УДК 517.5
DOI: 10.32782/1683-4720-2022-36-3

©2022. М.В. Стефанчук

ПРО ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ БЕЛЬТРАМІ

Дослідження нелінійних систем типу Коші–Рімана–Бельтрамі зумовлено вивченням певних задач гідродинаміки та газової динаміки, у яких має місце неоднорідність середовища та певна сингулярність. У роботі розглядається нелінійна система типу Коші–Рімана–Бельтрамі у полярній системі координат, у якій радіальна похідна виражається через комплексний коефіцієнт, кутову похідну та її m–степеневий модуль. Зокрема, якщо m дорівнює нулю, то дана система рівнянь зводиться до звичайної лінійної системи рівнянь Бельтрамі. Відмітимо, що загальні системи першого порядку використовувались М.О. Лаврентьєвим для означення квазіконформних відображень на площині, див. [1]. Задача про спотворення площі при квазіконформних відображеннях бере свій початок у роботі Б. Боярського, див. [2]. Вперше верхня оцінка площі образу круга при квазіконформних відображеннях була отримана М.О. Лаврентьєвим, див. [1]. У монографії [3], див. твердження 3.7, отримано уточнення нерівності Лаврентьєва у термінах кутової дилатації. У даній роботі знайдена точна верхня оцінка експоненціального типу площі образу круга, що є аналогом відомого результату М.О. Лаврентьєва. Як наслідок, розв'язана екстремальна задача для функціоналу мінімального значення на колі регулярних гомеоморфізмів $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ класу Соболєва $W^{1,2}_{\rm loc}(\mathbb{B})$, які є розв'язками нелінійного рівняння Бельтрамі. Крім цього отримано екстремальний аналог відомої леми Ікоми–Шварца, див. [4]. Також знайдено відображення, на якому досягаються отримані оцінки. Таким чином, у роботі розв'язано екстремальні задачі на певному класі регулярних гомеоморфних розв'язків з узагальненими похідними, інтегрованими з квадратом, нелінійних рівнянь Бельтрамі. Раніше у роботах [5–7] були отримані верхні оцінки степеневого та логарифмічного типу. Доведення основного результату статті базується на диференціальному співвідношенні для функції площі образів кругів довільних радіусів, яке було встановлено у роботі [6] для регулярних гомеоморфізмів класу Соболєва $W^{1,2}_{\rm loc}$.

MSC: 30C62; 31A05; 31A20.

Ключові слова: *рівняння Бельтрамі, нелінійне рівняння Бельтрамі, регулярний гомеоморфізм, регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння Бельтрамі.*

1. Вступ.

Нехай G – область у комплексній площині $\mathbb{C}$, тобто зв'язна та відкрита підмножина $\mathbb{C}$, і нехай $\mu\colon G \to \mathbb{C}$ – вимірна функція з $|\mu(z)| < 1$ м.с. (майже скрізь) в G. *Рівнянням Бельтрамі* називається рівняння вигляду

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) f_z\,, \tag{1}$$

де $f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y)$, $f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y)$, $z = x + iy$, f_x і f_y – частинні похідні відображення f по x і y, відповідно. Функція μ називається *комплексним коефіцієнтом*, а

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|}$$

дилатаційним відношенням рівняння (1). Рівняння Бельтрамі (1) називається *ви-*

роджeним, якщо K_μ є суттєво необмеженою, тобто $K_\mu \notin L^\infty(G)$. Теореми існування гомеоморфних розв'язків класу Соболєва $W^{1,1}_{\text{loc}}$ були недавно доведені методом модулів для багатьох вироджених рівнянь Бельтрамі, див., наприклад, монографії [8,9], а також огляди [10,11].

Нехай $\sigma : G \to \mathbb{C}$ – вимірна функція і $m \geqslant 0$. Розглянемо у полярній системі координат (r, θ) наступне рівняння:

$$f_r = \sigma(re^{i\theta})\,|f_\theta|^m\, f_\theta, \tag{2}$$

де f_r і f_θ – частинні похідні відображення f по r і θ, відповідно. Враховуючи формули (21.25) на с. 611 в [12], маємо

$$rf_r = zf_z + \overline{z}f_{\overline{z}}\,, \quad f_\theta = i(zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}})\,.$$

Якщо $\overline{z}\,(\sigma(z)\,|z|\,i|zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}}|^m + 1) \neq 0$, то рівняння (2) можна записати у комплексній формі:

$$f_{\overline{z}} = \frac{z}{\overline{z}}\,\frac{\sigma(z)\,|z|\,i|zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}}|^m - 1}{\sigma(z)\,|z|\,i|zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}}|^m + 1}\,f_z. \tag{3}$$

Відмітимо, що подібні нелінійні рівняння зустрічаються у роботі [13], див. теорему 5.7.

При $m = 0$ у випадку, коли $\overline{z}\,(\sigma(z)\,|z|\,i + 1) \neq 0$, рівняння (3) зводиться до звичайного рівняння Бельтрамі (1) з комплексним коефіцієнтом

$$\mu(z) = \frac{z}{\overline{z}}\,\frac{\sigma(z)\,|z|\,i - 1}{\sigma(z)\,|z|\,i + 1}.$$

Якщо у (3) покласти $m = 0$ і $\sigma = -i/|z|$, то ми приходимо до відомої системи Коші–Рімана. При $m > 0$ рівняння (3) є частковим випадком загальної нелінійної комплексної системи рівнянь (7.33), п. 7.7 в [12]. Всюди далі будемо вважати, що $m > 0$.

Нелінійні системи рівнянь у частинних похідних зараз, як і раніше, вивчаються у різноманітних аспектах, див., наприклад, [1,2, 5–8, 10– 16]. Відмітимо, що загальні системи першого порядку використовувались М.О. Лаврентьєвим для означення квазіконформних відображень на площині, див. [1,16].

У даній роботі знайдена точна верхня оцінка експоненціального типу площі образу круга, що є аналогом відомого результату М.О. Лаврентьєва (1962), див. [1]. Як наслідок, розв'язана екстремальна задача для функціоналу мінімального значення на колі, а також отримано екстремальний аналог відомої леми Ікоми–Шварца (1965), див. [4]. Також знайдено розв'язки нелінійного рівняння Бельтрамі, на яких досягаються отримані оцінки. Точні верхні оцінки степеневого та логарифмічного типу були отримані у роботах [5–7]. Нагадаємо, що задача про спотворення площі при квазіконформних відображеннях бере свій початок у роботі Б. Боярського (1955), див. [2]. Ряд результатів у цьому напрямку отримано у роботах [17,18].

2. Допоміжні поняття та твердження.

Нагадаємо деякі означення. Відображення $f\colon G\to\mathbb{C}$ називається *регулярним у точці* $z_0\in G$, якщо в цій точці f має повний диференціал і його якобіан $J_f=|f_z|^2-|f_{\bar z}|^2\neq 0$ (див., наприклад, I. 1.6 в [19]). Гомеоморфізм f класу Соболєва $W^{1,1}_{\rm loc}$ називається *регулярним*, якщо $J_f>0$ м.с. *Регулярним гомеоморфним розв'язком рівняння* (3) будемо називати регулярний гомеоморфізм $f\colon G\to\mathbb{C}$, який м.с. у G задовольняє рівняння (3).

Всюди далі будемо вважати, що

$$B_r=\{z\in\mathbb{C}:|z|\leqslant r\}\,,\quad \gamma_r=\{z\in\mathbb{C}:|z|=r\}\,,\mathbb{B}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}.$$

Позначимо через $S(r)=|f(B_r)|$ – площу множини $f(B_r)$. У наступному твердженні наведено диференціальну нерівність для функції $S(r)$, див. лему 2 у [6].

Лема 1. *Нехай $f\colon\mathbb{B}\to\mathbb{C}$ – регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (3) класу Соболєва $W^{1,2}_{\rm loc}$ з нормуванням $f(0)=0$. Тоді*

$$S'(r)\geqslant 2^{m+2}\pi^{\frac{m}{2}+1}\left(\int\limits_{\gamma_r}\frac{ds}{|z|\left(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}}\right)^{-(m+1)}S^{\frac{m+2}{2}}(r)\tag{4}$$

для м.в. $r\in(0,1)$.

3. Екстремальна задача для функціоналу площі образу круга.

Нехай $q>0$, $\alpha>0$ і H – множина всіх регулярних гомеоморфізмів $f\colon\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ класу Соболєва $W^{1,2}_{\rm loc}(\mathbb{B})$, які задовольняють рівняння (3) м.с., $f(0)=0$ і

$$\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\geqslant q|z|^{-\alpha-1}e^{\frac{1}{|z|^\alpha}}\tag{5}$$

для м.в. $z\in\mathbb{B}$.

Теорема 1. *Для всіх $r\in(0,1)$ справедлива рівність*

$$\max_{f\in H}|f(B_r)|=\pi\left(1+\beta\left(e^{\frac{1}{r^\alpha}}-e\right)\right)^{-\frac{2}{m}}\,,\tag{6}$$

де $\beta=\frac{qm}{\alpha}$, при цьому максимум функціоналу досягається на відображенні

$$f_*(z)=\begin{cases}\left(1+\beta\left(e^{\frac{1}{|z|^\alpha}}-e\right)\right)^{-\frac{1}{m}}\frac{z}{|z|}\,, & \text{якщо } z\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } z=0.\end{cases}\tag{7}$$

Доведення. Нехай $f\in H$. З умови (5) випливає

$$\left(\int\limits_{\gamma_r}\frac{ds}{|z|\left(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}}\right)^{m+1}\leqslant\frac{(2\pi)^{m+1}r^{\alpha+1}}{q\,e^{\frac{1}{r^\alpha}}}\,.$$

З цієї оцінки та леми 1 отримаємо

$$\frac{S^{'}(r)}{S^{\frac{m+2}{2}}(r)} \geqslant 2^{m+2}\pi^{\frac{m}{2}+1}\left(\int\limits_{\gamma_r}\frac{ds}{|z|\left(\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)}\right)^{\frac{1}{m+1}}}\right)^{-(m+1)} \geqslant \frac{2q\, e^{\frac{1}{r^\alpha}}}{\pi^{\frac{m}{2}}r^{\alpha+1}}$$

для м.в. $r \in (0,1)$. Інтегруючи обидві частини останньої нерівності по $t \in (r,1)$, отримуємо

$$\int\limits_r^1 \left(\frac{S^{-\frac{m}{2}}(t)}{-\frac{m}{2}}\right)^{'} dt \geqslant \frac{2q}{\alpha\pi^{\frac{m}{2}}}\left(e^{\frac{1}{r^\alpha}} - e\right). \tag{8}$$

Відмітимо, що $g_m(t) = \frac{S^{-\frac{m}{2}}(t)}{-\frac{m}{2}}$ є неспадною. Тоді

$$\int\limits_r^1 \left(\frac{S^{-\frac{m}{2}}(t)}{-\frac{m}{2}}\right)^{'} dt = \int\limits_r^1 (g_m(t))^{'}\, dt \leqslant g_m(1) - g_m(r) = \frac{2}{m}\left(S^{-\frac{m}{2}}(r) - S^{-\frac{m}{2}}(1)\right) \tag{9}$$

(див. теорему IV.7.4 в [20]). Комбінуючи нерівності (9) і (8), маємо

$$\frac{2}{m}\left(S^{-\frac{m}{2}}(r) - S^{-\frac{m}{2}}(1)\right) \geqslant \frac{2q}{\alpha\pi^{\frac{m}{2}}}\left(e^{\frac{1}{r^\alpha}} - e\right).$$

Звідси, враховуючи умову $S(1) \leqslant \pi$, приходимо до оцінки

$$S(r) \leqslant \pi\left(1 + \beta\left(e^{\frac{1}{r^\alpha}} - e\right)\right)^{-\frac{2}{m}}, \tag{10}$$

де $\beta = \frac{qm}{\alpha}$, для всіх $r \in (0,1)$.

Очевидно, що знак рівності в останній оцінці досягається на відображенні (7). Перевіримо, що відображення f_* належить класу H.

Оскільки f_* є гомеоморфізмом класу C^1 в $\mathbb{B} \setminus \{0\}$, то $f_* \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{B} \setminus \{0\})$. Покладемо $B_{r_0} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r_0\}$, $r_0 \in (0,1)$ та

$$R(r) = \left(1 + \beta\left(e^{\frac{1}{r^\alpha}} - e\right)\right)^{-\frac{1}{m}}.$$

Тоді знаходимо

$$(f_*)_r = R^{'}(r)e^{i\theta}, \quad (f_*)_\theta = iR(r)e^{i\theta}, \quad R^{'}(r) = \frac{qe^{\frac{1}{r^\alpha}}}{r^{\alpha+1}}\left(1 + \beta\left(e^{\frac{1}{r^\alpha}} - e\right)\right)^{-\frac{1}{m}-1}.$$

За формулою на с. 611 в [12], маємо

$$\int\limits_{B_{r_0}} \left(|(f_*)_z|^2 + |(f_*)_{\overline{z}}|^2\right) dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_{B_{r_0}} \left(|(f_*)_r|^2 + r^{-2}|(f_*)_\theta|^2\right) rdrd\theta =$$

$$= \pi \int\limits_{0}^{r_0} r \left(R^{'}(r)\right)^2 dr + \pi \int\limits_{0}^{r_0} \frac{R^2(r)}{r} dr =$$

$$= \pi q^2 \int\limits_{0}^{r_0} \frac{e^{\frac{2}{r^\alpha}}}{r^{2\alpha+1}} \left(1+\beta\left(e^{\frac{1}{r^\alpha}}-e\right)\right)^{-2\left(1+\frac{1}{m}\right)} dr + \pi \int\limits_{0}^{r_0} \left(1+\beta\left(e^{\frac{1}{r^\alpha}}-e\right)\right)^{-\frac{2}{m}} \frac{dr}{r}\,. \quad (11)$$

Покажемо збіжність цих інтегралів. Дійсно, легко перевірити, що при $\alpha > 0$ інтеграли $\int\limits_0^{r_0} e^{-\frac{2}{mr^\alpha}} \frac{dr}{r^{2\alpha+1}}$ та $\int\limits_0^{r_0} e^{-\frac{2}{mr^\alpha}} \frac{dr}{r}$ є збіжними. Оскільки

$$\lim_{r\to 0} \frac{g_1(r)}{e^{-\frac{2}{mr^\alpha}} r^{-2\alpha-1}} = \beta^{-\frac{2(m+1)}{m}} > 0$$

та

$$\lim_{r\to 0} \frac{g_2(r)}{e^{-\frac{2}{mr^\alpha}} r^{-1}} = \beta^{-\frac{2}{m}} > 0,$$

де $g_1(r) = \frac{e^{\frac{2}{r^\alpha}}}{r^{2\alpha+1}} \left(1+\beta\left(e^{\frac{1}{r^\alpha}}-e\right)\right)^{-2\left(1+\frac{1}{m}\right)}$ і $g_2(r) = \left(1+\beta\left(e^{\frac{1}{r^\alpha}}-e\right)\right)^{-\frac{2}{m}} \frac{1}{r}$, то застосувавши граничну ознаку порівняння невласних інтегралів, див. наслідок теореми 1, с. 674 у [21], отримаємо збіжність інтегралів у (11).

Далі знаходимо

$$(f_*)_\theta = \left(1+\beta\left(e^{\frac{1}{r^\alpha}}-e\right)\right)^{-\frac{1}{m}} ie^{i\theta}, \quad |(f_*)_\theta|^m = \left(1+\beta\left(e^{\frac{1}{r^\alpha}}-e\right)\right)^{-1}$$

і

$$(f_*)_r = \frac{qe^{\frac{1}{r^\alpha}}}{r^{\alpha+1}} \left(1+\beta\left(e^{\frac{1}{r^\alpha}}-e\right)\right)^{-\frac{1}{m}-1} e^{i\theta}\,.$$

Звідси випливає, що знайдене відображення f_* є розв'язком рівняння (3) з $\sigma = -q|z|^{-\alpha-1}e^{\frac{1}{|z|^\alpha}}i$. Очевидно, що $\operatorname{Im}\overline{\sigma(z)} = q|z|^{-\alpha-1}e^{\frac{1}{|z|^\alpha}}$ для м.в. $z \in \mathbb{B}$. Тому $f_* \in H$. $\Box$

Зауваження. Очевидно, що $\max\limits_{f\in H} |f(B_r)| \to 0$ при $r \to 0$.

4. Інші екстремальні задачі.

Нижче знайдено максимум функціоналу $l_r(f) = \min\limits_{|z|=r} |f(z)|$ на класі H.

Наслідок 1. *Для всіх $r \in (0,1)$ справедлива рівність*

$$\max_{f\in H} l_r(f) = \left(1+\beta\left(e^{\frac{1}{r^\alpha}}-e\right)\right)^{-\frac{1}{m}}, \quad (12)$$

де $\beta = \frac{qm}{\alpha}$, при цьому максимум функціоналу досягається на відображенні (7).

Доведення. Дійсно, враховуючи нерівність (10) і те, що $f(0) = 0$, маємо

$$\pi l_r^2(f) \leqslant S(r) \leqslant \pi \left(1+\beta\left(e^{\frac{1}{r^\alpha}}-e\right)\right)^{-\frac{2}{m}}.$$

Звідси
$$l_r(f) \leqslant \left(1+\beta\left(e^{\frac{1}{r^\alpha}}-e\right)\right)^{-\frac{1}{m}}. \tag{13}$$
Очевидно, що знак рівності в останній нерівності досягається на відображенні (7), яке належить класу H. $\square$

Наступне твердження є екстремальним аналогом експоненціального типу відомої леми Ікоми–Шварца, див. [4].

Наслідок 2. *Для будь-якого відображення $f \in H$ виконується нерівність*
$$\liminf_{z\to 0} |f(z)|\, e^{\frac{1}{m|z|^\alpha}} \leqslant \left(\frac{\alpha}{qm}\right)^{\frac{1}{m}}.$$
При цьому, знак рівності досягається на відображенні (7).

Доведення. Дійсно, з оцінки (13) отримаємо
$$\liminf_{z\to 0} |f(z)|\, e^{\frac{1}{m|z|^\alpha}} = \liminf_{r\to 0} l_r(f)\, e^{\frac{1}{mr^\alpha}} \leqslant$$
$$\leqslant \liminf_{r\to 0}\left(1+\beta\left(e^{\frac{1}{r^\alpha}}-e\right)\right)^{-\frac{1}{m}} e^{\frac{1}{mr^\alpha}} = \left(\frac{\alpha}{qm}\right)^{\frac{1}{m}}.$$
Легко перевірити, що знак рівності в цій оцінці досягається на відображенні (7). $\square$

Цитована література

1. *Лаврентьев М.А.* Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 136 с.
2. *Боярский Б.В.* Гомеоморфные решения систем Бельтрами // Доклады Академии наук. – 1955. – Т. 102. – С. 661–664.
3. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Martio O., Ryazanov V.* Infinitesimal geometry of quasiconformal and bi–Lipschitz mappings in the plane. – EMS Tracts in Mathematics, 19. – EMS Publishing House, 2013. – 214 p.
4. *Ikoma K.* On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space // Nagoya Math. J. – 1965. – V. 25. – P. 175–203.
5. *Salimov R.R., Stefanchuk M.V.* Logarithmic Asymptotics of the Nonlinear Cauchy–Riemann–Beltrami Equation // Ukr. Math. J. – 2021. – Vol. 73. – P. 463–478.
6. *Салімов Р.Р., Стефанчук М.В.* Про одну екстремальну задачу для нелінійних систем типу Коші–Рімана–Бельтрамі // Праці ІПММ НАН України. – 2020. – Т. 34. – С. 109–115.
7. *Salimov R.R., Stefanchuk M.V.* On the local properties of solutions of the nonlinear Beltrami equation // J. Math. Sci. – 2020. – Vol. 248. – P. 203–216.
8. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equations: A geometric approach. – Developments in Math., 26. – Springer, New York etc, 2012.
9. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
10. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On recent advances in the degenerate Beltrami equations // Ukr. Mat. Visn. – 2010. – V. 7, no. 4. – P. 467–515.
11. *Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation. – Handbook in Complex Analysis: Geometric function theory, v. 2. – Elseiver Sci. B. V., Amsterdam, 2005. – P. 555–597.

12. *Astala K., Iwaniec T., Martin G.* Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane. – Princeton Mathematical Series, 48. – Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.
13. *Guo C.–Y., Kar M.* Quantitative uniqueness estimates for p–Laplace type equations in the plane // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. – 2016. – V. 143. – P. 19–44.
14. *Golberg A., Salimov R.* Nonlinear Beltrami equation // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2019. – Vol. 65, no. 1. – P. 6–21.
15. *Golberg A., Salimov R., Stefanchuk M.* Asymptotic Dilation of Regular Homeomorphisms // Complex Analysis and Operator Theory. – V. 13, Is. 6. – P. 2813–2827.
16. *Лаврентьев М.А.* Общая задача теории квазиконформных отображений плоских областей // Матем. сб. – 1947. – Т. 21 (63), no. 2. – С. 285–320.
17. *Astala K.* Area distortion of quasiconformal mappings // Acta Math. – 1994. – V. 173. – P. 37–60.
18. *Eremenko A., Hamilton D.H.* On the area distortion by quasiconformal mappings // Proc. Amer. Math. Soc. – 1995. – V. 123. – P. 2793–2797.
19. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal Mappings in the Plane. – New York: Springer–Verlag, 1973. – 258 p.
20. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: ИЛ, 1949. – 495 с.
21. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа: Учеб. для студентов университетов и вузов. В 3 т. Т. 1. – М.: Высш. шк., 1988. – 712 с.

References

1. Lavrent'ev, M.A. (1962). *The variational method in boundary–value problems for systems of equations of elliptic type.* Moscow, Izd-vo AN SSSR (in Russian).
2. Boyarski, B.V. (1955). Homeomorphic solutions of Beltrami systems. *Dokl. of the Academy of Sciences, 102*, 661–664.
3. Bojarski, B., Gutlyanskii, V., Martio, O., Ryazanov, V. (2013). *Infinitesimal geometry of quasiconformal and bi–Lipschitz mappings in the plane.* EMS Tracts in Mathematics, 19. EMS Publishing House.
4. Ikoma, K. (1965). On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space. *Nagoya Math. J., 25*, 175–203.
5. Salimov, R.R., Stefanchuk, M.V. (2021). Logarithmic Asymptotics of the Nonlinear Cauchy–Riemann–Beltrami Equation. *Ukr. Math. J., 73*, 463–478.
6. Salimov, R.R., Stefanchuk, M.V. (2020). On one extremal problem for nonlinear Cauchy–Riemann–Beltrami systems. *Proceedings of IAMM of NASU, 34*, 109–115.
7. Salimov, R.R., Stefanchuk, M.V. (2020). On the local properties of solutions of the nonlinear Beltrami equation. *J. Math. Sci., 248*, 203–216.
8. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2012). *The Beltrami equations: A geometric approach.* Developments in Math., 26. Springer, New York etc.
9. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2009). *Moduli in Modern Mapping Theory.* New York: Springer Science + Business Media, LLC.
10. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2010). On recent advances in the degenerate Beltrami equations. *Ukr. Mat. Visn., 7*(4), 467–515.
11. Srebro, U., Yakubov, E. (2005). *The Beltrami equation.* Handbook in Complex Analysis: Geometric function theory, v. 2. Elseiver Sci. B. V., Amsterdam, 555–597.
12. Astala, K., Iwaniec, T., Martin, G. (2009). *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane.* Princeton Mathematical Series, 48. Princeton University Press, Princeton, NJ.
13. Guo, C.–Y., Kar, M. (2016). Quantitative uniqueness estimates for p–Laplace type equations in the plane. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 143*, 19–44.
14. Golberg, A., Salimov, R. (2019). Nonlinear Beltrami equation. *Complex Variables and Elliptic Equations, 65*(1), 6–21.
15. Golberg, A., Salimov, R., Stefanchuk, M. (2019). Asymptotic Dilation of Regular Homeomorphisms.

Complex Analysis and Operator Theory, 13(6), 2813–2827.
16. Lavrent'ev, M.A. (1947). A general problem of the theory of quasiconformal representation of plane regions. *Mat. sbornik, 21*(2), 285–320 (in Russian).
17. Astala, K. (1994). Area distortion of quasiconformal mappings. *Acta Math., 173*, 37–60.
18. Eremenko, A., Hamilton, D.H. (1995). On the area distortion by quasiconformal mappings. *Proc. Amer. Math. Soc., 123*, 2793–2797.
19. Lehto, O., Virtanen, K. (1973). *Quasiconformal Mappings in the Plane.* New York, Springer–Verlag.
20. Sachs, S. (1949). *Integral theory.* M., IL (in Russian).
21. Kudryavtsev, L.D. (1988). *Course of mathematical analysis: Proc. for students of universities.* V. 1. M., Higher school (in Russian).

M.V. Stefanchuk

On extremal problems of exponential type for solutions of the nonlinear Beltrami equation.

The study of nonlinear Cauchy–Riemann–Beltrami systems is conditioned study of certain problems of hydrodynamics and gas dynamics, in which there is an inhomogeneity of media and a certain singularity. The paper considers a nonlinear Cauchy–Riemann–Beltrami type system in the polar coordinate system in which the radial derivative is expressed through the complex coefficient, the angular derivative and its m-degree module. In particular, if m is equal to zero, then this system of equations is reduced to the ordinary linear system of Beltrami equations. Note that general first–order systems were used by M.O. Lavrentyev to define quasiconformal mappings on the plane, see [1]. The problem of area distortion under quasiconformal mappings is due to the work of B. Boyarsky, see [2]. For the first time, the upper estimate of the area of the disk image under quasiconformal mappings was obtained by M.O. Lavrentyev, see [1]. A refinement of the Lavrentyev inequality in terms of the angular dilatation was obtained in the monograph [3], see Proposition 3.7. In the present paper, it is found an exact upper estimate of exponential type of the area of the image of the disk, which is analogous to the known result by M.O. Lavrentyev. As a result, the extremal problem for the functional of minimal value on the circle of regular homeomorphisms $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ of the Sobolev class $W^{1,2}_{\rm loc}(\mathbb{B})$, which are the solutions of the nonlinear Beltrami equation, is solved. In addition, an extreme analogue of the famous Icoma–Schwartz lemma was obtained, see [4]. Also, we find here a mapping on which the received estimates are achieved. Thus, the paper solves extreme problems under a certain class of regular homeomorphic solutions of nonlinear Beltrami equation with generalized derivatives integrated with a square. Earlier in the works [5] – [7] the upper estimates of power and logarithmic types were obtained. Proof of the main result of the article is based on the differential relation for the area function of the images of disks of arbitrary radii, which was established in the work [6] for regular homeomorphisms of the Sobolev class $W^{1,2}_{\rm loc}(\mathbb{B})$.

Keywords: *Beltrami equation, nonlinear Beltrami equation, regular homeomorphism, regular homeomorphic solution of Beltrami equation.*

Ін-т математики НАН України, Київ
`stefanmv43@gmail.com`

Отримано 01.05.22