УДК 62-50, 519.7
DOI: 10.37069/1683-4720-2022-36-06

©2022. **Н.В. Жоголева, В.Ф. Щербак**

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ

Розглядається задача визначення вектора постійних параметрів динамічної системи, що описує коливння нелінійного осцилятора за інформацією про значення її фазового вектора. Пропонується загальна схема побудови асимптотичного ідентифікатора, яку використано для отримання оцінок невідомих параметрів рівнянь математичного маятника. Використовується метод синтезу інваріантних співвідношень, розроблений для вирішення обернених задач математичної теорії керування. Метод дозволяє знаходити залежності між змінними, які виникають на траєкторіях побудованої спеціальним чином розширеної динамічної системи та визначають шукані невідомі як функції від відомих величин.

MSC: 34C15, 34D20.

Ключові слова: *ідентифікація, інваріантні співвідношення, математичний маятник.*

1. Додаткові співвідношення в задачах ідентифікації. Для багатьох прикладних задач керування характерна ситуація, коли частина або всі параметри вихідної динамічної системи є невідомими. У таких випадках виникає задача ідентифікації, яка полягає у визначенні невідомих параметрів системи за інформацією про її вихід – відомої інформації про рух. Можливість вирішення задачі ідентифікації – властивість ідентифікованості, істотно залежить від аналітичної структури правих частин рівнянь динаміки та доступної інформації [1]. Для розв'язку самої задачі ідентифікації в роботі використано метод інваріантних співвідношень [2], який було розроблено в аналітичній механіці та призначено, зокрема, для пошуку частинних розв'язків (залежностей між змінними) в задачах динаміки твердого тіла з нерухомою точкою. Модифікація цього методу до проблем теорії керування, спостереження дозволило синтезувати між відомими і невідомими величинами вихідної системи додаткові зв'язки, що виникають в процесі руху її розширеної моделі [3] – [5]. Варто зазначити, що більш загальний підхід, який формує відповідний метод розв'язку задач спостереження для нелінійних динамічних систем завдяки синтезу інваріантного многовиду в просторі розширеної системи, було запропоновано в роботах [6], [7] як певну модифікацію методу стабілізації нелінійних систем $I\&I$ (Input and Invariance).

Метою даної роботи є поширення методу синтезу інваріантних співвідношень в задачах керування на задачі ідентифікації параметрів нелінійних осциляторів. Буде розглянуто відносно простий випадок задачі ідентифікації, а саме: 1) виходом вихідної системи є повний фазовий вектор і 2) система лінійно залежить від невідомих параметрів. Узагальнення на більш складні конструкції систем вхід - вихід, у тому числі і із залученням інформації про вихід, отриманий на декількох траєкторіях, можуть бути проведені з використанням описаного нижче підходу і є предметом окремого дослідження.

Розглянемо модель осцилятора, яка лінійно залежить від векторів постійних параметрів $a_1 = col(a_{11}, ..., a_{1k_1}),\ a_2 = col(a_{21}, ..., a_{2k_2})$.

$$\ddot{x} + a_1^T f(x) + a_2^T g(x) = u(t, x), \tag{1}$$

де $x, u(t,x) \in R,\ a_1, f(x) \in R^{k_1},\ a_2, g(x) \in R^{k_2}$. Далі будемо вважати, що:

1) функції $f(x), g(x), u(t,x)$ задовольняють умовам теореми про існування та єдиність розв'язку $x(t)$ диференціального рівняння (1) для $t \in [0, \infty)$;

2) Значення фазового вектору вимірюються в процесі коливань осцилятора, тобто $x(t), \dot{x}(t)$ є відомими функціями часу;

3) Оскільки пропонуемий метод ідентифікації призначено для отримання асимптотичних оцінок параметрів, то природно припустити, що пропонована схема застосовуеться для реального обєкту при достатньо довгим за часом спостереженні за його обмеженими коливаннями $\mid x(t) \mid, \mid \dot{x}(t) \mid \leq M < \infty$, амплітуда яких не затухає до нуля.

Позначивши $x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}$ перепишемо рівняння (1) у вигляді системи

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \\ &\dot{x}_2 = -a_1^T f(x_1) x_2 - a_2^T g(x_1) + u(x_1, t). \end{aligned} \tag{2}$$

Далі, будемо вважати, що умови ідентифікованості [1] виконано в області, до якої належить траекторія системи (2). Сама задача ідентифікації полягає у визначенні векторів a_1, a_2 за відомою інформацією про коливання осцилятора. Такою інформацією є вихід – в нашому випадку функції часу $x_1(t), x_2(t)$, а також ті величини, які можуть бути отримані з використанням тільки значень виходу. Зокрема, далі відомим вважатимемо будь-який розв'язок задачі Коші для довільної системи диференціальних рівнянь

$$\dot{\xi} = U(\xi, x_1(t), x_2(t)),\ \xi(0) = \xi_0 \in R^{k_1+k_2}, \tag{3}$$

в якій на праву частину системи $U(\xi, x_1, x_2)$ поки що накладено єдине обмеження, а саме: ці функції повинні задовольняти достатнім умовам теорем існування та єдиності розв'язків для $t \in [0, \infty)$.

Ідея синтезу інваріантних співвідношень в задачах ідентифікації полягає в формуванні додаткових зв'язків між "відомими"велечинами $x_1(t), x_2(t), \xi(t)$ та невідомими a_1, a_2 вихідної системи, які виникають на деяких траєкторіях розширеної системи диференціальних рівнянь (2), (3).

2. Побудова інваріантних співвідношень. Будемо шукати додаткові співвідношення у вигляді

$$a_1 = \Psi_1(x_1, x_2) + \xi_1, \quad a_2 = \Psi_2(x_1, x_2) + \xi_2. \tag{4}$$

Введемо у розгляд відхилення $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ від (4), зробивши заміну параметрів a_1, a_2 за формулами

$$a_1 = \Psi_1(x_1, x_2) + \xi_1 + \varepsilon_1, \quad a_2 = \Psi_2(x_1, x_2) + \xi_2 + \varepsilon_2. \tag{5}$$

Якщо буде встановлено, що на деяких траєкторіях розширеної системи диференціальних рівнянь (2), (3) має місце тотожність $\|\varepsilon_1(t)\| = \|\varepsilon_2(t)\| \equiv 0$, то саме на цих траєкторіях інваріантні співвідношення (4) визначають значення a_1, a_2.

З урахуванням заміни (5) рівняння $\dot{a}_1 = 0, \dot{a}_2 = 0$ перетворюються в диференціальні рівняння відносно відхилень

$$\dot{\varepsilon}_1 = -\Psi_1{}'_{x_1} x_2 - \Psi_1{}'_{x_2} \left[-(\Psi_1 + \xi_1 + \varepsilon_1)^T f(x_1) x_2 - (\Psi_2 + \xi_2 + \varepsilon_2)^T g(x_1) + u \right] - \dot{\xi}_1,$$
$$\dot{\varepsilon}_2 = -\Psi_2{}'_{x_1} x_2 - \Psi_2{}'_{x_2} \left[-(\Psi_1 + \xi_1 + \varepsilon_1)^T f(x_1) x_2 - (\Psi_2 + \xi_2 + \varepsilon_2)^T g(x_1) + u \right] - \dot{\xi}_2.$$

Тут $\Psi_i{}'_{x_j} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j},\ i, j = 1, 2.$

На першому етапі пропонуємої схеми визначимо структуру допоміжньої системи диференціальних рівнянь. Для цього вимагатимемо, щоб рівняння (3) мали вигляд

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= -\Psi_1{}'_{x_1} x_2 + \Psi_1{}'_{x_2} \left[(\Psi_1 + \xi_1)^T f(x_1) x_2 + (\Psi_2 + \xi_2)^T g(x_1) - u \right], \\ \dot{\xi}_2 &= -\Psi_2{}'_{x_1} x_2 + \Psi_2{}'_{x_2} \left[(\Psi_1 + \xi_1)^T f(x_1) x_2 + (\Psi_2 + \xi_2)^T g(x_1) - u \right]. \end{aligned} \tag{6}$$

За таким вибором маємо, що вразі $\xi_1(t),\ \xi_2(t)$ – будь-який розв'язок задачі Коші для цієї системи, то рівняння відносно відхилень $\varepsilon_1(t),\ \varepsilon_2(t)$ стають однорідними

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \Psi_1{}'_{x_2} \left(\varepsilon_1^T f(x_1) x_2 + \varepsilon_2^T g(x_1) \right), \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \Psi_2{}'_{x_2} \left(\varepsilon_1^T f(x_1) x_2 + \varepsilon_2^T g(x_1) \right), \end{aligned} \tag{7}$$

отже допускають тривіальний розв'язок $\|\varepsilon_1(t)\| = \|\varepsilon_2(t)\| \equiv 0$.

Таким чином отримано сім'ю додаткових систем виду (6), залежну від поки що вільних вектор-функцій $\Psi_1(x_1, x_2), \Psi_2(x_1, x_2)$ та їх похідних. Кожна з таких систем, разом з вихідною системою (2), перетворює на деяких траєкторіях рівності (4) в інваріантні співвідношення, за якими може бути знайдені параметри a_1, a_2. На інших траєкторіях з'являються ненульові доданки $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)$, які залежать від похідних функцій $\Psi_1(x_1, x_2), \Psi_2(x_1, x_2)$.

3. Задача стабілізації відхилень. Природньо виникає питання про вибір поки що вільних функцій таким чином, щоб доданки $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)$ в формулах (5) прямували до нуля, тобто тривіальний розв'язок рівнянь у відхиленнях (7) мав би властивість глобальної асимптотичної стійкості. Відповідь на це питання становить зміст другого етапу пропонуємої схеми ідентифікації. Оскільки існує багато методів вирішення проблеми стабілізації нелінійних неавтономних систем, то дослідження на цьому етапі передбачають, що вибір $\Psi_1(x_1, x_2), \Psi_2(x_1, x_2)$ системи (7) здійснюється для кожної конкретної динамічної системи окремо в залежності від аналітичного виду $u(x_1, t)$ та вектор-функцкцій $f(x_1), g(x_1)$.

Для автономного осцилятора (2), коли зовнішня змушуюча сила $u(x_1)$ не залежить від часу t, один із підходів до задачі стабілізації може бути пов'язан зі спробою використання принципу інваріантності ЛаСалля [8]. Об'єктом дослідження в цьому випадку є розширена система диференціальних рівнянь (2), (3), фазовий вектор якої $(x_1(t), x_2(t), \varepsilon_1^T(t), \varepsilon_2^T(t)) \in \Omega \subset R^{k_1+k_2+2}$. Наведемо основні кроки відповідної схеми.

Введемо у розгляд знаковизначену функцію

$$V = \frac{\varepsilon_1^T \varepsilon_1 + \varepsilon_2^T \varepsilon_2}{2},$$

та запишемо її похідну взяту в силу системи (7)

$$\dot{V} = \varepsilon_1^T \dot{\varepsilon_1} + \varepsilon_2^T \dot{\varepsilon_2} = (\varepsilon_1^T {\Psi_1}'_{x_2} + \varepsilon_2^T {\Psi_2}'_{x_2})(\varepsilon_1^T f(x_1) x_2 + \varepsilon_2^T g(x_1)).$$

Визначемо вигляд функцій, які залишались вільними: нехай $\Psi_1(x_1, x_2), \Psi_2(x_1, x_2)$ дорівнюють

$$\Psi_1(x_1, x_2) = \frac{\lambda x_2^2}{2} f(x_1) + \Phi_1(x_1), \quad \Psi_2(x_1, x_2) = \lambda x_2 g(x_1) + \Phi_2(x_1), \tag{8}$$

де коефіцієнт $\lambda < 0$, $\Phi_1(x_1), \Phi_2(x_1)$ – довільні функції змінної x_1, далі вважатимемо $\Phi_1(x_1) = \Phi_2(x_1) = 0$. За такими функціями похідна від V стає знакосталою

$$\dot{V} = \lambda(\varepsilon_1^T f(x_1) x_2 + \varepsilon_2^T g(x_1))^2 \leq 0, \tag{9}$$

а самі рівняння у відхиленнях приймають вигляд

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \lambda x_2 f(x_1) \left(\varepsilon_1^T f(x_1) x_2 + \varepsilon_2^T g(x_1)\right), \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \lambda g(x_1) \left(\varepsilon_1^T f(x_1) x_2 + \varepsilon_2^T g(x_1)\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Оскільки система (10) допускає тривіальний розв'язок $\|\varepsilon_1(t)\| = \|\varepsilon_2(t)\| \equiv 0$, то множина $M = \{(x_1(t), x_2(t), 0, 0)\}$ є інваріантною в

$$E = \{(x_1, x_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) : \dot{V} = \lambda(\varepsilon_1^T f(x_1) x_2 + \varepsilon_2^T g(x_1))^2 = 0\}.$$

Якщо при цьому M буде найбільшою інваріантною множиною, то за теоремою ЛаСалля всі розв'язки з початковими значеннями в Ω, будуть з часом прагнути до M, тобто

$$\lim_{t\to\infty} \|\varepsilon_i(t)\| = 0, \ i = 1, 2. \tag{11}$$

Таким чином, запропонована схема розв'язання задачі ідентифікації параметрів системи (2) полягає:

1) у відповідному вибору функцій $\Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$, які повині забезпечити властивість глобальної асимптотичної стійкості тривіального розв'язку системи диференціальних рівнянь (10): $\forall(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*) \in R^{k_1+k_2}$, $\lim\limits_{t\to\infty} \|\varepsilon_i(t, \varepsilon_i^*)\|(t) = 0, i = 1, 2;$

2) розв'язку задачі Коші з будь-якою початковою умовою для системи диференціальних рівнянь (6) та подальшому обчисленні оцінок шуканих параметрів за формулами (5).

За такою схемою перші два доданки у правій частині формул (5) стають відомими величинами, а третій доданок, вразі виконання першого пункту, асимптотично прагне до нуля.

Як приклад застосування описаної схеми ідентифікації, розглянемо задачу визначення параметрів моделі математичного маятника, який здійснює вимушені коливання.

4. Идентифікація параметрів математичного маятника. Модель математичного маятника – це фізична модель коливальної системи, яка складається з матеріальної точки, підвішеної на невагомій і нерозтяжній нитці. Рівняння вимушених коливань мають вигляд

$$\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_2 sin(x(t)) = u(x,t). \tag{12}$$

Тут $x(t)$ – відхилення маятника від вертикалі, a_1, a_2 – коефіцієнти, які характеризують відповідно досить складне явище дисипації та масово-гравітаційну характеристику маятника, $u(x,t)$ – зовнішня спонукальна (змушуюча) сила, властивості якої значною мірою визначають характер коливань.

Позначивши $x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}$ перепишемо рівняння маятника у вигляді системи

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \\ &\dot{x}_2 = -a_1x_2 - a_2 sin(x_1) + u(x_1). \end{aligned} \tag{13}$$

Зауваження. Далі будемо вважати, що розв'язки диференціальних рівнянь, моделюючих коливання математичного маятника, являють собою незатухаючий, обмежений процес, а саме: $\forall t > 0, (x_1(t), x_2(t)) \in P = \{(x_1, x_2) : |x_1(t)| \le K, |x_2(t)| \le K, K < \infty\}$.

Крім виходу – $x_1(t), x_2(t)$, відомими функціями часу вважатимемо будь-який розв'язок задачі Коші для довільної системи диференціальних рівнянь

$$\dot{\xi} = U(\xi, x_1(t), x_2(t)),\ \xi(0) = \xi_0 \in R^2, \tag{14}$$

в якій на $U(\xi, x_1, x_2)$ поки що накладено єдине обмеження, а саме: ці функції задовольняють достатнім умовам теорем існування та єдиності розв'язків для $t \in [0, \infty)$.

Задача. Знайти асимптотично точні оцінки параметрів a_1, a_2 системи (13) за відомими значеннями виходу $x_1(t), x_2(t)$.

За методом синтезу інваріантних співвідношень шукаємо невідомі як деякі функції від $x_i(t), \xi_i(t), i = 1, 2$.

$$a_1 = \Psi_1(x_1, x_2) + \xi_1, \quad a_2 = \Psi_2(x_1, x_2) + \xi_2. \tag{15}$$

Введемо у розгляд відхилення $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ від (15), зробивши заміну параметрів a_1, a_2 за формулами

$$a_1 = \Psi_1(x_1, x_2) + \xi_1 + \varepsilon_1, \quad a_2 = \Psi_2(x_1, x_2) + \xi_2 + \varepsilon_2. \tag{16}$$

З урахуванням заміни (16) рівняння $\dot{a}_1 = 0, \dot{a}_2 = 0$ перетворюються в диференціальні рівняння відносно відхилень

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= -\Psi_1{}'_{x_1} x_2 - \Psi_1{}'_{x_2} \left[-(\Psi_1 + \xi_1 + \varepsilon_1)x_2 - (\Psi_2 + \xi_2 + \varepsilon_2)sin(x_1) + u \right] - \dot{\xi}_1, \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -\Psi_2{}'_{x_1} x_2 - \Psi_2{}'_{x_2} \left[-(\Psi_1 + \xi_1 + \varepsilon_1)x_2 - (\Psi_2 + \xi_2 + \varepsilon_2)sin(x_1) + u \right] - \dot{\xi}_2. \end{aligned} \tag{17}$$

На першому кроці визначаємо праві частини допоможніх диференціальних рівнянь, поклавши

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= -\Psi_1{}'_{x_1} x_2 + \Psi_1{}'_{x_2} \left[(\Psi_1 + \xi_1)x_2 + (\Psi_2 + \xi_2)sin(x_1) - u \right], \\ \dot{\xi}_2 &= -\Psi_2{}'_{x_1} x_2 + \Psi_2{}'_{x_2} \left[(\Psi_1 + \xi_1)x_2 + (\Psi_2 + \xi_2)sin(x_1) - u \right]. \end{aligned} \tag{18}$$

За таким вибором маємо, що вразі $\xi_1(t),\ \xi_2(t)$ – будь-який розв'язок задачі Коші для системи (18), то рівняння відносно відхилень $\varepsilon_1(t),\ \varepsilon_2(t)$ стають однорідними

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \Psi_1{}'_{x_2} \left(\varepsilon_1 x_2 + \varepsilon_2 sin(x_1) \right), \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \Psi_2{}'_{x_2} \left(\varepsilon_1 x_2 + \varepsilon_2 sin(x_1) \right), \end{aligned} \tag{19}$$

отже допускають тривіальний розв'язок $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t)) \equiv 0$.

Таким чином отримано сім'ю додаткових систем виду (18), залежну від поки що вільних функцій $\Psi_1(x_1, x_2), \Psi_2(x_1, x_2)$ та їх похідних. Кожна з таких систем, разом з вихідною системою (13), перетворює рівності (15) в інваріантні співвідношення, тобто на деяких траєкторіях розширеної системи ці рівності виконуються тотожньо. На інших траєкторіях з'являються ненульові доданки $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)$, які залежать від похідних функцій $\Psi_1(x_1, x_2), \Psi_2(x_1, x_2)$. Тому другим етапом побудови асимптотичних ідентифікаторів є вибір цих функцій таким чином, щоб тривіальний розв'язок рівнянь у відхиленнях (19) мав властивість глобальної асимптотичної стійкості.

Введемо у розгляд знаковизначену функцію

$$V = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{2},$$

та запишемо її похідну взяту в силу системи (19)

$$\dot{V} = (\varepsilon_1 \Psi_1{}'_{x_2} + \varepsilon_2 \Psi_2{}'_{x_2})(\varepsilon_1 x_2 + \varepsilon_2 sin(x_1)).$$

Нехай вільні функції $\Psi_1(x_1, x_2), \Psi_2(x_1, x_2)$ матимуть вигляд

$$\Psi_1 = \lambda \frac{x_2^2}{2}, \quad \Psi_2 = \lambda x_2 sin(x_1), \tag{20}$$

де коефіцієнт $\lambda < 0$. За такими функціями похідна від V стає знакосталою

$$\dot{V} = \lambda(\varepsilon_1 x_2 + \varepsilon_2 sin(x_1))^2 \leq 0, \tag{21}$$

а самі рівняння у відхиленнях приймають вигляд

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \lambda x_2 \left(\varepsilon_1 x_2 + \varepsilon_2 sin(x_1)\right), \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \lambda sin(x_1) \left(\varepsilon_1 x_2 + \varepsilon_2 sin(x_1)\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Покажемо з використанням принципу інваріантності ЛаСалля [8], що нерівність (21) є достатньою для асимптотичної стабільності тривіального розв'язку системи (22). Для цього розглянемо розширену систему (13), (22) з фазовим вектором $(x_1(t), x_2(t), \varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)) \in \Omega \subset R^4$.

В нашому випадку Ω – компактна множина, позитивно інваріантна відносно розширеної системи. Дійсно, за припущенням $(x_1(t), x_2(t)) \in P \subset R^2$, де P описує обмежену область коливань. Значення відхилень згідно нерівності (21) лежать всередині сфери $S = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \leq \varepsilon_1^2(0) + \varepsilon_2^2(0)\}$. З цього випливає, що $\Omega = \overline{P} \times S$ є компактною множиною, позитивно інваріантною відносно системи (13), (22).

Позначимо через $d(t) = \varepsilon_1(t)x_2(t) + \varepsilon_2(t)sin(x_1(t))$ – загальний множник правих частин рівнянь (22). Нехай E — множина всіх точок $(x_1, x_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \Omega$ в яких $\dot{V} = \lambda d(t)^2 = 0$. Зрозуміло, що множина $M = \{(x_1(t), x_2(t), 0, 0)\}$ є інваріантною в E. Якщо при цьому M буде найбільшою інваріантною множиною, то за теоремою ЛаСалля всі розв'язки з початковими значеннями $(x_1(0), x_2(0), \varepsilon_1(0), \varepsilon_2(0)) \in \Omega$, будуть з часом прагнути до M, тобто

$$\lim_{t \to \infty} \varepsilon_i(t) = 0, \ i = 1, 2. \tag{23}$$

Доведемо від протилежного, що M є найбільшою інваріантною множиною. А саме, нехай $d(t) = 0$ і в той же час множина E містить траєкторії системи (13), (22) з ненульовими відхиленнями $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)$. За припущенням $d(t) = 0$, звідки випливає, що ці відхилення є стаціонарними точками системи (22): $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_1^*, \ \varepsilon_2(t) = \varepsilon_2^*$. А це, в свою чергу, накладає обмеження на траєкторії вихідної системи (13).

$$d(t) = \varepsilon_1^* x_2(t) + \varepsilon_2^* sin(x_1(t)) = 0.$$

З урахуванням позначень $x_1 = x, \ x_2 = \dot{x}$ з останньої рівності витікає залежність

$$\left| tg\frac{x(t)}{2} \right| = \exp\left(-\frac{\varepsilon_1^* t}{\varepsilon_2^*}\right)$$

руху маятника $x(t)$ від констант $\varepsilon_i^*, \ i = 1, 2$, що не є можливим, оскільки рівняння (13) ніяким чином не пов'язані з допоміжною системою (22). Отримане протиріччя доводить твердження, що множина $M = \{(x_1(t), x_2(t), 0, 0)\}$ є найбільшою інваріантною множиною для траєкторій розширеної системи. А відтак доведено виконання умови (23).

Остаточний вигляд ідентифікатора. Таким чином зафіксовано всі ступені свободи в пропонуємому алгоритмі ідентифікації, а саме: структура допоміжних диференціальних рівнянь була задана рівняннями (18), а вибір функцій

$\Psi_i(x_1, x_2), i = 1, 2$ за формулами (20) формує остаточний вигляд цих рівнянь

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \lambda x_2 \left[(\frac{\lambda x_2^2}{2} + \xi_2) x_2 + (\lambda x_2 sin(x_1) + \xi_1) sin(x_1) - u \right], \\
\dot{\xi}_2 &= -\lambda x_2^2 cos(x_1) + \lambda sin(x_1) \left[(\frac{\lambda x_2^2}{2} + \xi_2) x_2 + (\lambda x_2 sin(x_1) + \xi_1) sin(x_1) - u \right].
\end{aligned} \tag{24}
$$

При цьому факт виконання умови (23) дозволяє сформулювати

Твердження 1. Формули

$$
\hat{a}_1 = \lambda \frac{x_2^2(t)}{2} + \xi_1(t), \quad \hat{a}_2 = \lambda x_2 sin(x_1(t)) + \xi_2(t), \tag{25}
$$

де $\xi_1(t), \xi_2(t)$ будь-який розв'язок задачі Коші для системи диференціальних рівнянь (24) формують асимптотичні оцінки параметрів a_1, a_2 моделі математичного маятника (13).

5. Обчислювальний експеримент з оцінки параметрів математичного маятника. Запропонована в роботі схема розв'язання задачі ідентифікації була чисельно промодельована для широкого спектру початкових умов і параметрів динамічної системи (13), (24). В наведених результатів обчислювального експерименту вихід $x_1(t), x_2(t)$ отримано в результаті розв'язку задачі Коші для системи (13) з зовнішньою силою $u(x,t) = -x_1(t) + sin(x_1(t))$, що забезпечує незатухаючи коливання маятника. Початкові умови були прийняті рівними $x(0) = (-2.0; 0.0)$, початкові умови для змінних додаткової системи диференціальних рівнянь (22) обираються довільним чином, в даному випадку $\xi(0) = (2.0; -2.0)$. Параметри системи та її спостерігача наступні:

$$
a_1 = 0.5, \ a_2 = 5.5, \lambda = -2.5.
$$

На рис.1 неперервною лінією зображено графіки функцій

$$
\lambda x_2(t) sin(x_1(t)) + \xi_1(t), \quad \lambda \frac{x_2^2(t)}{2} + \xi_2(t),
$$

які в повній відповідності до твердження 1 асимтотичне прямують з часом до значень шуканих параметрів (які на графіку зображені переривчатим відрізком прямої). Як видно з цих графіків результати моделювання підтверджують зроблений висновок про те, що система (24), (25) є асимптотичним ідентифікатором параметрів математичного маятника.

Литература

1. *Ковалев А.М., Щербак В.Ф.* Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1993. – 235 с.
2. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6.– С. 15–24.

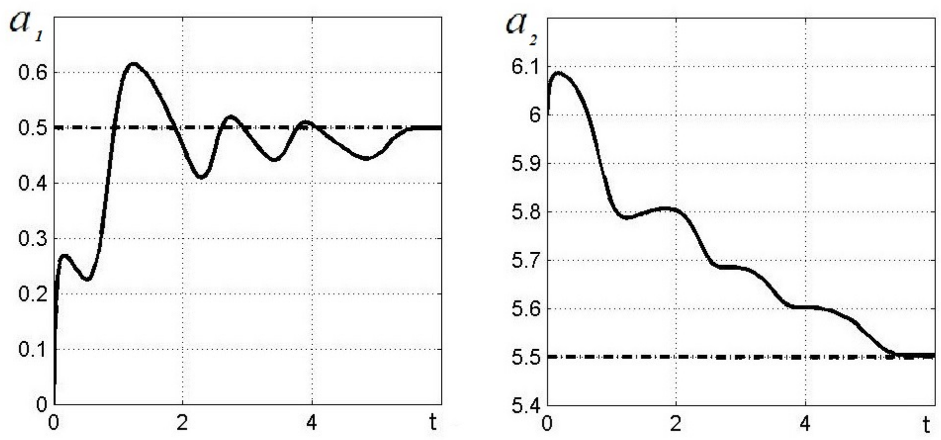

Рис. 1. Асимптотичне оцінювання параметрів $a_i(t), i = 1, 2$ системи (13).

3. *Щербак В.Ф.* Синтез дополнительных соотношений в задаче наблюдения // Механика тведого тела. – 2004. – Т. 33. – С. 197–216.
4. *Shcherbak V.F.* Synthesis of virtual measurements in nonlinear observation problem // PAMM. – 2004. – V. 4, Is. 1. – P. 139–140.
5. *Жоголева Н.В., Щербак В.Ф.* Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления // Труды ИПММ НАН Украины. – 2015. – Т. 29.– С. 69–76.
6. *Karagiannis D., Astolfi A.* Nonlinear observer design using invariant manifolds and applications // Proc. 44th IEEE Conf. Decision and Control and European Control Conference, Seville, Spain. – 2005. – P. 7775–7780.
7. *Karagiannis D., Carnevale D., Astolfi A.* Invariant manifold based reduced-order observer design for nonlinear systems // IEEE Transac-tions on Automatic Control. – 2008. – V. 53, 11. – P. 2602–2614.
8. *Khalil H.K.* Nonlinear systems. – 3rd edn. – Patience Hall, 2002. – 767 p.

References

1. Kovalev, A.M., Shcherbak, V.F. (1993). *Upravlyayemost', nablyudayemost', identifitsiruyemost' dinamicheskikh sistem.* Kiyev: Nauk. dumka (in Russian).
2. Kharlamov, P.V. (1974.) Ob invariantnykh sootnosheniyakh sistemy differentsial'nykh uravneniy. *Mekhanika tverdogo tela, 6*, 15–24.
3. Shcherbak, V.F. (2004). Sintez dopolnitel'nykh sootnosheniy v zadache nablyudeniya. *Mekhanika tvedogo tela, 33*, 197–216.
4. Shcherbak, V.F. (2004). Synthesis of virtual measurements in nonlinear observation problem. *PAMM, 4*(1), 139–140.
5. Zhogoleva, N.V., Shcherbak, V.F. (2015). Sintez dopolnitelnyh sootnosheniy v obratnyh zadachah upravleniya. *Trudy IPMM NAN Ukrainy, 29*, 69–76.
6. Karagiannis, D., Astolfi, A. (2005). Nonlinear observer design using invariant manifolds and applications. *Proc. 44th IEEE Conf. Decision and Control and European Control Conference, Seville, Spain*, pp. 7775–7780.
7. Karagiannis, D., Carnevale, D., Astolfi, A. (2008). Invariant manifold based reduced-order observer design for nonlinear systems. *IEEE Transac-tions on Automatic Control, 53*(11), 2602–2614.

8. Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear systems*, 3rd edn. Patience Hall.

N.V. Zhogoleva, V.F. Shcherbak

Identification of parameters of non-linear oscillators.

Many applied control problems are characterized by a situation where some or all parameters of the initial dynamic system are unknown. In such cases, the problem of identification arises, which consists in determining the unknown parameters of the system based on information about its output - known information about movement. The ability to solve the problem of identification is an essential property of identifiability depends on the analytical structure of the right-hand sides of the dynamics equations and available information [1]. To solve the identification problem itself, this work uses the method of invariant relations [2], which was developed in analytical mechanics and is intended, in particular, for finding partial solutions (dependencies between variables) in problems of the dynamics of a rigid body with a fixed point. The modification of this method to the problems of the theory of control, observation made it possible to synthesize additional connections between the known and unknown quantities of the original system that arise during the movement of its extended model [3] – [5]. It is worth noting that a some more general approach, which forms a suitable method for solving observation problems for nonlinear dynamic systems due to the synthesis of an invariant manifold in the space of an extended system, was proposed in the works [6], [7] as a certain modification of the method stabilization of nonlinear systems $I\&I$(Input and Invariance). The purpose of this work is to spread the method of synthesis of invariant relations in control problems to the problem of identifying parameters of pendulum systems. A general scheme for constructing asymptotically accurate estimates of the parmeters of a two-dimensional dynamical system is proposed. A relatively simple case of the identification problem will be considered, namely: 1) the output of the original system is the complete phase vector and 2) the system depends linearly on the unknown parameters. Generalizations to more general designs of input-output systems, including with the involvement of information about the output obtained on several trajectories, can be carried out using the approach described below and is the subject of a separate study. The computational experiment on the estimation of the parameters of the mathematical pendulum confirms the efficiency of the proposed identification scheme.

Keywords: *identification, invariant relations, mathematical pendulum..*

Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ
zhogoleva.nadia@gmail.com, scherbakv54@gmail.com

Отримано 04.07.22