УДК 531.36, 531.38
DOI: 10.37069/1683-4720-2022-36-08

©2022. **Ю.М. Кононов, А.Х. Чеіб**

# ВПЛИВ ДИСИПАТИВНОЇ НЕСИМЕТРІЇ НА СТІЙКІСТЬ ОБЕРТАННЯ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ НЕСИМЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА ПІД ДІЄЮ ПОСТІЙНОГО МОМЕНТУ У ІНЕРЦІАЛЬНІЙ СИСТЕМІ ВІДЛІКУ

У припущенні, що центр мас несиметричного твердого тіла знаходиться на третій головній осі інерції твердого тіла, оцінено вплив дисипативної несиметрії на стійкість рівномірного обертання у середовищі з опором динамічно несиметричного твердого тіла. Тверде тіло обертається навколо нерухомої точкі, знаходиться під дією сил тяжіння, дисипативного моменту і постійного моменту в інерціальній системі відліку. Умови стійкості представлені у вигляді системи трьох нерівностей. Перша і друга нерівністі мають першу ступень відносно дисипативного дебалансу, а третья нерівність – третью ступень. Найбільш складною для дослідження є третя нерівність. Проведено аналітичні дослідження впливу малого та великого дисипативного дебалансу, відновлювального, перекидального та постійного моменту на стійкість обертання твердого тіла. Отримані умови асимптотичої стійкості при досить малих значеннях дисипативного дебалансу і умови нестійкості при великих значення дебалансу. Виписані умови стійкості с точністью до другого порядку малості відносно постійного моменту і першого – відносно відновлювального або перекидального моментів. Досліджено умови стійкості обертання твердого тіла навколо центру мас.

**MSC:** 70E55.

***Ключові слова:*** *динамічно несиметричне твердо тіло, рівномірне обертання, середовище з опором, постійний момент в інерціальній системі відліку, асимптотична стійкість.*

## 1. Вступ.

В даний час є досить велика кількість робіт, в яких проводяться різні дослідження динаміки твердих тіл, що обертаються у середовищі з опором. Наведемо лише роботи, які найближчі до розглядуваної задачі та статті останніх років. У роботах [1, 2] розглянуто кілька прикладів рухів твердих тіл з малою несиметрією і запропоновано алгоритм вивчення таких систем. Показано, що мала динамічна несиметрія твердого тіла призводить до появи додаткового інтервалу нестійкості, довжина якого прямує до нуля при прямуванні до нуля величини дебалансу. В статтях [3, 4], на підставі критерію Льєнара–Шіпара в іннорному вигляді, отримано умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання у середовищі з опором несиметричного твердого тіла під дією постійного моменту у неінерціальній системі відліку. Отримано умови на величини постійного моменту і моменту інерції третьої головної осі, які при дії відновлювального моменту достатні для асимптотичної стійкості. Показано, що при відсутності дисипації, отримані умови стійкості збігаються з відомими. У роботі [5] узагальнюється результати статті [3] на випадок постійного моменту в інерціальній системі відліку, а у роботі [6] на випадок ще додаткового постійного моменту в інерціальній системі відліку. Слід зазначати, що статті [5, 6] узагальнюють результати статей [7, 8] на випадок рівномірного обертання несиметричного твердого тіла. Найбільш вдалий огляд сучасної літератури по розглядуваної тематиці наданий в роботах [5, 6, 9–13]. У монографії [9] представлений уніфікований і добре розроблений підхід до динаміки кутових рухів твердих тіл, що зазнають моментів збурення різної фізичної природи. Строгий підхід, заснований на процедурі усереднення, застосовується до тіл з довільними еліпсоїдами інерції. Детально розглядається дія різних моментів збурень, як зовнішніх (гравітаційний, аеродинамічний, сонячний тиск), так і внутрішніх (завдяки в'язкій рідині в резервуарах, пружним і в'язкопружним властивостям тіла). В статті [10] розглянуто рух навколо центру мас сфероїда із порожниною, заповненою в'язкою рідиною. Момент сил, що діють тіло з боку в'язкої рідини в порожнині, визначають за методикою, розробленою в роботах Ф.Л. Черноусько. Асимптотичний підхід дозволяє отримати деякі якісні результати та описати нелінійну еволюцію кутового руху за допомогою спрощених усередніх рівнянь. В статті [11] досліджуються збурені обертальні рухи твердого тіла, схожі на випадок дзиги Лагранжа, піддані повільно змінним у часі моментам сил відновлення та збурення. Відновлюючий момент також залежить від малого кута нутації. Для розв'язування задачі використовується метод усереднення. Встановлено умови можливості усереднення (по фазі кута нутації) рівнянь руху твердого тіла, пов'язаних із випадком Лагранжа. Отримано усереднену систему рівнянь у першому наближенні. Асимптотичний підхід дозволяє отримати деякі якісні результати та описати еволюцію руху за допомогою спрощених усереднених рівнянь. У роботі [12] розглянуто рух навколо центру мас майже динамічно сферичного твердого тіла з порожниною, заповненою рідиною високої в'язкості, на яку діють постійні нерухомі обертальні моменти тіла. Момент сил, що діють на тверде тіло з боку в'язкої рідини в порожнині, визначається за методикою, розробленою в роботах Ф.Л. Черноусько. Отримані асимптотичні та чисельні розв'язки описують еволюцію руху тіла під дією малих внутрішніх і зовнішніх моментів. В статті [13] застосовується асимптотичний метод усереднення Крилова–Боголюбова. За допомогою цього методу одержано наближений розв'язок системи рівнянь Ейлера руху твердого тіла у середовищі з опором з додатковими збуреними членами для сфероїда, заповненого в'язкою рідиною.

Проведено аналітичні дослідження впливу малого та великого дисипативного дебалансу, відновлювального, перекидального та постійного моменту на стійкість обертання твердого тіла. Отримані умови асимптотичої стійкості при досить малих значеннях дисипативного дебалансу і умови нестійкості при великих значення дебалансу. Виписані умови стійкості с точністю до другого порядку малості відносно постійного моменту і першого – відносно відновлювального або перекидального моментів. Досліджено умови стійкості обертання твердого тіла навколо центру мас.

У даній роботі продовжуються дослідження умов асимптотичної стійкості рівномірного обертання у середовищі з опором несиметричного твердого тіла під дією постійного моменту у інерціальній системі відліку. Ці умови стійкості були отримані у статті [5]. Аналогічні умови також слідують і із роботи [6] при відсутності постійного моменту в неінерціальній системі відліку. У роботі проведено якісну оцінку впливу малого та великого дисипативного дебалансу, відновлювального, перекидального та постійного моменту на стійкість обертання твердого тіла. Отримані умови асимптотичої стійкості при досить малих значеннях дисипативного дебалансу і умови нестійкості при великих значення дебалансу. Досліджено умови стійкості обертання твердого тіла навколо центру мас.

**2. Постановка задачі.**

Розглянемо важке динамічно несиметричне тверде тіло, яке обертається навколо нерухомої точки, в припущенні, що на нього діє дисипативний момент $\mathbf{M}_d = -\mathbf{D}\boldsymbol{\omega}$ ($\mathbf{D} = diag\,(D_1,\, D_2,\, D_3)$; $D_i > 0$; $i = \overline{1,\,3}$), що моделює опір середовища та постійний моменти $\mathbf{M}_p = P\boldsymbol{\gamma}$, який підтримує сталу кутову швидкість власного обертання твердого тіла. Будемо вважати, що на третій головної осі інерції твердого тіла знаходиться центр мас твердого тіла і твердо тіло в незбуреному русі рівномірно обертається с кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}_0$ навколо цієї вісі. Тут $\boldsymbol{\omega}$ – кутова швидкість твердого тіла, $\boldsymbol{\gamma}$ – одиничний вектор висхідної вертикалі, $P$ – довільна стала.

Рівняння руху твердого тіла мають вигляд [3, 5, 7]:

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) = \gamma \times \frac{\partial V}{\partial \gamma} + P\boldsymbol{\gamma} - D\boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 0, \tag{2}$$

де $\mathbf{J} = diag\,(J_1,\, J_2,\, J_3)$ – тензор інерції твердого тіла для нерухомої точки; $V = \Gamma(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\gamma})$ – потенційна енергія ($\Gamma = mgc$, $m$ – маса твердого тіла, $c$ – відстань від нерухомої точки до центру мас твердого тіла, $g$ – прискорення вільного падіння); $\boldsymbol{k}$ – одиничний вектор третьої головної осі.

Рівняння (1) виражає теорему про зміну кінетичного моменту $\boldsymbol{J\omega}$, а рівняння (2) – умова сталості вектора $\gamma$ в інерціальній системі відліку.

Проектуючи рівняння руху твердого тіла (1)–(2) на головній осі інерції твердого тіла для нерухомої точки, отримаємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 = \Gamma\gamma_2 - D_1\omega_1, \\ J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 = -\Gamma\gamma_1 - D_2\omega_2, \\ J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 = P\gamma_3 - D_3\omega_3, \end{array} \right. \tag{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\gamma}_1 + \omega_2\gamma_3 - \omega_3\gamma_2 = 0, \\ \dot{\gamma}_2 + \omega_3\gamma_1 - \omega_1\gamma_3 = 0, \\ \dot{\gamma}_3 + \omega_1\gamma_2 - \omega_2\gamma_1 = 0. \end{array} \right. \tag{4}$$

Система (3)–(4) допускає розв'язки:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0,\ \gamma_3 = 1,\ \omega_1 = \omega_2 = 0,\ \omega_3 = \omega = \frac{P}{D_3}, \tag{5}$$

$$\gamma_1 \; = \; \gamma_2 \; = 0, \gamma_3 \; = \; -1, \; \omega_1 \; = \; \omega_2 \; = \; 0, \; \omega_3 \; = \omega \; = \; \frac{-P}{D_3}, \tag{6}$$

які відповідають рівномірним обертанням твердого тіла з кутовою швидкістю $\omega$ навколо вертикально розташованої третьої головної осі. При цьому розв'язку (5) відповідає випадок "сплячої" дзиги, на яку діє перекидальний момент ($\Gamma > 0$, центр мас твердого тіла перебуває вище нерухомої точки ($c > 0$), а розв'язку (6) – випадок статично врівноваженої дзиги, на яку діє відновлювальний ($\Gamma < 0$, центр мас знаходиться нижче нерухомої точки ($c < 0$). Таким чином, розв'язку (5) відповідає випадок $\Gamma > 0$, а розв'язку (6) відповідає $\Gamma < 0$.

Припускаючи в збуреному русі $\gamma_3 = \pm 1 + \delta$, $\omega_3 = \omega + \sigma$ і зберігаючи для інших змінних їх колишні позначення, запишемо лінеаризовані рівняння збуреного руху:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_2\ddot{\gamma}_1 + D_2\dot{\gamma}_1 + \left[(J_3 - J_1)\omega^2 - \Gamma\right]\gamma_1 - J\omega\dot{\gamma}_2 - (D_2\omega - P)\,\gamma_2 = 0, \\ J_1\ddot{\gamma}_2 + D_2\dot{\gamma}_2 + \left[(J_3 - J_2)\omega^2 - \Gamma\right]\gamma_2 + J\omega\dot{\gamma}_1 + (D_1\omega - P)\,\gamma_1 = 0. \end{array} \right. \tag{7}$$

Тут

$$J = J_1 + J_2 - J_3 > 0 \; (i = 1, 2).$$

Основна відмінність отриманих рівнянь (7) від аналогічних рівнянь робіт [7, 8] полягає в тому, що через динамічної ($J_2 \neq J_1$) і дисипативної ($D_2 \neq D_1$) несиметрії неможливо спростити ці рівняння шляхом введенням комплексної функції $\gamma_1 + i\gamma_2$. Слід також зазначити, що система рівнянь (9) описує рух лінійної механічної системи з двома ступенями свободи, що знаходиться під дією сил довільної структури: дисипативних, потенційних, гіроскопічних і циркуляційних [3, 5, 7].

**3. Асимптотична стійкість розв'язків** (5)–(6)**.**

У роботі [5] були отримані наступні умови асимптотичної стійкості розв'язків (5)–(6) :

$$\left(\Gamma D_3^2 - (J_3 - J_1)P^2\right)\left(\Gamma D_3^2 - (J_3 - J_2)P^2\right) + (D_3 - D_1)\,(D_3 - D_2)\,D_3^3 P^2 =$$

$$= D_3^4\Gamma^2 + \tilde{J}D_3^2P^2\Gamma + (D_3 - D_1)\,(D_3 - D_2)\,D_3^2P^2 + (J_3 - J_1)(J_3 - J_2)P^4 > 0, \tag{8}$$

$$(D_1 + D_2)D_3^2\Gamma < (J_{12} - 2JD_3)\,P^2, \tag{9}$$

$$(J_1 - J_2)^2 D_1D_2D_3^3\Gamma^2 + D_3\Gamma_1\Gamma + \Gamma_0 = p_4P^4 + p_2P^2 + p_0 > 0, \tag{10}$$

де

$$\Gamma_1 = \left\{[(J_3 - 2J_2)D_1 + (J_3 - 2J_1)D_2]\,J_{12} + 2(J_1 - J_2)\tilde{J}_{12}D_3\right\}JP^2 - J_{12}(D_1 + D_2)D_1D_2D_3^2,$$

$$\Gamma_0 = 2\,(J_3J_{12} - 2J_1J_2D_3)\,J^2P^4 + \left[2D_1D_2J_3 - J_{12}D_3 - (D_1 - D_2)\,\tilde{J}_{12}\right]J_{12}D_3^2P^2, \tag{11}$$

$$p_4 = 2J^2\,(J_3J_{12} - 2J_1J_2D_3)\,,$$

$$p_2 = \left\{\left[J_2(J_3 - 2J_2)D_1^2 + ((J_1 + J_2)\,J_3 - 4J_1J_2)\,D_1D_2 + 2\,(J_1 - J_2)\,\tilde{J}_{12}D_3\; + \right.\right.$$

$$+J_1(J_3-2J_1)D_2^2\big]\,J\Gamma+\Big(J_2D_1^2-\tilde{J}D_1D_2-J_{12}D_3+J_1D_2^2\Big)\,J_{12}D_3\Big\}\,D_3,$$

$$p_0=\Gamma\left[\,(J_1-J_2)^2\Gamma-J_{12}(D_1+D_2)\right]D_1D_2D_3^3\,,$$

$$\tilde{J}=J-J_3,\;\; J_{12}=J_1D_2+J_2D_1>0.$$

Так як в нерівності (8)–(10) та в позначення (11) стала $P$ входить в парний ступені, то ці нерівності при дії перекидального моменту ($\Gamma>0$) визначають умови асимптотичної стійкості рішення (5), а при дії відновлювального моменту ($\Gamma<0$) – рішення (6).

Проведемо дослідження впливу дисипативного дебалансу на умови стійкості. Нехай $D_2=D_1\,(1+\varepsilon)$, де $\varepsilon\geq-1$, тоді система нерівностей (8)–(10) отримують вигляд:

$$\left(\Gamma D_3^2-(J_3-J_1)P^2\right)\left(\Gamma D_3^2-(J_3-J_2)P^2\right)+(D_3-D_1)^2\,D_3^3P^2+\tilde{a}_0\varepsilon=$$

$$=D_3^4\Gamma^2+\tilde{J}D_3^2P^2\Gamma+(D_3-D_1)^2\,D_3^2P^2+(J_3-J_1)(J_3-J_2)P^4+\tilde{a}_0\varepsilon>0, \qquad (12)$$

$$2D_1D_3^2\Gamma<\left[(J_1+J_2)D_1-2JD_3\right]P^2+(J_1P^2-D_3^2\Gamma)D_1\varepsilon, \qquad (13)$$

$$\Gamma_{20}\Gamma^2+\Gamma_{10}\Gamma+\Gamma_{00}+\left(\Gamma_{21}\Gamma^2+\Gamma_{11}\Gamma+\Gamma_{01}\right)\varepsilon+\left(\Gamma_{12}\Gamma+\Gamma_{02}\right)\varepsilon^2+\left(\Gamma_{13}\Gamma+\Gamma_{03}\right)\varepsilon^3=$$

$$=p_{40}P^4+p_{20}P^2+p_{00}+\left(p_{41}P^4+p_{21}P^2+p_{01}\right)\varepsilon+$$

$$+\left(p_{22}P^2+p_{02}\right)\varepsilon^2+\left(p_{23}P^2+p_{03}\right)\varepsilon^3>0. \qquad (14)$$

Тут

$$\tilde{a}_0=(D_1-D_3)\,D_1D_3^2P^2,\;\;\Gamma_{20}=(J_1-J_2)^2\,D_1^2D_3^3,$$

$$\Gamma_{10}=2\left\{\left[(J_1-J_2)^2\,D_3-J\,(J_1+J_2)\,D_1\right]JP^2-(J_1+J_2)\,D_1^3D_3^2\right\}D_1D_3,$$

$$\Gamma_{00}=-P^2\left\{2\left[2J_1J_2D_3-J_3\,(J_1+J_2)\,D_1\right]J^2P^2+\right.$$

$$\left.+\,(J_1+J_2)\left[(J_1+J_2)\,D_3-2J_3D_1\right]D_1^2D_3^2\right\},$$

$$\Gamma_{21}=\Gamma_{20},\;\;\Gamma_{11}=\left\{\left[2J_1\,(J_1-J_2)\,D_3+((3J_1+J_2)J_3-4J_1(J_1+J_2))\,D_1\right]JP^2\right.$$

$$\left.-\,(5J_1+3J_2)\,D_1^3D_3^2\right\}D_1D_3,$$

$$\Gamma_{11}=\Gamma_{01}=\left\{2J_1J_3J^2P^2+\left[-2J_1\,(J_1+J_2)\,D_3+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\;\left(2\,(2J_1+J_2)\,J_3+J_1^2-J_2^2\right)D_1\right]D_1^3D_3^2\right\}D_1P^2,$$

$$\Gamma_{22}=0,\Gamma_{12}=\left[J_1\,(J_3-2J_1)\,JP^2-(4J_1+J_2)\,D_1^2D_3^2\right]D_1^2D_3, \qquad (15)$$

$$\Gamma_{02}=J_1\left[2\,(J_1+J_3)\,D_1-J_1D_3\right]D_1^2D_3^2P^2,\;\;\Gamma_{23}=0,\;\;\Gamma_{13}=-J_1D_1^4D_3^3,$$

$$\Gamma_{03}=J_1^2D_1^3D_3^2P^2,\;\;p_{40}=-2J^2\left[2J_1J_2D_3-J_3\,(J_1+J_2)\,D_1\right],$$

$$p_{20}=\Big\{2J\Big[(J_1-J_2)^2D_3-J(J_1+J_2)D_1\Big]\Gamma+$$
$$+(J_1+J_2)\left[2J_3D_1-(J_1+J_2)D_3\right]D_1D_3\big\}D_1D_3,$$
$$p_{00}=\Big[(J_1-J_2)^2\Gamma-2(J_1+J_2)D_1^2\Big]D_1^2D_3^3\Gamma,\ p_{41}=2J^2J_1J_3D_1,$$
$$p_{21}=\{J\left[2J_1(J_1-J_2)D_3+((3J_1+J_2)J_3-4J_1(J_1+J_2))D_1\right]\Gamma-$$
$$-\left[2J_1(J_1+J_2)D_3-\left(2(2J_1+J_2)J_3+J_1^2-J_2^2\right)D_1\right]D_1D_3\big\}D_1D_3,$$
$$p_{01}=\Big[(J_1-J_2)^2\Gamma-(5J_1+3J_2)D_1^2\Big]D_1^2D_3^3\Gamma,\ p_{42}=0,$$
$$p_{22}=J_1\left[J(J_3-2J_1)\Gamma+(2(J_1+J_3))D_1-J_1D_1\right]D_1^2D_3,\ p_{02}=-(4J_1+J_2)D_1^4D_3^3\Gamma,$$
$$p_{43}=0,p_{23}=J_1^2D_1^3D_3^2,\ p_{03}=-J_1D_1^4D_3^3\Gamma.$$

З точністю до першого порядку малості дисипативного дебалансу $\varepsilon$ нерівності (13)–(14) отримують вигляд:

$$2D_1D_3^2\Gamma<\{(J_1+J_2)D_1-2JD_3+\varepsilon\left[(J_1-J_2)D_1+2JD_3\right]/2\}P^2,\tag{16}$$

$$\Gamma_{20}\Gamma^2+\Gamma_{10}\Gamma+\Gamma_{00}+\left(\Gamma_{21}\Gamma^2+\Gamma_{11}\Gamma+\Gamma_{01}\right)\varepsilon=$$
$$=p_{40}P^4+p_{20}P^2+p_{00}+\left(p_{41}P^4+p_{21}P^2+p_{01}\right)\varepsilon>0.\tag{17}$$

Таким чином, з точністю до першого порядку малості дисипативного дебалансу система нерівностей (12)–(14) буде представлена у вигляді (12) і (16)–(17), де значення коефіцієнтів $\Gamma_{20}$, $\Gamma_{10}$, $\Gamma_{00}$, $\Gamma_{21}$, $\Gamma_{11}$, $\Gamma_{01}$, $p_{40}$, $p_{20}$, $p_{00}$, $p_{41}$, $p_{21}$, $p_{01}$ наведено в (15).

Нерівності (12) і (14) з точністю до другого порядку малості відносно $P/P_0(|P/P_0|\ll 1)$, де $P_0$– характерне значення постійного моменту запишуться так:

$$D_3^4\Gamma^2+\tilde{J}D_3^2P^2\Gamma+(D_3-D_1)^2D_3^2P^2+\tilde{a}_0\varepsilon>0,\tag{18}$$

$$p_{20}P^2+p_{00}+\left(p_{21}P^2+p_{01}\right)\varepsilon+\left(p_{22}P^2+p_{02}\right)\varepsilon^2+\left(p_{23}P^2+p_{03}\right)\varepsilon^3>0.\tag{19}$$

Таким чином, з точністю до другого порядку малості постійного моменту система нерівностей (12)–(14) буде представлена у вигляді нерівностей (18), (13) і (19), де значення коефіцієнтів $p_{20}$, $p_{00}$, $p_{21}$, $p_{01}$, $p_{22}$, $p_{02}$, $p_{23}$, $p_{03}$ приведені в (15).

Нерівності (12) і (14) з точністю до першого порядку малості відносно $\Gamma/\Gamma_0(|\Gamma/\Gamma_0|\ll 1)$, де $\Gamma_0$ – характерне значення постійного моменту, отримають вигляд:

$$\tilde{J}D_3^2P^2\Gamma+(D_3-D_1)^2D_3^2P^2+(J_3-J_1)(J_3-J_2)P^4+(D_1-D_3)D_1D_3^2P^2\varepsilon>0,\tag{20}$$

$$\Gamma_{10}\Gamma+\Gamma_{00}+(\Gamma_{11}\Gamma+\Gamma_{01})\varepsilon+(\Gamma_{12}\Gamma+\Gamma_{02})\varepsilon^2+(\Gamma_{13}\Gamma+\Gamma_{03})\varepsilon^3>0.\tag{21}$$

Таким чином, з точністю до першого порядку малості відносно $\Gamma/\Gamma_0$ система нерівностей (12)–(14) буде представлена у вигляді нерівностей (20), (21) і (13), де значення коефіцієнтів $\Gamma_{10}$, $\Gamma_{00}$, $\Gamma_{11}$, $\Gamma_{01}$, $\Gamma_{12}$, $\Gamma_{02}$, $\Gamma_{13}$, $\Gamma_{03}$ наведено в (15).

У випадку відсутності динамічної несиметрії ($J_2 = J_1$) система нерівностей (12)–(14) спрощується і записується наступним чином:

$$\left(\Gamma D_3^2 - (J_3 - J_1)P^2\right)^2 + (D_3 - D_1)^2 D_3^3 P^2 + \tilde{a}_0\varepsilon =$$

$$= D_3^4\Gamma^2 + 2\,(J_1 - J_3)\,D_3^2 P^2 \Gamma + (D_3 - D_1)^2 D_3^2 P^2 + (J_3 - J_1)^2 P^4 + \tilde{a}_0\varepsilon > 0, \qquad (22)$$

$$D_1 D_3^2 \Gamma < [J_1 D_1 + (J_3 - 2J_1)\,D_3]\,P^2 + (J_1 P^2 - D_3^2\Gamma) D_1 \varepsilon/2, \qquad (23)$$

$$\Gamma_{10}\Gamma + \Gamma_{00} + (\Gamma_{11}\Gamma + \Gamma_{01})\,\varepsilon + (\Gamma_{12}\Gamma + \Gamma_{02})\,\varepsilon^2 + (\Gamma_{13}\Gamma + \Gamma_{03})\,\varepsilon^3 =$$

$$= p_{40}P^4 + p_{20}P^2 + p_{00} + \left(p_{41}P^4 + p_{21}P^2 + p_{01}\right)\varepsilon +$$

$$+ \left(p_{22}P^2 + p_{02}\right)\varepsilon^2 + \left(p_{23}P^2 + p_{03}\right)\varepsilon^3 > 0. \qquad (24)$$

Тут

$$\tilde{a}_0 = (D_1 - D_3)\,D_1 D_3^2 P^2,\ \Gamma_{20} = 0,$$

$$\Gamma_{10} = -4\left[(J_3 - 2J_1)^2 P^2 + D_1^2 D_3^2\right] D_1^2 D_3,$$

$$\Gamma_{00} = 4\,(J_3 D_1 - J_1 D_3)\left[(J_3 - 2J_1)^2 P^2 + D_1^2 D_3^2\right] P^2, \Gamma_{21} = 0,$$

$$\Gamma_{11} = -4\left[(J_3 - 2J_1)^2 P^2 + 2D_1^2 D_3^2\right] D_1^2 D_3,$$

$$\Gamma_{01} = 2\left[(J_3 - 2J_1)^2 P^2 + (3J_3 D_1 - 2J_1 D_3)\,D_1^2 D_3^2\right] D_1 P^2,$$

$$\Gamma_{22} = 0,\ \Gamma_{12} = -\left[(J_3 - 2J_1)^2 P^2 + 5D_1^2 D_3^2\right] D_1^2 D_3, \qquad (25)$$

$$\Gamma_{02} = [2\,(J_1 + J_3)\,D_1 - J_1 D_1]\,D_1^2 D_3^2 P^2,$$

$$\Gamma_{23} = 0,\ \Gamma_{13} = -D_1^4 D_3^3,\ \Gamma_{03} = J_1 D_1^3 D_3^2 P^2,$$

$$p_{40} = 4\,(J_3 - 2J_1)^2 (J_3 D_1 - J_1 D_3)\,,\ p_{00} = -4D_1^4 D_3^3 \Gamma,\ p_{41} = 2J_3\,(J_3 - 2J_1)^2 D_1,$$

$$p_{21} = 2\left[(3J_3 D_1 - 2J_1 D_3)\,D_3 - (J_3 - 2J_1)^2\,\Gamma\right] D_1^2 D_3,\ p_{01} = 2p_{00},\ p_{42} = 0,$$

$$p_{22} = \left[(2\,(J_1 + J_3)\,D_1 - J_1 D_3)\,D_3 - (J_3 - 2J_1)^2\,\Gamma\right] D_1^2 D_3,$$

$$p_{02} = -5D_1^4 D_3^3 \Gamma,\ p_{43} = 0,\ p_{23} = J_1 D_1^3 D_3^2,\ p_{03} = -D_1^4 D_3^3 \Gamma.$$

### 4. Дослідження умов стійкості (12)–(14), (16)–(17), (18)–(19) і (22)–(24).

Із нерівностей (13) випливає, що при дії перекидального моменту ($\Gamma > 0$) стійкість буде неможлива, коли $D_2 > D_1$ ($\varepsilon > 0$), $P^2 < 2JD_3/(J_1 + J_2)D_1$і $\Gamma > J_1 P^2/D_3^2$.

Із нерівностей (12) – (14) слід, що для досить малих значеннях дисипативно дебалансу $\varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$) при

$$\left(\Gamma D_3^2 - (J_3 - J_1)P^2\right)\left(\Gamma D_3^2 - (J_3 - J_2)P^2\right) > 0, 2D_1 D_3^2 \Gamma < \left[(J_1 + J_2)D_1 - 2JD_3\right] P^2,$$

$$\Gamma_{10}\Gamma + \Gamma_{00} > 0 \text{ або } p_{40}P^4 + p_{20}P^2 + p_{00} > 0 \qquad (26)$$

рівномірне обертання твердого тіла буде стійким. С точністю до другого порядку малості постійного моменту $P/P_0$ будемо мати наступні достатні умови стійкості:

$$D_3^2\Gamma^2 + \tilde{J}P^2\Gamma + (D_3 - D_1)^2 P^2 > 0, 2D_1 D_3^2 \Gamma < \left[(J_1 + J_2)D_1 - 2JD_3\right] P^2,$$

$$p_{20}P^2 + p_{00} > 0. \qquad (27)$$

Із нерівності (12) слід, що при великому дисипативному дебалансу $\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) для $D_1 < D_3$, $\tilde{J}\Gamma \leq 0$ і $(J_3 - J_1)(J_3 - J_2) \leq 0$ рівномірне обертання твердого тіла може бути нестійким, а при досить великому дисипативному дебалансу обертання твердого тіла буде нестійким навіть при $D_1 < D_3$. У запас стійкості також не йде випадок $-1 < \varepsilon < 0$ і $D_1 > D_3$.

Із нерівності (13) також випливає, що при великому дисипативному дебалансі $\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) для $J_1 P^2 < D_3^2\Gamma$ і $(J_1 + J_2)D_1 - 2JD_3 \leq 0$ обертання твердого тіла може бути нестійким, а при досить великому дисипативному дебалансу обертання твердого тіла буде нестійким навіть при $J_1P^2 < D_3^2\Gamma$. У запас стійкості також не йде випадок $-1 < \varepsilon < 0$ і $J_1P^2 > D_3^2\Gamma$.

Нерівність (14) включає в собі більш складний вплив дисипативного дебалансу, ніж на нерівності (12) і (13), і має третій порядок малості або більшості відповідно $\varepsilon$. При малому значенні $\varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$ ), $\Gamma_{20}\Gamma^2 + \Gamma_{10}\Gamma + \Gamma_{00} \leq 0$ ($p_{40}P^4 + p_{20}P^2 + p_{00} \leq 0$) і $\Gamma_{21}\Gamma^2 + \Gamma_{11}\Gamma + \Gamma_{01} < 0$ ($p_{41}P^4 + p_{21}P^2 + p_{01} < 0$) рівномірне обертання твердого тіла може бути нестійким, а при досить малому значенні дисипативному дебалансу обертання твердого тіла буде нестійким навіть при $\Gamma_{20}\Gamma^2 + \Gamma_{10}\Gamma + \Gamma_{00} \leq 0$. У запас стійкості також не йде випадок $-1 < \varepsilon < 0$ і $\Gamma_{21}\Gamma^2 + \Gamma_{11}\Gamma + \Gamma_{01} > 0$. При великому значенні $\varepsilon$ ($\varepsilon \gg 1$), $\Gamma_{13}\Gamma + \Gamma_{03} < 0$ ($D_1D_3\Gamma > J_1P^2$) і $\Gamma_{20}\Gamma^2 + \Gamma_{10}\Gamma + \Gamma_{00} \leq 0$ ($p_{40}P^4 + p_{20}P^2 + p_{00} \leq 0$) також може виникнути нестійкість, а при досить великому значенні дисипативному дебалансу обертання твердого тіла буде нестійким навіть при $D_1D_3\Gamma > J_1P^2$. Звідки випливає, що це може бути тільки при діє перекидального моменту ($\Gamma > 0$). У запас стійкості також не йде випадок $-1 < \varepsilon < 0$ і $D_1D_3\Gamma > J_1P^2$.

При відсутності динамічної несиметрії ($J_2 = J_1$), згідно (24)–(25), умови стійкості (26) і (27) відповідно отримують вигляд:

$$D_1 D_3^2 \Gamma < \left[J_1 D_1 + (J_3 - 2J_1) D_3\right] P^2 > 0,$$

$$(J_3 - 2J_1)^2 (J_3 D_1 - J_1 D_3) P^4 +$$

$$+ \left[(J_3 D_1 - J_1 D_3) D_3 - (J_3 - 2J_1)^2 \Gamma\right] D_1^2 D_3 P^2 - D_1^4 D_3^3 \Gamma > 0. \qquad (28)$$

$$D_1 D_3^2 \Gamma < [J_1 D_1 + (J_3 - 2J_1) D_3] P^2 > 0,$$

$$\left[(J_3 D_1 - J_1 D_3) D_3 - (J_3 - 2J_1)^2 \Gamma\right] P^2 - D_1^2 D_3^2 \Gamma > 0. \tag{29}$$

При діє відновлювального моменту ($\Gamma < 0$) достатньою умовою для виконання нерівностей () і (29) є відома умова для симетричного твердого тіла [7]

$$J_3 D_1 - J_1 D_3 > 0. \tag{30}$$

**5. Стійкості обертання твердого тіла навколо центру мас ($\Gamma = 0$).** В цьому випадку система нерівностей (12)–(14) отримає вигляд:

$$(D_3 - D_1)^2 D_3^2 P^2 + (J_3 - J_1)(J_3 - J_2) P^4 + (D_1 - D_3) D_1 D_3^2 P^2 \varepsilon > 0, \tag{31}$$

$$(J_1 + J_2) D_1 - 2J D_3 + J_1 D_1 \varepsilon > 0, \tag{32}$$

$$\tilde\Gamma_{00} + \tilde\Gamma_{01}\varepsilon + \tilde\Gamma_{02}\varepsilon^2 + \tilde\Gamma_{03}\varepsilon^3 =$$

$$= p_{40} P^2 + p_{20} + \left(p_{41} P^2 + p_{21}\right)\varepsilon + p_{22}\varepsilon^2 + p_{23}\varepsilon^3 > 0, \tag{33}$$

де $\tilde\Gamma_{0i} = \Gamma_{0i} / P^2$, а значення коефіцієнтів $\Gamma_{00}$, $\Gamma_{01}$, $\Gamma_{02}$, $\Gamma_{03}$ і $p_{40}$, $p_{20}$, $p_{41}$, $p_{21}$, $p_{22}$, $p_{23}$ приведені в (15).

Із нерівностей (31)–(33) слідує, що для досить малих значеннях дисипативного дебалансу $\varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$) при

$$(J_3 - J_1)(J_3 - J_2) > 0, (J_1 + J_2) D_1 - 2(J_1 + J_2 - J_3) D_3 > 0,$$

$$\tilde\Gamma_{00} = 2\left[2J_1 J_2 D_3 - J_3 (J_1 + J_2) D_1\right] J^2 P^2 + (J_1 + J_2)\left[(J_1 + J_2) D_3 - 2J_3 D_1\right] D_1^2 D_3^2 < 0 \tag{34}$$

рівномірне обертання твердого тіла буде стійким.

Таким чином, коли момент інерції $J_3$ є наібільшим або наіменьшим момент інерції твердого тіла,

$$D_3 > (J_1 + J_2) D_1 / 2 (J_1 + J_2 - J_3)$$

і

$$2\left[J_3 (J_1 + J_2) D_1 - 2J_1 J_2 D_3\right] J^2 P^2 < (J_1 + J_2)\left[(J_1 + J_2) D_3 - 2J_3 D_1\right] D_1^2 D_3^2,$$

то при досить малих значеннях дисипативного дебалансу рівномірне обертання твердого тіла навколо центру мас буде стійким. Коли не виконується одна з цих нерівностей (34), то обертання твердого тіла буде нестійким. Так, наприклад, це може бути, коли $D_3 > (J_1 + J_2) D_1 / 2 (J_1 + J_2 - J_3)$ або $D_3 < 2J_3 D_1 / (J_1 + J_2)$. В ціх випадках не виконується друга або третя нерівністі в (34).

Із нерівностей (31)–(32) видно, що при $\varepsilon > 0$, $D_1 > D_3$, $(J_3 - J_1)(J_3 - J_2) > 0$ і $(J_1 + J_2) D_1 - 2(J_1 + J_2 - J_3) D_3 > 0$ ці нерівності будуть вірні. Так як, $p_{23} =$

$J_1^2 D_1^3 D_3^2 > 0$, то нерівність (33) буде виконана при $\tilde{\Gamma}_{00} < 0$ і великих значеннях $\varepsilon$ або тільки при досить великих значеннях $\varepsilon$.

Таким чином, коли момент інерції $J_3$ є наібільшим або наіменьшим момент інерції твердого тіла, $D_3 > (J_1 + J_2) D_1 / 2 \, (J_1 + J_2 - J_3)$, $\tilde{\Gamma}_{00} < 0$, $D_2 > D_1 > D_3$, то при великих значеннях дисипативного дебалансу рівномірне обертання твердого тіла навколо центру мас може буде стійким і буде стійким при $D_2 > D_1 > D_3$ і досить великих значеннях дисипативного дебалансу.

Із нерівності (31) витікає, що при великому дисипативному дебалансі $\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), коли $D_1 < D_3$ і $(J_3 - J_1)(J_3 - J_2) \leq 0$, то рівномірне обертання твердого тіла може бути нестійким, а при досить великому дисипативному дебалансу обертання твердого тіла буде нестійким навіть при $D_1 < D_3$. У запас стійкості також не йде випадок $-1 < \varepsilon < 0$ і $D_1 > D_3$. Із нерівності (32) також слідує, що у запас стійкості також не йде випадок $-1 < \varepsilon < 0$.

Із нерівності (33) видно, що при малому значенні $\varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$ ), $\tilde{\Gamma}_{00} \leq 0$ і $\tilde{\Gamma}_{01} \Big/ D_1 < 0$ рівномірне обертання твердого тіла може бути нестійким, а при досить малому значенні дисипативному дебалансу обертання твердого тіла буде нестійким навіть при $\tilde{\Gamma}_{00} \leq 0$. У запас стійкості також не йде випадок $-1 < \varepsilon < 0$ і $\Gamma_{01} > 0$.

При відсутності динамічної несиметрії ($J_2 = J_1$), згідно (24)–(25), умови стійкості (31)–(32) отримають вигляд:

$$(D_3 - D_1)^2 D_3^2 P^2 + (J_3 - J_1)^2 P^4 + (D_1 - D_3) D_1 D_3^2 P^2 \varepsilon > 0, \tag{35}$$

$$J_1 (D_1 - 2D_3) + J_3 D_3 + J_1 D_1 \varepsilon / 2 > 0, \tag{36}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{\Gamma}_{00} + \tilde{\Gamma}_{01}\varepsilon + \tilde{\Gamma}_{02}\varepsilon^2 + \tilde{\Gamma}_{03}\varepsilon^3 = \\ &= p_{40}P^2 + p_{20} + \left(p_{41}P^2 + p_{21}\right)\varepsilon + p_{22}\varepsilon^2 + p_{23}\varepsilon^3 > 0, \end{aligned} \tag{37}$$

де значення коефіцієнтів $\Gamma_{00}$, $\Gamma_{01}$, $\Gamma_{02}$, $\Gamma_{03}$ і $p_{40}$, $p_{20}$, $p_{41}$, $p_{21}$, $p_{22}$, $p_{23}$ наведені в (25).

Так як

$$\tilde{\Gamma}_{00} = 4 (J_3 D_1 - J_1 D_3) \left[ (J_3 - 2J_1)^2 P^2 + D_1^2 D_3^2 \right],$$

$$\tilde{\Gamma}_{01} \Big/ 2D_1 = (J_3 - 2J_1)^2 P^2 + (3J_3 D_1 - 2J_1 D_3) D_1^2 D_3^2,$$

то із нерівностей (35)–(37) слідує, що з точністю до першого порядку малості дисипативного дебалансу $\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) достатні умови стійкості рівномірне обертання твердого тіла навколо центру мас мають вигляд

$$D_1 > 2D_3, J_3 D_1 - J_1 D_3 > 0. \tag{38}$$

Умови стійкості (34) при $J_2 = J_1$ також будуть виконані за умов (38).

Таким чином, для виконання нерівностей (38) достатньо, щоб виконувалась нерівність $D_1 > 2D_3$ і відома нерівність (30).

**6. Висновки.**

На підставі проведених аналітичних досліджень впливу дисипативного дебалансу, відновлювального, перекидального і постійного моментів на умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором несиметричного твердого тіла можна зробити наступні висновки:

1. Умови асимптотичої стійкості представлені у вигляді системи трьох нерівностей. Перша і друга нерівність мають першу ступень відносно дисипативного дебалансу, а третья нерівність – третью ступень. Перша і третя нерівність мають другий ступінь щодо перекидального або відновлювального моменту, а друга нерівність – перший ступінь. Перша та третя нерівність мають четвертий ступінь відносно постійного моменту, а друга нерівність – має другу ступінь. Найбільш складною для дослідження є третя нерівність.

2. При дії перекидального моменту стійкість буде неможлива, коли $D_2 > D_1$ $(\varepsilon > 0)$, $P^2 < 2JD_3/(J_1 + J_2)D_1$і $\Gamma > J_1P^2\big/D_3^2$.

3. Отримані достатні умови асимптотичної стійкості при досить малих значеннях дисипативному дебалансу.

4. При досить великих значеннях дисипативному дебалансу стійкість буде неможлива, коли $D_3 > D_1$ або $\Gamma > J_1P^2\big/D_3^2$ або $\Gamma > J_1P^2\big/D_1D_3$. Це може бути тільки при діє перекидального моменту.

5. Показано, що при відсутності динамічної несиметрії і діє відновлювального моменту достатньою умовою стійкості є відома умова для симетричного твердого тіла $J_3D_1 - J_1D_3 > 0$.

6. Отримані умови стійкості і нестійкості обертання твердого тіла навколо центру мас при досить малих і великих значеннях дисипативного дебалансу. Показано з точностью до першого порядку малості дебалансу, що при відсутності динамічної несиметрії, достатньою умовою стійкості є відома умова для симетричного твердого тіла і умова $D_1 > 2D_3$.

**Цитована література**


1. *Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыхин Г.А.* Устойчивость движения систем связанных твёрдых тел. – К.: Наук. думка, 1991. – 166 с.
2. *Болграбская И.А., Лесина М.Е., Чебанов Д.А.* Динамика систем связанных твёрдых тел. Серия "Задачи и методы: математика, механика, кибернетика". – ИПММ НАН Украины, Том 9. – К.: Наукова Думка, 2012. – 395 с.
3. *Кононов Ю.М.* Про стійкість рівномірного обертання несиметричного твердого тіла у середовищі з опором під дією постійного моменту // Прикл. механіка. – 2021. – Т. 57, № 4. – С. 68–77.
4. *Kononov Yu.M.* Stability of a Uniform Rotation of an Asymmetric Rigid Body in a Resisting Medium. International applied mechanics. A translation of Prikladnaya Mekhanika – 2021. – V. 57, № 4. – P. 432–439.

5. *Кононов Ю.М., Довгоший О.А., Чеіб А.Х.* Про стійкість рівномірного обертання у середовищі з опором несиметричного твердого тіла під дією постійного моменту у інерціальній системі відліку // Механіка та математичні методи. – 2022. – V. IV, № 1.– P. 6–22.
6. *Кононов Ю.М., Чеіб А.Х.* Про стійкість рівномірних обертань у середовищі з опором несиметричних і симетричних твердих тіл під дією постійних моментів // Праці ІПММ НАН України. – 2022. – Т. 36. – С. 11–25.
7. *Карапетян А.В., Лагутина И.С.* О влиянии диссипативного и постоянного моментов на вид и устойчивость стационарных движений волчка Лагранжа // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. – 1998. – № 5. – С. 29–33.
8. *Карапетян А.В.* О стационарных движениях волчка Лагранжа с возбуждением в сопротивляющейся среде // Вестник Московского ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 2000. – № 5. – С. 39–43.
9. *Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D.* Evolution of the Motions of a Rigid Body About its Centre of Mass. – Springer International Publishing AG, 2017. – 243 p.
10. *Leshchenko D., Ershkov S., Kozachenko T.* Rotations of a Rigid Body Close to the Lagrange Case under the Action of Nonstationary Perturbation Torque // J. Appl. Comput. Mech. – 2022. – P. 1–9.
11. *Leshchenko D., Ershkov S., Kozachenko T.* Evolution of motion of a rigid body similar to Lagrange top under the influence of slowly time varying torques // Proc IMechE Part C: J Mechanical Engineering Scienc. – 2022. – Vol. 236 (22). – P. 10879–10890.
12. *Leshchenko D., Ershkov S., Kozachenko T.* Perturbed rotational motions of a nearly dynamically spherical rigid body with cavity containing a viscous fluid subject to constant body fixed torques // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2023. – V. 148. – P. 104284.
13. *Лещенко Д.Д., Козаченко Т.О.* Еволюція обертань сфероїда з порожниною, заповненою в'язкою рідиною в середовищі з опором // Праці ІПММ НАН України. – 2021. – Т. 35, № 2. – С. 97–103.

**References**

1. Savchenko, A.Ya., Bolgrabskaya, I.A., Kononyihin, G.A. (1991). *Ustoychivost dvizheniya sistem svyazannyih tvyordyih tel.* K.: Nauk. dumka (in Ukraine).
2. Bolgrabskaya, I.A., Lesina, M.E., Chebanov, D.A. (2012). *Dinamika sistem svyazannyih tvyordyih tel.* Seriya "Zadachi i metodyi: matematika, mehanika, kibernetika", V. 9. K.: Nauk. Dumka (in Ukraine).
3. Kononov, Yu.M. (2021). Pro stiikist rivnomirnoho obertannia nesymetrychnoho tverdoho tila u seredovyshchi z oporom pid diieiu postiinoho momentu. *Prykl. mekhanika, 57*(4), 68–77.
4. Kononov, Yu.M. (2021). Stability of a Uniform Rotation of an Asymmetric Rigid Body in a Resisting Medium. *International applied mechanics. A translation of Prikladnaya Mekhanika, 57*(4), 432–439.
5. Kononov, Yu.M., Dovgoshey, O.A., Cheib, A.K. (2022). Pro stiikist rivnomirnoho obertannia u seredovyshchi z oporom nesymetrychnoho tverdoho tila pid diieiu postiinoho momentu u inertsialnii systemi vidliku. *Mekhanika ta matematichni metody, IV*(1), 6–22 (in Ukraine).
6. Kononov, Yu.M., Cheib, A.K. (2022). Pro stiikist rivnomirnoho obertannia u seredovyshchi z oporom nesymetrychnykh i symetrychnykh tverdykh til pid diieiu postiinykh momentiv. *Pratsi IPMM NAN Ukrainy, 36*, 11–25 (in Ukraine).
7. Karapetyan, A.V., Lagutina, I.S. (1998). O vliyanii dissipativnogo i postoyannogo momentov na vid i ustoychivost statsionarnyih dvizheniy volchka Lagranzha. *Izv. RAN. Mehanika tvyordogo tela, 5*, 29–33 (in Russian).
8. Karapetyan, A.V. (2000). O statsionarnyih dvizheniyah volchka Lagranzha s vozbuzhdeniem v soprotivlyayuscheysya srede. *Vestnik Moskovskogo un-ta. Ser. 1. Matematika. Mehanika, 5*, 39–43 (in Russian).
9. Chernousko, F.L., Akulenko, L.D., Leshchenko, D.D. (2017). *Evolution of the Motions of a Rigid Body About its Centre of Mass.* Springer International Publishing AG.

10. Leshchenko, D., Ershkov, S., Kozachenko, T. (2022). Rotations of a Rigid Body Close to the Lagrange Case under the Action of Nonstationary Perturbation Torque. *J. Appl. Comput. Mech*, 1–9.
11. Leshchenko, D., Ershkov, S., Kozachenko, T. (2022). Evolution of motion of a rigid body similar to Lagrange top under the in?uence of slowly time varying torques. *Proc IMechE Part C: J Mechanical Engineering Scienc, 236*(22), 10879–10890.
12. Leshchenko, D., Ershkov, S., Kozachenko, T. (2023). Perturbed rotational motions of a nearly dynamically spherical rigid body with cavity containing a viscous fluid subject to constant body fixed torques. *International Journal of Non-Linear Mechanics, 148*, 104284.
13. Leshchenko, D.D., Kozachenko, T.O. (2021). Evolution of rotations of a spheroid with cavity containing a viscous fluid in a resistive medium. *Proc. IAMM NASU, 35*( 2), 97–103.

**Yu.M. Kononov, A.Kh. Cheib**

**Influence of dissipative asymmetry on the of rotation stability in a resisting medium of a asymmetric rigid body under the action of a constant moment in inertial reference frame.**

Assuming that the center of mass of an asymmetric rigid body is located on the third main axis of inertia of a rigid body, the influence of dissipative asymmetry on the stability of uniform rotation in a medium with resistance of a dynamically asymmetric rigid body is estimated. A rigid body rotates around a fixed point, is under the action of gravity, dissipative moment and constant moment in an inertial frame of reference. The stability conditions are represented by a system of three inequalities. The first and second inequalities have the first degree with respect to the dissipative asymmetry, and the third inequality has the third degree. The third inequality is the most difficult to study. Analytical studies of the influence of small and large dissipative asymmetries, restoring, overturning and constant moments on the stability of rotation of a rigid body are carried out. Conditions for asymptotic stability are obtained for sufficiently small values of the dissipative asymmetry and conditions for instability for sufficiently large values of the asymmetry. The stability conditions are written down to the second order of smallness with respect to the constant moment and the first - with respect to the restoring or overturning moments. Stability conditions for the rotation of a rigid body around the center of mass are studied.

***Keywords:*** *dynamically asymmetric rigid body, uniform rotation, medium with resistance, constant moment in the inertial frame of reference, asymptotic stability.*

*Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ,*
*Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця*
*kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com,*
*akram_cheaib@hotmail.com*

*Отримано 19.10.2022*