УДК 517.9
DOI: 10.32782/1683-4720-2022-36-5

©2022. **С.М. Чуйко, О.С. Чуйко, В.О. Кузьміна**

УМОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ЗАДАЧІ, ОБЕРНЕНОЇ ДО ЛІНІЙНОГО АВТОНОМНОГО ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ ФРЕДГОЛЬМА З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ

Актуальність вивчення теорії інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром пов'язана з численними застосуваннями в задачах механіки, аеродинаміки, відновлення параметрів, а також теорії коливань. У роботі суттєво використовується апарат псевдообернення (за Муром–Пенроузом) матриць. Запропоновані умови існування, а також конструкція розв'язку задачі, оберненої до задачі про знаходження розв'язку інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром. Запропонована схема дослідження задачі, оберненої до задачі про знаходження розв'язку інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром може бути перенесена на задачі, обернені до задачі про знаходження розв'язку інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром, які містять диференціально-алгебраїчний оператор. З іншого боку, у разі нерозв'язності задачі, оберненої до задачі про знаходження розв'язку інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром таку задачу можна регулятизувати.

MSC: 34N05.

Ключові слова: *обернена задача, інтегро-диференціальне рівняння типу Фредгольма, вироджене ядро, псевдообернена за Муром–Пенроузом матриця.*

1. Постановка задачі.

Нетерова крайова задача для лінійного інтегро-диференціального рівнянння типу Фредгольма з виродженим ядром вперше була розв'язана у статті [1]. Обернені задачі для інтегро-диференціальних рівняннь типу Фредгольма мало досліджені. Досліджуємо задачу, обернену до лінійного автономного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром

$$y'(t) = A\,y(t) + \Phi \int_a^b \Big[B\,y(s) + C\,y'(s)\Big]\,ds \qquad (1)$$

за відомим розв'язком цієї задачі [1, 2]

$$y(t) := \varphi(t) \in \mathbb{D}^2[a;b],\ \ y'(t) := \varphi'(t) \in \mathbb{L}^2[a;b].$$

Тут

$$A, B, C, \Phi \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

– невідомі сталі матриці. У наслідок автономності рівняння (1) можна припустити, що $\Phi := I_n$. Дотримуючись схеми методу найменших квадратів [3–5], вимагатимемо мінімізації величини нев'язки

$$\Delta_0 := \left|\left|\varphi'(t) - A\,\varphi(t) - \Phi \int_a^b \Big[B\,\varphi(s) + C\,\varphi'(s)\Big]\,ds\right|\right|^2_{\mathbb{L}^2[a,b]} \to \min.$$

Позначимо [6]

$$\left\{\Xi_j\right\}_{j=1}^{n^2} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

природний базис простору $\mathbb{R}^{n\times n}$. Позначимо також оператор [7, 8]

$$\mathcal{M}[A]: \ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n},$$

як оператор, який ставить у відповідність матриці $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор $\mathcal{B} := \mathcal{M}[A]$, утворений з n стовпців матриці A, а також обернений оператор

$$\mathcal{M}^{-1}\Big[\mathcal{B}\Big]: \ \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

який ставить у відповідність вектору $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицю $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Матриці A, B та C шукатимемо у вигляді сум

$$A = \sum_{j=1}^{p} \Xi_j\, \alpha_j, \ B = \sum_{j=1}^{q} \Xi_j\, \beta_j, \ C = \sum_{j=1}^{r} \Xi_j\, \gamma_j, \ \alpha_j, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}^1;$$

тут

$$p \le n^2, \ q \le n^2, \ r \le n^2.$$

2. Необхідні і достатні умови розв'язності.

Позначимо матрицю Грама

$$\Gamma_0 := \int_a^b \Omega_0^*(t)\Omega_0(t)\, dt \in \mathbb{R}^{(p+q+r)\times(p+q+r)};$$

тут

$$\Omega_0(t) := \Big(\ \Xi_1\, \varphi(t) \quad \dots \quad \Xi_p\, \varphi(t) \ ,$$

$$\int_a^b \Xi_1\, \varphi(t)\, dt \quad \dots \quad \int_a^b \Xi_q\, \varphi(t)\, dt \quad \int_a^b \Xi_1\, \varphi'(t)\, dt \quad \dots \quad \int_a^b \Xi_r\, \varphi'(t)\, dt \ \Big).$$

Невідомий вектор

$$\gamma_0 \in \mathbb{R}^{(p+q+r)}$$

визначає рівняння

$$\Gamma_0\, \gamma_0 = \int_a^b \Omega_0^*(t)\varphi'(t)\, dt, \tag{2}$$

розв'язне за умови

$$\det \Gamma_0 \ne 0. \tag{3}$$

За умови (3) рівняння (2) має єдиний розв'язок

$$\gamma_0 = \Gamma_0^{-1} \int_a^b \Omega_0^*(t)\varphi'(t)\, dt,$$

який визначає матриці

$$A = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_0\,\gamma_0),\ \mathcal{P}_0 := \begin{pmatrix} I_p & O & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times(p+q+r)},$$

$$B = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_1\,\gamma_0),\ \mathcal{P}_1 := \begin{pmatrix} O & I_q & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{q\times(p+q+r)}$$

та

$$C = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_2\,\gamma_0),\ \mathcal{P}_2 := \begin{pmatrix} O & O & I_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r\times(p+q+r)}.$$

Умова (3) являє собою необхідну умову мінімізації величини нев'язки Δ_0; достатню умову мінімізації величини нев'язки Δ_0 забезпечує додатна визначеність матриці Грама Γ_0. В свою чергу, додатну визначеність матриці Грама Γ_0 забезпечує виконання критерію Сильвестра, а саме, додатність визначників всіх квадратних діагональних мінорів матриці Грама Γ_0. Таким чином, доведено наступну лему.

Лема. *За умови* (3)*, у разі додатної визначеності матриці Грама* Γ_0*, задача про відновлення автономного лінійного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром* (1) *за відомим розв'язком цієї задачі*

$$y(t) := \varphi(t) \in \mathbb{D}^2[a;b],\ y'(t) := \varphi'(t) \in \mathbb{L}^2[a;b]$$

має єдиний розв'язок, який мінімізує величину нев'язки Δ_0 *у сенсі найменших квадратів.*

3. Умови відновлення двоточкової крайової умови.

Досліджуємо далі задачу, обернену до двоточкової крайової задачі для лінійного автономного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром

$$y'(t) = A\,y(t) + \Phi \int_a^b \Big[B\,y(s) + C\,y'(s)\Big]\,ds,\ M\,y(a) + N\,y(b) = \alpha \tag{4}$$

за відомим розв'язком цієї задачі [1, 2]

$$y(t) := \varphi(t) \in \mathbb{D}^2[a;b],\ y'(t) := \varphi'(t) \in \mathbb{L}^2[a;b]$$

та відомим вектором $\alpha \in \mathbb{R}^m$; тут

$$A, B, C, \Phi \in \mathbb{R}^{n\times n},\ M, N \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

– невідомі сталі матриці. Дотримуючись схеми методу найменших квадратів [3–5], вимагатимемо мінімізації величини нев'язки

$$\Delta_1 := \Big|\Big| M\,\varphi(a) + N\,\varphi(b) - \alpha \Big|\Big|^2_{\mathbb{R}^m} \to \min.$$

Позначимо [6]

$$\Big\{\check{\Xi}_j\Big\}_{j=1}^{mn} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

природний базис простору $\mathbb{R}^{m\times n}$. Матриці M та N шукатимемо у вигляді сум

$$M = \sum_{j=1}^{p} \check{\Xi}_j\, \alpha_j,\ N = \sum_{j=1}^{q} \check{\Xi}_j\, \beta_j;$$

тут

$$p \le mn,\ q \le mn.$$

Позначимо матрицю Грама

$$\Gamma_1 := \Omega_1^* \Omega_1 \in \mathbb{R}^{(p+q)\times(p+q)};$$

тут

$$\Omega_1 := \left(\begin{array}{cccccc} \check{\Xi}_1\, \varphi(a) & \dots & \check{\Xi}_p\, \varphi(a) & \check{\Xi}_1\, \varphi(b) & \dots & \check{\Xi}_q\, \varphi(b) \end{array} \right).$$

Невідомий вектор

$$\gamma_1 \in \mathbb{R}^{(p+q)}$$

визначає рівняння

$$\Gamma_1\, \gamma_1 = \Omega_1^* \alpha, \tag{5}$$

розв'язне за умови

$$\det \Gamma_1 \ne 0. \tag{6}$$

Умова (6) являє собою необхідну умову мінімізації величини нев'язки Δ_1; достатню умову мінімізації величини нев'язки Δ_1 забезпечує додатна визначеність матриці Грама Γ_1. В свою чергу, додатну визначеність матриці Грама Γ_1 забезпечує виконання критерію Сильвестра, а саме, додатність визначників всіх квадратних діагональних мінорів матриці Грама Γ_1. Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема. *За умови* (3)*, у разі додатної визначеності матриці Грама* Γ_0*, задача про відновлення автономного лінійного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром* (1) *за відомим розв'язком цієї задачі має єдиний розв'язок*

$$A = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_0\, \gamma_0),\ B = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_1\, \gamma_0),\ C = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{P}_2\, \gamma_0),\ \gamma_0 = \Gamma_0^{-1} \int_a^b \Omega_0^*(t) \varphi'(t)\, dt,$$

який мінімізує величину нев'язки Δ_0 *у сенсі найменших квадратів. За умови* (6)*, у разі додатної визначеності матриці Грама* Γ_1*, задача про відновлення автономного лінійного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром* (4) *за відомим розв'язком цієї задачі*

$$y(t) := \varphi(t) \in \mathbb{D}^2[a;b],\ y'(t) := \varphi'(t) \in \mathbb{L}^2[a;b]$$

має єдиний розв'язок

$$M = \mathcal{M}^{-1}(\check{\mathcal{P}}_0\, \gamma_1),\ \check{\mathcal{P}}_0 := \left(\begin{array}{cc} I_p & O \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{p\times(p+q)},$$

$$N = \mathcal{M}^{-1}(\check{\mathcal{P}}_1\,\gamma_1),\ \check{\mathcal{P}}_1 := \begin{pmatrix} O & I_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{q\times(p+q)},$$

який мінімізує величину нев'язки Δ_1 у сенсі найменших квадратів.

Приклад. *Умови доведеної теореми справджуються у задачі про відновлення двоточкової крайової задачі для лінійного автономного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма з виродженим ядром*

$$y'(t) = A\,y(t) + \Phi \int_0^1 \Big[B\,y(s) + C\,y'(s)\Big]\,ds,\ M\,y(a) + N\,y(b) = \alpha \tag{7}$$

за відомим розв'язком

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} t & 1 \end{pmatrix}^*$$

та відомим вектором

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^*.$$

Природний базис простору $\mathbb{R}^{2\times 2}$ складають матриці

$$\Xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \Xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \Xi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \Xi_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Покладемо

$$p := q = 2,\ r := 0.$$

Таким чином, отримуємо невироджену

$$\det \Gamma_0 = \frac{1}{2304}$$

додатно визначену матрицю

$$\Gamma_0 = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

тому задача про відновлення автономного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма (7) за відомим розв'язком $y(t) := \varphi(t)$ однозначно розв'язна:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Покладемо

$$p := 0,\ q = 2.$$

Таким чином, отримуємо невироджену додатно визначену матрицю

$$\Gamma_1 = I_2,$$

тому задача про відновлення двоточкової крайової умови однозначно розв'язна:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запропонована у статті схема дослідження задач, обернених до автономного інтегро-диференціального рівняння типу Фредгольма, аналогічно [9, 10] може бути перенесена на задачі, обернені до лінійної крайової задачі для різницево-алгебраїчного рівняння, а також на задачі, обернені до крайових задач у частинних похідних [11, 12].

Цитована література

1. *Самойленко А.М., Бойчук О.А., Кривошея С.А.* Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48, № 11. – С. 1576–1579.
2. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. – 298 pp.
3. *Чуйко С.М., Чуйко О.В., Кузьміна В.О.* Про розв'язки крайової задачі для матричного інтегрально-диференціального рівняння з виродженим ядром // Нелінійні коливання. – 2020. – Т. 23, № 4. – С. 565–573.
4. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 408 с.
5. *Чуйко С.М.* О приближенном решении краевых задач методом наименьших квадратов // Нелінійні коливання. – 2008. – Т. 11, № 4. – С. 554–573.
6. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 318 с.
7. *Magnus J.R., Neudecker H.* Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics, 2nd Edition. – Wiley, 1999. – 424 pp.
8. *Chuiko S.M.* To the issue of a generalization of the matrix differential-algebraic boundary-value problem // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – V. 227, № 1. – P. 13–25.
9. *Бойчук А.А.* Краевые задачи для систем разностных уравнений // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 6. – С. 832–835.
10. *Чуйко С.М., Несмелова О.В., Калініченко Я.В.* Умови розв'язності задачі, оберненої до задачі Коші для різницево-алгебраїчного рівняння // Нелінійні коливання. – 2021. – Т. 24, № 3. – С. 422–434.
11. *Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I.* The Dirichlet problem for the Poisson type equations in the plane // Доповіді Національної академії наук України. – 2020. – № 5. – С. 10–16.
12. *Skrypnik I.I.* Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption // Israel Journal of Mathematics. – 2016. – V. 215, № 1. – P. 163–179.

References

1. Samoilenko, A.M., Boichuk, A.A., Krivosheya, S.A. (1996). Boundary value problems for systems of integro-differential equations with Degenerate Kernel. *Ukrainian Mathematical Journal, 48*(11), 1785–1789.
2. Boichuk, A.A., Samoilenko, A.M. (2016). *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition).* Berlin; Boston, De Gruyter.
3. Chuiko, S.M., Chuiko, O.V., Kuzmina, V.O. (2020). Solutions of boundary-value problems for matrix integro-differential equations with degenerate kernel. *Nonlinear oscillations, 23*(4), 565–573.
4. Akhiezer, N.I. (1965). *Lekcii po teorii approksimacii.* Moscow, Gosudarstvennoe Izd-vo Tehniko-Teoreticeskoj Literatury (in Russian).

5. Chuiko, S.M. (2008). *On an approximate solution of boundary value problems by the least square method. Nonlinear oscillations, 11*(4), 585–604.
6. Voevodin, V.V., Kuznetsov Yu.A. (1984). *Matrices and calculations.* Moscow., Nauka (in Russian).
7. Magnus, J.R., Neudecker, H. (1999). *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics, 2nd Edition.* Wiley.
8. Chuiko, S.M. (2017). To the issue of a generalization of the matrix differential-algebraic boundary-value problem. *Journal of Mathematical Sciences, 227*(1), 13–25.
9. Boichuk, A.A. (1997). Boundary-value problems for systems of difference equations. *Ukrainian Mathematical Journal, 49*(6), 930–934.
10. Chuiko, S.M., Kalinichenko, Ya.V., Nesmelova, O.V. (2021). Conditions of solvability of the problem inverse to the Cauchy problem for the difference-algebraic equation. *Nonlinear oscillations, 24*(3), 422–434.
11. Gutlyanskii, V.Ya., Nesmelova, O.V., Ryazanov, V.I. (2020). The Dirichlet problem for the Poisson type equations in the plane. *Reports of NAS Ukraine, 5*, 10–16.
12. Skrypnik, I.I. (2016). Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption. *Israel Journal of Mathematics, 1*, 163–179.

S.M. Chuiko, O.S. Chuiko, V.A. Kuzmina

On the solvability of an inverse problem to the linear autonomous integral-differential equation of the Fredholm type with a degenerate kernel.

The current interest of studying the theory of integro-differential equations of the Fredholm type with a degenerate kernel is associated with numerous applications in problems of mechanics, aerodynamics, recovery of parameters, and also the theory of oscillations. Studying the theory of inverse problem to the linear autonomous integro-differential equation of the Fredholm type with a degenerate kernel related to the study of inverse problems. In turn, the study of inverse problems is complicated by the incorrectness of such problems. Numerous regularization schemes have been developed for incorrectly solved problems. We use the fact that an incorrectly posed problem for a linear algebraic system, namely, an unsolvable problems, always has a pseudo-solution that minimizes the residual gap for this problem in the sense of least squares. In this work a pseudo-inversion apparatus (by Moore–Penrose) of the matrix are basically used. We construct conditions for the existence of solution of an inverse problem to the linear autonomous integro-differential equation of the Fredholm type with a degenerate kernel and to the restoration of two-point boundary conditions. The proposed scheme of studying solvability of an inverse problem to the linear autonomous integro-differential equation of the Fredholm type with a degenerate kernel can be transferred on matrix boundary value problems for integro-differential systems of the Fredholm type with degenerate kernel containing differential-algebraic operator. On the other hand, in case of unsolvability of inverse problem to the linear matrix boundary value problems for integro-diffrential systems of the Fredholm type with a degenerate kernel can be regularized. The research scheme proposed in the article can be useful, for example, to the restoration of periodic boundary conditions.

Keywords: *inverse problem, integral-differential equation of the Fredholm type, degenerate kernel, pseudo-inverse by Moore–Penrose matrix.*

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ
`chujko-slav@ukr.net`

Отримано 07.04.2022