УДК 517.54
DOI: 10.37069/1683-4720-2021-35-14

©2021. **В.Ф. Щербак, І.С. Дмитришин**

ВІДСТЕЖЕННЯ СТАНУ КАРДІОСТИМУЛЯТОРІВ, ПРОМОДЕЛЬОВАНИХ РІВНЯННЯМ ВАН ДЕР ПОЛЯ

Розглянуто можливість застосування методу інваріантних співвідношень до розв'язання задачі визначення стану двох моделей кардіостимулятора, які отримані як певні модифікації рівняння осцилятора ван дер Поля. Пошук невідомої компоненти фазового вектора проводиться за схемою керування системою master-slave, при якій в провідній та ведомій системі потрібно забезпечити співпадання траєкторій при умові неповноти інформації про рух. Аналітичні викладки підтверджено результатами обчислювальних експериментів.

MSC: 34N05.

Ключові слова: *нелінійний спостерігач, кардіостимулятор, осцилятор ван дер Поля, інаріантні співвідношення.*

1. Вступ.

Однією з проблем при побудові адекватних математичних моделей багатьох об'єктів в техниці, економіці, медико-біологічних дослідженнях тощо є відсутність «апріорної» інформації про поточний стан об'єкта та його параметри. Тому важливим етапом відповідних досліджень є визначення невідомих компонент математичної моделі, яке може бути здійснено за допомогою методів обернених задач керування системами вхід-вихід. Відомо також, що досить часто в таких дослідженнях в якості наближеної динамічної моделі складних нелінійних коливальних процесів використовується модель, яка складається з одного або декількох пов'язаних між собою осциляторів ван дер Поля або деяких їх модифікацій [1]. З цієї причини нелінійні осцилятори вивчаються як спосіб моделювання, аналізу або навіть контролю у різних сферах, таких як електроніка [2], керування, робототехніка [3, 4], медико-біологічні дослідження [5], геологія [6] та ін. Природно, що при такому моделюванні виникають проблеми визначення стану та параметрів моделей за результатами вимірювання вихідних сигналів у режимі реального часу.

Одну з таких проблем, а саме: задачу визначення стану моделей кардіостимулятора, які отримано як певні модифікації рівняння осцилятора ван дер Поля, розглянуто в даній роботі. В науковій літературі публікації про моделювання серцево-судинноїї діяльності за допомогою осциляторних систем представлені досить широко. В останні роки серед них з'являються роботи, які пов'язано з розв'язком обернених задач для таких моделей. Зокрема, в роботі [7] з використанням диференціально-геометричних методів теорії керування запропонована загальна схема побудови асимптотично точних оцінок стану двувимірної динамічної системи. Отримані результати використано для ефективного розв'язку задачі спостереження двох моделей кардіостимулятора, В нашому випадку для розв'язку цієї ж задачі спостереження використано розроблений в аналітичній механіці метод інваріантних співвідношень [8], який було призначено, зокрема, для пошуку частинних розв'язків (залежностей між змінними) в задачах динаміки твердого тіла з нерухомою точкою. Модифікація цього методу до проблем теорії керування, спостереження, ідентифікації дозволило синтезувати між відомими і невідомими величинами вихідної системи додаткові зв'язки, що виникають в процесі руху її розширеної моделі [9–11]. Відповідна методика полягає у розширенні вихідної системи за рахунок введення у розгляд додаткових керованих диференціальних рівнянь та занурення вихідної системи в систему більшої вимірності, яка завдяки своєї достатньо вільній структурі більш пристосована для побудови спостерігача чи ідентифікатора. Керування в розширеній системі використовуються для синтезу на її траєкторіях заздалегідь запропонованих співвідношень, які визначають невідомі компоненти математичної моделі (фазовий вектор, параметри) як функції від відомих величин. Одержані теоретичні результати проілюстровано чисельним моделюванням відповідних нелініних спостерегачів у розділі 5.

2. Задача визначення стану для моделей кардіостимуляторів.

Рівняння ван дер Поля, що описуює процес релаксаційних коливань має вигляд:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \alpha\left(x^2(t) - \mu\right)\frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = 0. \tag{1}$$

Тут $x(t)$ – зміщення осцилятора від положення рівноваги, μ – коефіцієнт, який характеризує амплітуду коливань, при якій сила дисипації змінює знак, α визначає величину нелінійного доданку. Режим $\alpha = 0$ відповідає коливанням без тертя та описується рівнянням гармонійного осцилятора з власною частотою ω.

Розглянемо дві модифікації рівняння ван дер Поля, які моделюють роботу кардіостимулятора [7, 12]. Перша з них має вигляд:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \alpha\left(x^2(t) - \mu\right)\frac{dx(t)}{dt} + \frac{x(t)(x(t)+d)(x(t)+e)}{de} = 0, \tag{2}$$

де $d, e, \mu, \alpha > 0$ – додатні константи, також полагаємо $\mu < d$. У другому узагальнені рівняння ван дер Поля додатково змінено вираз для закону дисипації:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \alpha(x - \beta_1)(x - \beta_2)\frac{dx(t)}{dt} + \frac{x(t)(x(t)+d)(x(t)+e)}{de} = 0. \tag{3}$$

Тут параметри $\beta_1\beta_2 < 0$ мають різні знаки, що зберігає автоколивальні властивості траєкторій.

Виходом системи, тобто відомою за даними спостереження функцією часу t, будемо вважати $y(t) = x(t)$ – зміщення осцилятора від точки $x = 0$. Позначивши $x_1(t) = x(t),\ x_2(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, перепишемо (2) у вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2, \\ \dot{x_2} &= \alpha(\mu - x_1^2)x_2 - \frac{x_1(x_1+d)(x_1+e)}{de}. \end{aligned} \tag{4}$$

Аналогічно рівнянню (3) відповідає система

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2, \\ \dot{x_2} &= \alpha(x_1-\beta_1)(x_1-\beta_2)x_2 - \frac{x_1(x_1+d)(x_1+e)}{de}. \end{aligned} \tag{5}$$

Вихід систем (4) та (5) задано функцією $y = x_1(t)$. Розглянемо задачу відновлення стану кожної з цих систем як задачу відстеження за виходом траєкторії ведучо-відомої систем двох осциляторів.

3. Перша модель кардіостимулятора. Отже припустимо спочатку, що ведуча система має вигляд (4), відома містить поки що невизначені функції керування $v_i(x_1, p_1, p_2), i = 1, 2$.

$$\begin{aligned} \dot{p_1} &= p_2 + v_1(x_1,p_1,p_2), \\ \dot{p_2} &= \alpha\left(\mu - p_1^2\right)p_2 - \frac{p_1(p_1+d)(p_1+e)}{de} + v_2(x_1,p_1,p_2). \end{aligned} \tag{6}$$

Задача полягає у відстеженні еталонної траєкторії $x_1(t), x_2(t)$, тобто побудові таких функцій $v_i(x_1, p_1, p_2), i = 1, 2$, при яких довільна траєкторія системи (6) асимптотично прагне до тієї траєкторії системи (4), яка відповідає виходу $y = x_1(t)$.

Введемо змінні e_1, e_2 які визначають відхилення між траєкторіями ведучої та відомої систем $e_1(t) = p_1(t) - x_1(t),\ e_2(t) = p_2(t) - x_2(t)$. Введемо нові керування u_1, u_2 за формулами

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1, \\ v_2 &= u_2 - \alpha p_2(p_1^2 - x_1^2) + \frac{p_1(p_1+d)(p_1+e)}{de} - \frac{x_1(x_1+d)(x_1+e)}{de}. \end{aligned} \tag{7}$$

Віднімаючи рівняння (4) з рівнянь (6), отримуємо рівняння у відхиленнях

$$\begin{aligned} \dot{e_1} &= e_2 + u_1(x_1,e_1,p_2), \\ \dot{e_2} &= \alpha\left(\mu - x_1^2\right)e_2 + u_2(x_1,e_1,p_2). \end{aligned} \tag{8}$$

Таким чином наша задача зведена до пошуку керувань $u_i(x_1, e_1, p_2), i = 1, 2$ при яких довільна траєкторія системи (8) має властивість: $e_1(t) \to 0, e_2(t) \to 0$ з ростом t. У відповідності до методу інваріантних співвідношень таку задачу стабілізації будемо вирішувати в околі многовида, на якому невідома змінна $e_2(t)$ представлена у вигляді деякої функції від відомих величин $x_1(t), e_1(t)$ та змінної $p_2(t)$, яка може бути знайдена в результаті розв'язку задачі Коші для системи (6), після фіксації керувань $v_i(x, p_1, p_2), i = 1, 2$.

Синтез інваріантних співвідношень для відхилень траєкторій. Покажемо, що для будь-якої диференційованої функції $\Phi(x_1, e_1)$ існує співвідношення

$$e_2 = \Phi(x_1, e_1), \tag{9}$$

яке є інваріантним співвідношенням для деяких розв'язків розширеної системи (4), (6). Для цього замість e_2 вводимо змінну η, яка характеризує відхилення від многовида $M = \{(x_1, x_2, e_1, e_2) :\ e_2 = \Phi(x_1, e_1)\}$

$$e_2 = \Phi(x_1, e_1) + \eta, \tag{10}$$

З урахуванням заміни частини змінних за формулою (10) рівняння для відхилень приймають вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{e_1} &= \Phi + \eta + u_1, \\ \dot{\eta} &= \alpha(\mu - x_1^2)(\Phi + \eta) - \Phi_{x_1}(p_2 - \Phi - \eta) - \Phi_{e_1}(\Phi + \eta + u_1) + u_2, \end{aligned} \tag{11}$$

де Φ_σ означає частинну похідну $\frac{\partial\Phi(.,.)}{\partial\sigma}$.

Оберемо в якості керувань наступні функції:

$$u_1 = -\Phi - \lambda e_1,\ u_2 = -\alpha(\mu - x_1^2)\Phi + \Phi_{x_1}(p_2 - \Phi) - \lambda\Phi_{e_1}e_1, \tag{12}$$

де $\lambda > 0$ – деяка стала, а на функцію $\Phi(x_1, e_1)$ поки що не накладено ніяких обмежень, за виключенням складу її аргументів. В результаті система диференціальних рівнянь для відхилень (11) стає однорідною

$$\begin{aligned} \dot{e_1} &= -\lambda e_1 + \eta, \\ \dot{\eta} &= [\alpha(\mu - x_1^2) + \Phi_{x_1} - \Phi_{e_1}]\eta, \end{aligned} \tag{13}$$

тобто допускає тривіальний розв'язок $e_1(t) = \eta(t) = 0$. З останнього витікають наступні твердження

I_1) Сім'я керувань (12) повністю визначається функцією $\Phi(x_1, e_1)$ та її частинними похідними Φ_{x_1}, Φ_{e_1}. Для всякої такої функції в просторі змінних (x_1, x_2, e_1, e_2) існує многовид M, що відповідає інваріантному співвідношенню (9), тобто містить ті траєкторії системи (13), для яких $\eta = 0$. Якщо вдасться забезпечити виконання $e_1(t) \to 0$, то, оскільки на M $e_2 = \Phi(x_1, e_1)$, для розв'язку вихідної задачі достатньо буде взяти керування, які відповідають функціям $\Phi(x_1, e_1)$ з краєвою умовою $\Phi(x_1, 0) = 0$.

I_2) Оскільки інваріантне співвідношення $e_2(t) = \Phi(x_1(t), e_1(t))$ виконано не у всьому просторі, то додатковою умовою вибору функції $\Phi(x_1, e_1)$ є виконання вимоги $\eta(t) \to 0$, тобто многовид M повинен мати властивість глобального тяжіння для всіх траєкторій вихідної master-slave системи (4), (6).

Згідно з I_2 розглянемо спочатку останнє рівняння системи (13)

$$\dot{\eta} = [\alpha(\mu - x_1^2) + \Phi_{x_1} - \Phi_{e_1}]\eta. \tag{14}$$

Виберемо з множини функцій $\Phi(x_1, e_1)$ функції, які задовільняють рівнянню в частинних похідних першого порядку

$$\alpha(\mu - x_1^2) + \Phi_{x_1} - \Phi_{e_1} = -\lambda. \tag{15}$$

Загальний розв'язок рівняння (15) має вигляд

$$\Phi(x_1, e_1) = \frac{1}{3}\alpha x_1^3 - (\lambda + \mu\alpha)x_1 + F(x_1 + e_1), \tag{16}$$

де $F(x_1 + e_1)$ довільна диференційована за своїм аргументом функція. За кожною з таких функцій рівняння у відхиленнях (13) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \dot{e_1} &= -\lambda e_1 + \eta, \\ \dot{\eta} &= -\lambda\eta, \end{aligned} \tag{17}$$

гарантуючи тим самим виконання умови $e_1(t) \to 0,\ \eta(t) \to 0$ при належному виборі постійної λ. Дійсно, всі розв'язки останньої системи диференціальних рівнянь при $\lambda > \frac{1}{2}$ експоненціально прямують до нуля, оскільки похідна в силу системи (17) від додатньо визначеної функції Ляпунова $V = \frac{1}{2}(e_1^2 + \eta^2)$

$$\dot{V} = -\lambda e_1^2 + e_1\eta - \lambda\eta^2 \le (\frac{1}{2} - \lambda)(e_1^2 + \eta^2) < 0$$

є функцією, від'ємно визначеною.

Згідно з I_1 оберемо функцію $\Phi(x_1, e_1)$ так, щоб вона задовольняла граничній умові: $\Phi(x_1, 0) = 0$. З цією метою в формулі (16) покладемо

$$F_1(x_1 + e_1) = -\frac{1}{3}\alpha(x_1 + e_1)^3 + (\lambda + \mu\alpha)(x_1 + e_1).$$

В результаті отримуємо

$$\Phi^*(x_1, e_1) = -\frac{1}{3}\alpha e_1(3x_1^2 + 3x_1 e_1 + e_1^2) + (\lambda + \mu\alpha)e_1. \tag{18}$$

Вибір функції $\Phi(x_1, e_1) = \Phi(x_1, p_1 - x_1)$ у вигляді (18) остаточно формує рівняння ведомої системи (6). Дійсно, керування (7) залежать від (12), які в свою чергу визначаються за допомогою цієї функції та її частинних похідних

$$\begin{aligned} &\Phi = \left[\lambda + \mu\alpha - \frac{1}{3}\alpha\big(3x_1^2 + 3x_1(p_1 - x_1) + (p_1 - x_1)^2\big)\right](p_1 - x_1), \\ &\Phi_{x_1} = -\alpha(p_1^2 - x_1^2), \\ &\Phi_{e_1} = -\frac{\alpha}{3}\big(3x_1^2 + 3x_1(p_1 - x_1) + (p_1 - x_1)^2\big) - \frac{\alpha(p_1 - x_1)}{3}(x_1 + 2p_1) + \lambda + \mu\alpha. \end{aligned} \tag{19}$$

Таким чином можна стверджувати, що при знайдених керуваннях v_1, v_2, розв'язок системи диференціальних рівнянь (6) з довільними початковими умовами асимптотично прагне саме до того розв'язку системи (4), який відповідає за умовами задачі спостереження відомому виходу $y(t) = x_1(t)$.

4. Друга модель кардіостимулятора.

Розглянемо модифіковане рівняння ван дер Поля (5), що моделює роботу кардіостимулятора, з демпфіруванням, яке задано формулою $\alpha(x-\beta_1)(x-\beta_2)$. Систему, яка буде відслідковувати траєкторію вказаної модифікації рівняння ван дер Поля, запишемо у вигляді віртуальної системи – нелінійного спостерігача:

$$\begin{aligned} \dot{p_1} &= p_2 + u_1(x_1, p_1, p_2), \\ \dot{p_2} &= \alpha(x_1-\beta_1)(x_1-\beta_2)p_2 - \frac{x_1(x_1+d)(x_1+e)}{de} + u_2(x_1, p_1, p_2). \end{aligned} \tag{20}$$

Складемо систему диференціальних рівнянь у відхиленнях $e_1(t) = p_1(t) - x_1(t)$, $e_2(t) = p_2(t) - x_2(t)$ аналогічно до розглянутого попередньо випадку:

$$\begin{aligned} \dot{e_1} &= e_2 + u_1(x_1, e_1, p_2), \\ \dot{e_2} &= \alpha(x_1-\beta_1)(x_1-\beta_2)e_2 + u_2(x_1, e_1, p_2). \end{aligned} \tag{21}$$

Введемо замість e_2 змінну η, яка характеризує відхилення від співвідношення за формулою (10), тоді аналогічно до (11) рівняння для відхилень розв'язків вихідної системи від розв'язків її спостерігача матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{e_1} &= \Phi + \eta + u_1, \\ \dot{\eta} &= \alpha(x_1-\beta_1)(x_1-\beta_2)(\Phi+\eta) - \Phi_{x_1}(p_2 - \Phi - \eta) - \Phi_{e_1}(\Phi + \eta + u_1) + u_2. \end{aligned} \tag{22}$$

Оберемо в якості керувань наступні функції, які залежать від поки що невизначеної функції $\Phi(x_1, e_1)$ та її похідних:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\Phi - \lambda e_1, \\ u_2 &= -\alpha(x_1-\beta_1)(x_1-\beta_2)\Phi + \Phi_{x_1}(p_2 - \Phi) - \lambda \Phi_{e_1} e_1. \end{aligned} \tag{23}$$

За такими керуваннями рівняння для відхилень (22) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \dot{e_1} &= -\lambda e_1 + \eta, \\ \dot{\eta} &= [\alpha(x_1-\beta_1)(x_1-\beta_2) + \Phi_{x_1} - \Phi_{e_1}]\eta. \end{aligned} \tag{24}$$

В якості $\{\Phi(x_1, e_1)\}$ – множини функцій, що формують інваріантне співвідношення (9), оберемо функції, які задовольняють рівнянню в частинних похідних

$$\alpha(x_1-\beta_1)(x_1-\beta_2) + \Phi_{x_1} - \Phi_{e_1} = -\lambda. \tag{25}$$

Загальний розв'язок рівняння (25) має вигляд

$$\Phi(x_1, e_1) = -\alpha\left[\frac{x_1^2}{3} - (\beta_1+\beta_2)\frac{x_1}{2} + \beta_1\beta_2 + \frac{\lambda}{\alpha}\right]x_1 + F(x_1 + e_1), \tag{26}$$

де $F(x_1 + e_1)$ довільна диференційована за своїм аргументом функція. Керування (23), які відповідають довільній функції $\Phi(x_1, e_1)$ з цієї сім'ї приводять рівняння у відхиленнях (24) до виду (17). Як було вже показано, це, за умови $\lambda > \frac{1}{2}$, забезпечує експоненціальну стійкість тривіального розв'язку цієї системи.

Щоб крім властивості $e_1(t) \to 0,\ \eta(t) \to 0$ забезпечити з ростом t асимптотичне прямування $e_2(t)$ до нуля, оберемо таку функцію $\Phi(x_1, e_1)$, яка задовольняє граничній умові: $\Phi(x_1, 0) = 0$. З цією метою в формулі (26) покладемо

$$F(x_1 + e_1) = \alpha \left[\frac{(x_1 + e_1)^2}{3} - (\beta_1 + \beta_2) \frac{(x_1 + e_1)}{2} + \beta_1 \beta_2 + \frac{\lambda}{\alpha} \right] (x_1 + e_1). \qquad (27)$$

В результаті функція $\Phi(x_1, e_1)$ та її частинні похідні $\Phi_{x_1}(x_1, e_1)$, $\Phi_{e_1}(x_1, e_1)$ набувають вигляду

$$\begin{aligned} &\Phi(x_1, e_1) = \alpha e_1 \left[x_1^2 + x_1 e_1 + \frac{e_1^2}{3} - (\beta_1 + \beta_2)(x_1 + \frac{e_1}{2}) + \beta_1 \beta_2 + \frac{\lambda}{\alpha} \right], \\ &\Phi_{x_1}(x_1, e_1) = \alpha e_1 (2x_1 + e_1 - \beta_1 - \beta_2), \\ &\Phi_{e_1}(x_1, e_1) = \alpha \left[(x_1 + e_1)^2 - (\beta_1 + \beta_2)(x_1 + e_1) + \beta_1 \beta_2 + \frac{\lambda}{\alpha} \right]. \end{aligned} \qquad (28)$$

Таким чином, остаточно отримуємо, що керування, обчислені за формулами (23) повністю визначають вид нелінійного спостерігача (20), розв'язки якого з довільними початковими умовами асимптотично прагнуть до саме того розв'язку вихідної системи (5), який відповідає виходу $y = x_1(t)$.

5. Обчислювальні експерименти.

Запропонована в роботі схема розв'язання задачі спостереження була чисельно промодельована для широкого спектру початкових умов і параметрів динамічних систем (4) та (5). Зіставлялися між собою графіки розв'язків вихідних систем (зображені неперервними лініями) та їх спостерігачів (переривчасті лінії). В наведених результатів обчислювального експерименту для першої моделі кардіостимулятора початкові умови задачі Коші для системи (4) були прийняті рівними $x(0) = (-2.0; 0.0)$, початкові умови для змінних системи диференціальних рівнянь спостерігача (6) обираються довільним чином, в даному випадку $p(0) = (2.0; -2.0)$. Параметри системи та її спостерігача наступні:

$$\alpha = 1.0,\ \mu = 1.0,\ d = 3.0,\ e = 3.5,\ \lambda = 2.5.$$

На рис. 1 зображено графіки функцій $x_1(t), p_1(t)$ та $x_2(t), p_2(t)$, які підтверджують асимтотичне зближення траєкторій вихідної системи та її спостерігача.

Для другої моделі кардіостимулятора, початкові умови задачі Коші вибрані рівними $x(0) = (-0.1; -0.2)$, $p(0) = (2.0; 2.0)$, а параметри систем дорівнюють:

$$\alpha = 1.0,\ d = 3.0,\ e = 3.5,\ \beta_1 = 0.9,\ \beta_2 = -0.5,\ \lambda = 2.5.$$

Як і для першої моделі, графіки розв'язків систем диференціальних рівнянь (5) та (20), які зображено на рис.2, підтверджують зроблений висновок про те, що система (20) є асимптотичним спостерігачем траєкторій вихідної системи (5).

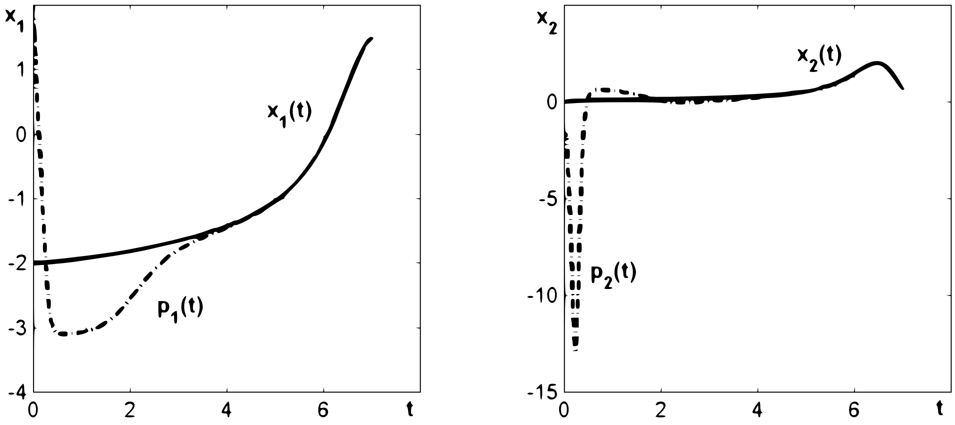

Рис. 1. Асимптотичне оцінювання змінних $x_i(t), i = 1, 2$ системи (4).

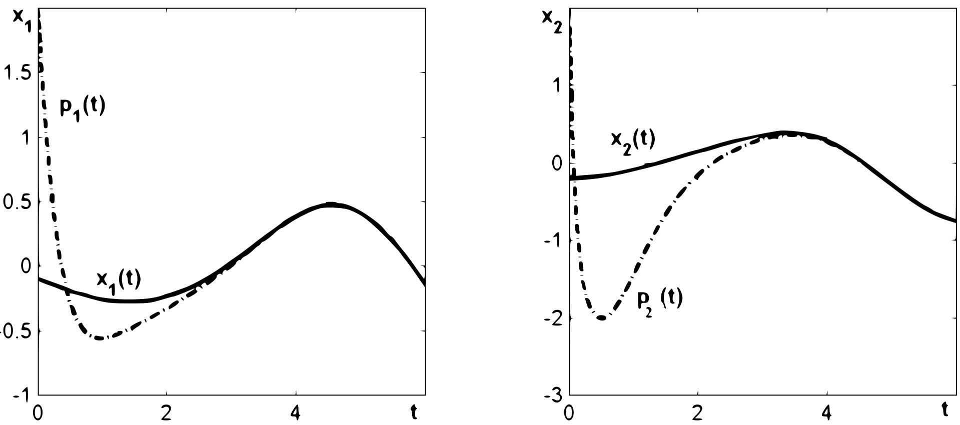

Рис. 2. Асимптотичне оцінювання змінних $x_i(t), i = 1, 2$ для моделі (5).

Цитована література

1. *Кузнецов А.П., Селиверстова Е.С., Трубецков Д.И., Тюрюкина Л.В.* Феномен уравнения ван дер Поля // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2014. – Vol. 22. – P. 3–42.
2. *Algaba A., Fernandez-Sanchez F., Freire E., Gamero E., Rodriguez-Luis A.J.* Oscillation-sliding in a modified van der Pol-Duffing electronic oscillator // Journal of Sound and Vibration. – 2002. – Vol. 249(9). – P. 899–907.
3. *Landau I.D., Bouziani F., Bitmead R., Voda A.* Analysis of control relevant coupled nonlinear oscillatory systems // European Journal of Control. – 2008. – Vol. 10. – P. 263–282.
4. *Murray J.D.* Mathematical biology I. An Introduction (3rd edn.). – Springer, 2002.
5. *Kaplan B.Z, Gabay I., Saraan G., Saraan D.* Biological application of the altered Van der Pol oscillator // Journal of the Franklin Institute. – 2007. – Vol. 345(3). – P. 226–232.
6. *Cartwright J., Eguiluz V., Hernandez-Garcia E., Piro O.* Dynamics of elastic excitable media // International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2002. – Vol. 9. – P. 2197–2202.
7. *Виноградова М.С., Канатников А.Н., Ткачева О.С.* Наблюдатель состояния для модели кардиостимулятора на основе уравнения Ван дер Поля // Математика и математическое моде-

лирование. – 2020. – Vol. 1. – P. 16–32.
8. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Vol. 6. – P. 15–24.
9. *Жоголева Н.В., Щербак В.Ф.* Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления // Труды ИПММ НАН Украины. – 2015. – Т. 29. – P. 69–76.
10. *Щербак В.Ф.* Синтез дополнительных соотношений в задаче наблюдения // Труды ИПММ НАН Украины. – 2003. – Т 8. – P. 229–235.
11. *Shcherbak V.F.* Synthesis of virtual measurements in nonlinear observation problem // PAMM. – 2004. – Vol. 4(1). – P. 139–140.
12. *Grudzinski K., Zebrowski J.J.* Modeling cardiac pacemakers with relaxators // Physica A. – 2004. – Vol. 336. – P. 153–162.

References

1. Kuznetsov, A.P., Seliverstova, E.C., Trubetskov, D.I.,Turukina, L.V. (2014). Fenomen uravneniya van der Polya. *Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelinejnaya dinamika*, *22*, 3–42.
2. Algaba, A., Fernandez-Sanchez, F., Freire, E., Gamero, E., Rodriguez-Luis, A.J. (2002). Oscillation-sliding in a modified van der Pol-Duffing electronic oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, *249*(9), 899–907.
3. Landau, I.D., Bouziani, F., Bitmead, R., Voda, A. (2008). Analysis of control relevant coupled nonlinear oscillatory systems. *European Journal of Control*, *10*, 263–282.
4. Murray, J.D. (2002). *Mathematical biology I. An Introduction (3rd edn.)*, Springer.
5. Kaplan, B.Z, Gabay, I., Saraan, G., Saraan, D. (2007). Biological application of the altered Van der Pol oscillator. *Journal of the Franklin Institute*, *345(3)*, 226–232.
6. Cartwright, J., Eguiluz, V., Hernandez-Garcia, E., Piro, O. (2002). Dynamics of elastic excitable media. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, *9*, 2197–2202.
7. Vinogradova, M.S., Kanatnikov, A.H., Tkachova, O.C. (2020). Nabludatel sostoyania dlya modeli kardiostimulyatora na osnove yravneniya Van der Polya. *Matematika i matematicheskoe modelirovanie*, *1*, 16–32.
8. Harlamov, P.V. (1974). Ob invariantnih sootnosheniyah sistemi differensialnih uravnenij. *Mehanika tverdogo tela*, *6*, 15–24.
9. Zhogoleva, N.V., Shcherbak, V.F. (2015). Synthesis of additional relations in inverse control problems. *Trydi IPMM NAN Ukraini*, *29*, 69–76.
10. Shcherbak V.F. (2003). Sintes dopolnitelnih sootnoshenij v zadache nabludenija. *Trydi IPMM NAN Ukraini*, *8*, 229–235.
11. Shcherbak, V.F. (2004). Synthesis of virtual measurements in nonlinear observation problem. *PAMM*, *4*(1), 139–140.
12. Grudzinski, K., Zebrowski, J.J. (2004). Modeling cardiac pacemakers with relaxators. *Physica A*, *336*, 153–162.

V.F. Shcherbak, I.S. Dmytryshyn

Tracking the state of pacemakers modeled by the van der Pol equation.

It is known that in many applications of physics, biology and other sciences as an approximate dynamic model of complex nonlinear oscillatory processes a model of one or more interconnected van der Pol oscillators or some of its modifications is used [1]. For this reason, nonlinear oscillators are studied as a method of modeling, analysis or even control in various fields, such as electronics [2], control, robotics [3, 4], biomedical research [5], geology [6] and others. Naturally, in such modeling there are problems in determining the state and parameters of the models based on the results of measuring the output signals in real time. One of these problems, namely: the problem of determining the state of pacemaker models, which are obtained as certain modifications of the van der Pol oscillator equation, is considered in this paper. In the scientific literature, publications on the modeling of cardiovascular activity using oscillatory systems are widely represented. In recent years, among them there are works that are related to the solution of inverse problems for such models. In particular, in [7] using differential-geometric methods of control theory, a general scheme for constructing asymptotically accurate estimates of the state of a two-dimensional dynamical system is proposed. The obtained results are used to effectively solve the problem of observing two models of pacemakers. In our case in this observation problem we used the method of invariant relations [8], which was developed in analytical mechanics to find partial solutions (dependencies between variables) in the problems of dynamics of a rigid body with a fixed point. Modification of this method to the problems of control theory, observation, identification allowed to synthesize between known and unknown values of the original system additional connections that arise during the motion of its extended model [9–11]. The corresponding technique is to expand the original system by introducing additional controlled differential equations and immersing the original system in a system of greater dimension, which due to its sufficiently free structure is more suitable for constructing an observer or identifier. Controls in an extended system are used to synthesize on its trajectories pre-proposed relations that define the unknown components of the mathematical model (phase vector, parameters) as functions of known quantities. The obtained theoretical results are illustrated by numerical simulations of the corresponding nonlinear observers in Section 5.

Keywords: *nonlinear observer, pacemaker, van der Pol oscillator, invariant relations.*

Ін-т прикл. математики і механіки НАН України, Слов'янськ
scherbakvf@ukr.net,
dmitrishin.ira@gmail.com

Отримано 19.10.21