УДК 517.57
DOI: 10.37069/1683-4720-2021-35-13

©2021. **О.Д. Трофименко, Ю.В. Перевєрзєва**

ТЕОРЕМИ ПРО СЕРЕДНЄ ДЛЯ ПОЛІГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ

У статті проаналізовано проблему характеризації полігармонічних функцій за допомогою виразів із середнім значенням, сформульовано і доведено достатню умову бігармонічності функції. Теореми про середнє значення та побудовані за їх допомогою оператори усереднення мають різноманітні застосування як в теорії функцій (наближення функцій, опис функціональних просторів), так і в якісній теорії лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними (граничні властивості, усунення особливостей, диференціальні властивості розв'язків та ін.). У роботі досліджено основні властивості полігармонічних функцій, зокрема, властивості із середнім значенням. Проаналізовано результати Л. Зальцмана та В.Волчкова, що узагальнюють класичні теореми про середнє, а також виявляють глибокі зв'язки між комплексним аналізом, теорією лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, гармонічним аналізом, інтегральною геометрією та теорією спеціальних функцій. За допомогою відповідних теорем про середнє встановлюються нові напрямки досліджень в теорії полігармонічних функцій, диференціальних рівнянь, а також в обчислювальній математиці (алгоритми «блукання по сферах», застосування методу Монте-Карло). Особливу увагу в роботі приділено випадку бігармонічних функцій. Виявлено, що при виконанні рівності із середнім значенням по колу з множини на комплексній площині функція з класу C^2 на зазначеній множині задовольняє рівнянню Лапласа другого порядку, тобто є полігармонічною другого порядку. За допомогою введення гладкої функції із компактним носієм отримано шукану функцію, як слабкий розв'язок відповідного рівняння Лапласа. У подальшому даний результат може бути застосований для встановлення достатньої умови бігармонічності двічі неперервно диференційованої функції на площині, що задовольняє вище згадане співвідношення лише для пари додатних значень r_1, r_2. Таким чином, з'являється можливість сформулювати нову теорему про два радіуси.

MSC: 35B05.

Ключові слова: *теорема про середнє, бігармонічна функція, полігармонічна функція.*

1. Вступ.

Нехай μ – комплексна борелевська міра в $\mathbb{R}^n$ із носієм на замкненій одиничній кулі . Для області $G \subset \mathbb{R}^n$ розглянемо множину функцій $f \in C(G)$, які задовільняють умові

$$\int f\,(x + rt)\, d\mu = 0 \tag{1}$$

для всіх $x \in G$ та $r \in (0,\ dist(x, \partial G))$.

Л. Зальцман [1] встановив, що ця множина співпадає з множиною слабких розв'язків в області G деякої скінченної системи однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Він також дослідив умови, за яких така система

Робота підтримана держбюджетною НДР "Спектральні проблеми та властивості регулярності диференціальних і інтегральних операторів, крайові задачі для планарних структур" (№ держреєстрації 0121U109525).

складається лише з одного рівняння. Для формулювання його основного результату у цьому напрямку, ми нагадаємо, що перетворення Фур'є–Лапласа розподілу з компактним носієм в $\mathbb{R}^n$ (позначення $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$) визначається формулою

$$\hat{T}(z) = T\left(e^{-(xz)}\right),$$

де $z = (z_1, \ldots,\ z_n) \in \mathbb{C}^n$, $x = (x_1,\ \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $xz = x_1 z_1 + \ldots + x_n z_n$, а розподіл T діє на функцію $e^{-i(xz)}$ як на функцію аргументу x.

Перетворення Фур'є–Лапласа розподілів з компактним носієм є цілими функціями експоненціального типу і описуються класичною теоремою Пелі–Вінера–Шварца (див., наприклад, [2]).

Нехай $P = P(x) = P(x_1, \ldots,\ x_n)$ – поліном, а $P(D)$ – диференціальний оператор, що відповідає цьому поліному $\left(x \to -i\frac{\partial}{\partial x_k}\right)$. Будемо говорити, що міра μ характеризує неперервні слабкі розв'язки диференціального рівняння $P(D)f = 0$, якщо для довільної області G та для довільної функції $f \in C(G)$ виконання умови (1) для всіх $x \in G$ та $r \in (0,\ dist(x, \partial G))$ еквівалентно тому, що f задовольняє у слабкому сенсі рівнянню $P(D)f = 0$.

Міра μ відповідає розподілу $F_\mu \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, визначеному формулою $F_\mu = \int \varphi(x)\, d\mu$ для кожної фінітної нескінченно диференційовної функції φ в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Міра μ характеризує неперервні слабкі розв'язки рівняння $P(D)f = 0$ тоді і тільки тоді, коли поліном P є однорідним та існує розподіл $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ із носієм на $\bar{B}$, такий, що $\hat{T}(0) \neq 0$ і $F_\mu = P(-D)\,T$.*

Ця теорема роботи Зальцмана [1] є першою теоремою про середнє значення загального характеру і містить у якості наслідків велику кількість раніше встановлених конкретних теорем про середнє значення, наприклад, теорем Гауса–Кобе, Морери–Карлемана, Федорова, Асгейрсона та інших авторів. Нею фактично визначається класичний вигляд теорем про середнє значення для розв'язків однорідних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефицієнтами.

Існують інші форми теорем про середнє значення, що характеризують розв'язки диференціальних рівнянь за сталими коефіцієнтами. Наприклад, (див. [2]), при $\lambda \in \mathbb{C}(-\infty, 0)$ виконання умови

$$\int\limits_{B_r} f(x+y)\, dy = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\, r^2 I_{\frac{n}{2}}(\lambda r)\, f(x)$$

для всіх $x \in G$ та $r \in (0,\ dist(x, \partial G))$, характеризує в класі $C(G)$ розв'язки рівняння Гельмгольца

$$\left(\triangle + \lambda^2\right) f = 0,$$

де $I_{\frac{n}{2}}(z) = z^{-\frac{n}{2}} J_{-\frac{n}{2}}(z)$. Зокрема, при $\lambda = 0$ маємо класичну теорему із середнім значенням для гармонічних функцій.

Результат, представлений у роботі [3], характеризує функції за допомогою середнього значення у випадку правильного многокутника та при фіксованих параметрах дозволяє перейти до класичних теорем для гармонічних функцій.

2. Бігармонічні рівняння.

Означення 1. Полігармонічною функцією порядку m називається функція $u\,(x) = u(x_1,\ x_2, \ldots, x_n)$ дійсних змінних, що визначена в області D з простору $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, має неперервні частинні похідні до порядку $2m$ включно та задовольняє в усій області D полігармонічному рівнянню

$$\triangle^m u = 0,$$

де $m \geq 1$.

При m=1 маємо гармонічні функції, що описано вище, при m=2 – бігармонічні і так далі.

Розглянемо задачу Діріхле в обмеженій області $G \subset \mathbb{R}^n$:

$$\triangle u\,(x) - k^2 u\,(x) = 0,$$

$u\,(y) = g\,(y)$, $y \in \partial G$ $x \in G \subset \mathbb{R}^n$, де k – комплексне число.

Нехай $S(x, r) \subset G$ є сферою радіуса r з центром у точці x. Позначимо через $N_x^r\,(u)$ наступне сферичне середнє значення u

$$N_x^r\,(u) = \int_{S(x,r)} u\,(y)\,d\sigma\,(y) = \frac{1}{\omega_n} \int\int u\,(x + re)\,d\Omega\,(e),$$

де $\omega_n = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(\frac{n}{2})$ – поверхня одиничної сфери в $\mathbb{R}^n$; $d\Omega(e)$ – елемент поверхні $S(0,1)$. Наступний результат представлено в роботі [4].

Теорема 2. *Припустимо, що*

$$W_n\,(y) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) y^{1-n/2} 2^{n/2-1} J_{n/2-1}(y),$$

де $J_{\frac{n}{2}-1}\,(y)$ *– функція Бесселя. Тоді рівність*

$$N_x^r\,(u) = \{W_n(r\sqrt{-\triangle})\}u(x)$$

виконується для x, r *та* u, *для яких визначена ліва частина, і існує вираз у правій частині, що розуміється як значення оператора функції* u *у точці* x.

Для бігармонічної функції

$$u\,(x) = N_x^r\,(u) - \frac{r^2}{4} N_x^r(\triangle u), \qquad \triangle u(x) = N_x^r(\triangle u).$$

Наступний результат також представлено в роботі [4].

Теорема 3. *Розв'язок рівняння* $\triangle^2 u = g$ *задовольняє співвідношенням із середнім значенням*

$$u\,(x) = N_x^r\,(u) - \frac{r^2}{4} N_x^r(\triangle u) + B_x^r\,(q_1 g)\,,$$

$$\triangle u(x) = \frac{2}{r} N_x^r \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) + B_x^r \left(q_2 g \right),$$

де

$$q_1(r_1) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r^2 - r_1^2}{4} - \frac{r_1^2}{4} \ln \left(\frac{r}{r_1} \right) \right), \qquad q_2(r_1) = -\frac{1}{2\pi} \left(\ln \left(\frac{r}{r_1} \right) - \frac{1}{2} + \frac{r_1^2}{2r^2} \right).$$

3. Достатня умова бігармонічності.

Нехай $\mathcal{G}$ – множина у комплексній площині $\mathbb{C}$. Якщо $u(z)$ – бігармонічна функція в $\mathcal{G}$, тоді відомо, що для кожного $z \in \mathcal{G}$ та $r \in (0, \ dist(z, \partial\mathcal{G}))$ виконується наступна рівність

$$M_r \ u(z) - \frac{r^2}{4} \ M_r(\triangle u)(z) = u(z), \tag{2}$$

де

$$M_r \ u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta.$$

Розглянемо зворотне твердження. Справедлива наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай $u(z)$ – функція класу $C^2(\mathcal{G})$, яка задовільняє умові (2) для всіх $z \in \mathcal{G}$ та $r \in (0, \ dist \ (z, \ \partial\mathcal{G}))$. Тоді $u(z)$ – бігармонічна функція в $\mathcal{G}$.*

Доведення. Нехай φ – функція з простору $C_0^\infty \ (\mathcal{G})$ для всіх неперервно диференційованих функцій з компактними носіями в $\mathcal{G}$. Тоді для кожного $r \in (0, \ dist \ (supp \, \varphi, \ \partial\mathcal{G}))$ маємо, що

$$0 = \int_{\mathcal{G}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \left(z + re^{i\theta} \right) d\theta - \frac{r^2}{4} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \triangle u \left(z + re^{i\theta} \right) d\theta - u(z) \right) \varphi(z) \, dm(z),$$

де m позначає міру Лебега в $\mathbb{C}$.

Далі

$$0 = \int_{\mathcal{G}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \left(z + re^{i\theta} \right) \varphi(z) \, d\theta dm(z) - \frac{r^2}{4} \int_{\mathcal{G}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \triangle u(z + re^{i\theta}) \varphi(z) d\theta dm(z) -$$

$$- \int_{\mathcal{G}} u(z) \, \varphi(z) \, dm(z) = \int_{\mathcal{G}} u(z) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \left(z - re^{i\theta} \right) d\theta dm(z) -$$

$$- \frac{r^2}{4} \int_{\mathcal{G}} u(z) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \triangle \varphi(z - re^{i\theta}) d\theta dm(z) - \int_{\mathcal{G}} u(z) \, \varphi(z) \, dm(z).$$

За класичною формулою Піцетті, маємо наступні рівності для кожного натурального N

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \left(z - re^{i\theta} \right) d\theta = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{r}{2} \right)^{2n} \triangle^n \varphi(z) + o\left(r^{2N} \right) \tag{3}$$

та

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \triangle\varphi\left(z - re^{i\theta}\right)d\theta = \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2n}\triangle^{n+1}\varphi(z) + o\left(r^{2N}\right), \tag{4}$$

де $r \to 0$ та $o\left(r^{2n}\right)$ є однорідним відносно z (див., наприклад, [4]).

Спеціальні випадки (3) та (4) є формулами

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\left(z - re^{i\theta}\right)d\theta = \varphi\left(z\right) + \frac{r^2}{4}\triangle\varphi(z) + \frac{r^4}{64}\triangle^2\varphi(z) + o\left(r^4\right)$$

та

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \triangle\varphi\left(z - re^{i\theta}\right)d\theta = \triangle\varphi(z) + \frac{r^2}{4}\triangle^2\varphi(z) + o\left(r^2\right)$$

відповідно.

Підставляючи їх до вищезазначеного ланцюжка рівностей, отримаємо

$$0 = \int_{\mathcal{G}} u\left(z\right)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\left(z - re^{i\theta}\right)d\theta dm\left(z\right) -$$

$$-\frac{r^2}{4}\int_{\mathcal{G}} u(z)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\triangle\varphi(z - re^{i\theta})d\theta dm\left(z\right) - \int_{\mathcal{G}} u\left(z\right)\varphi\left(z\right)dm\left(z\right) =$$

$$= \int_{\mathcal{G}} u\left(z\right)\left(\varphi\left(z\right) + \frac{r^2}{4}\triangle\varphi(z) + \frac{r^4}{64}\triangle^2\varphi(z) + o\left(r^4\right) -\right.$$

$$\left.-\frac{r^2}{4}\left(\triangle\varphi(z) + \frac{r^2}{4}\triangle^2\varphi(z) + o\left(r^2\right)\right) - \varphi(z)\right)dm(z) =$$

$$= -\frac{r^4}{32}\int_{\mathcal{G}} u(z)\triangle^2\varphi(z)dm(z).$$

Звідси отримаємо тотожність

$$\int_{\mathcal{G}} u(z)\triangle^2\varphi(z)dm(z) = 0,$$

що виконується для всіх $\varphi \ \in C_0^\infty$.

Отже, $u(z)$ – це слабкий розв‘язок рівняння $\triangle^2 u = 0$ на множині $\mathcal{G}$. Завдяки еліптичності оператора $\triangle^2$ маємо, що функція $u(z)$ бігармонічна в $\mathcal{G}$. Що і треба було довести. $\square$

Цитована література

1. *Zalcman L.* Mean values and differential equations // Israel J. Math. – 1973. – V. 14 – P. 339–352.
2. *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 2003.
3. *Trofymenko O.* Mean value theorems for polynomial solutions of linear elliptic equations with constant coefficients in the complex plane // Journal of Mathematical Sciences. – 2021. – Vol. 254, № 3. – P. 439–443.

4. *Sabelfeld K.K., Shalimova I.A.* Mean value theorems in Monte Carlo methods // Soc. J. Numer. Anal. Math. Modeling. – 1988. – T. 3. – P. 219–227.

References

1. Zalcman, L. (1973). Mean values and differential equations. *Israel J. Math., 14*, 339–352.
2. Volchkov, V.V. (2003). *Integral Geometry and Convolution Equations.* Dordrecht/Boston/London, Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-010-0023-9
3. Trofymenko, O. (2021). Mean value theorems for polynomial solutions of linear elliptic equations with constant coefficients in the complex plane. *Journal of Mathematical Sciences, 254* (3), 439–443. https://doi.org/10.1007/s10958-021-05315-4
4. Sabelfeld, K.K., Shalimova, I.A. (1988). Mean value theorems in Monte Carlo methods. *Soc. J. Numer. Anal. Math. Modeling, 3*, 219–227.

O.D. Trofymenko, Yu.V. Perevierzieva

Mean value theorems for polyharmonic functions.

The problem of characterization of polyharmonic functions by mean value expressions is analyzed. A sufficient condition for the biharmonic function is formulated and proved in the paper. Mean value theorems and their operators have various applications in function theory (approximation of functions, description of functional spaces) and in the qualitative theory of linear differential equations with partial derivatives (boundary properties, elimination of features, differential properties of solutions, etc.). The main properties of polyharmonic functions, in particular, properties with mean value are investigated in the work. The results of L. Salcman and V. Volchkov, which generalize the classical mean value theorems, are analyzed. These results also reveal deep connections between complex analysis, the theory of linear differential equations with partial derivatives, harmonic analysis, integral geometry and the theory of special functions. The new directions of research in the theory of polyharmonic functions, differential equations, as well as in computational mathematics are established with the mean value theorems (algorithms "walk on spheres" , application of the Monte Carlo method). Particular attention is paid to the case of biharmonic functions. It is found that when performing the equality with the mean value on the circle from the set on the complex plane, the function of class C^2 on the specified set satisfies the Laplace equation of the second order, i.e. the function is polyharmonic of the second order. By using a smooth function with a compact support, the required function is obtained as a weak solution of the corresponding Laplace equation. In the future, this result can be used to establish a sufficient condition of biharmonicity of a twice continuously differentiated function on a plane that satisfies the above-mentioned relation only for a pair of positive values of r_1, r_2. Thus, it is possible to formulate a new theorem on two radii.

Keywords: *mean value theorem, biharmonic function, polyharmonic function.*

Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця
odtrofimenko@gmail.com,
youpera@gmail.com

Отримано 31.11.21