Ordinary Linear Differential Systems. *Ann. Vft. Pura et Appl.*, *80*, 123–136.
10. Boichuk, A.A., Chuiko, E.V., Chuiko, S.M. (1996). Generalized Green operator of a boundary-value problem with degenerate pulse influence. *Ukr. Math. Jh.*, *48*(5), 652–660 (in Russian).
11. Boichuk, A.A., Perestyuk, N.A., Samoilenko, A.M. (1991). Periodic solutions of impulse differential systems in critical cases *Differents. Uravn.*, *27*(9), 1516–1521 (in Russian).
12. Chuiko, S.M. (2014). Linear Noether boundary value problems for degenerate differential-algebraic systems with linear pulse conditions. *Dynamical systems*, *4 (32)*(1–2), 89–100 (in Russian).
13. Boichuk, A.A., Pokutniy, A.A., Chistyakov, V.F. (2013). Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, *53*(6), 777–788 (in Russian).
14. Chuiko, S.M. (2001). A generalized Green operator for a boundary value problem with impulse action. *Differential Equations.* *37*(8), 1189–1193 (in Russian).
15. Chuiko, S.M. (2001). Green operator for boundary value problems with an impulsive effect. *Doklady Mathematics.* *64*(1), 41–43.
16. Chuiko, S.M., Nesmelova, O.V. (2021). Nonlinear boundary-value problems for degenerate differential-algebraic systems. *Journal of Mathematical Sciences*, *252*(4), 463–471.
17. Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I. (2020). The Dirichlet problem for the Poisson type equations in the plane. *Dopovidi Natsionalnoyi akademiyi nauk Ukrayiny*, *5*, 10–16.
18. Skrypnik, I.I. (2016). Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption. *Israel Journal of Mathematics*, *215*(1), 163–179.

S.M. Chuiko, E.V. Chuiko, K.S. Shevtsova

Linear differential-algebraic boundary value problem with nonsingular pulse influence.

The study of differential-algebraic boundary value problems was initiated in the works of K. Weierstrass, N.N. Luzin and F.R. Gantmacher. Systematic study of differential-algebraic boundary value problems is devoted to the work of S. Campbell, Yu.E. Boyarintsev, V.F. Chistyakov, A.M. Samoilenko, M.O. Perestyuk, V.P. Yakovets, O.A. Boichuk, A. Ilchmann and T. Reis. The study of the differential-algebraic boundary value problems is associated with numerous applications of such problems in the theory of nonlinear oscillations, in mechanics, biology, radio engineering, theory of control, theory of motion stability. At the same time, the study of differential algebraic boundary value problems is closely related to the study of pulse boundary value problems for differential equations, initiated M.O. Bogolybov, A.D. Myshkis, A.M. Samoilenko, M.O. Perestyk and O.A. Boichuk. Consequently, the actual problem is the transfer of the results obtained in the articles by S. Campbell, A.M. Samoilenko, M.O. Perestyuk and O.A Boichuk on a pulse linear boundary value problems for differential-algebraic equations, in particular finding the necessary and sufficient conditions for the existence of the desired solutions, and also the construction of the Green's operator of the Cauchy problem and the generalized Green operator of a pulse linear boundary value problem for a differential-algebraic equation. In this article we found the conditions of the existence and constructive scheme for finding the solutions of the linear

Noetherian differential-algebraic boundary value problem for a differential-algebraic equation with nonsingular impulse action. The proposed scheme of the research of the linear differential-algebraic boundary value problem for a differential-algebraic equation with impulse action in the critical case in this article can be transferred to the linear differential-algebraic boundary value problem for a differential-algebraic equation with singular impulse action. The above scheme of the analysis of the seminonlinear differential-algebraic boundary value problems with impulse action neralizes the results of S. Campbell, A.M. Samoilenko, M.O. Perestyuk and O.A Boichuk and can be used for proving the solvability and constructing solutions of weakly nonlinear boundary value problems with singular impulse action in the critical and noncritical cases.

Keywords: *differential-algebraic equations, boundary value problems, nondegenerate pulse influence.*

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ *Отримано 01.10.2021*
chujko-slav@ukr.net