УДК 517.54
DOI: 10.37069/1683-4720-2022-36-10

©2022. **С.М. Чуйко, О.В. Нєсмєлова, К.С. Шевцова**

РОЗВ'ЯЗЯННЯ НЕЛІНІЙНОГО МАТРИЧНОГО РІВНЯННЯ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

Нелінійні матричні рівняння широко використовуються в якісній теорії звичайних диференціальних, функціонально-диференціальних, диференціально-алгебраїчних та інтегро-диференціальних рівнянь, у теорії стійкості руху, теорії керування, а також у задачах про відновлення зображень.

В статті нами досліджене нелінійне матричне рівняння відносно невідомої прямокутної матриці. У загальному випадку лінеаризація нелінійного матричного рівняння відносно невідомої прямокутної матриці визначає лінійний матричний оператор, який не має оберненого. Для такого нелінійного матричного рівняння не можливе використання класичного методу Ньютона, проте застосовний метод Ньютона – Канторовича.

У статті запропоновані оригінальні умови розв'язності, а також схема знаходження розв'язків нелінійного матричного рівняння. Для знаходження наближень до розв'язків нелінійних матричних рівнянь у випадку невідомої прямокутної матриці та для перевірки збіжності побудованої ітераційної схеми у статті використовується метод Ньютона. Для перевірки ефективності побудованої ітераційної схеми знайдені нев'язки отриманих наближень у розв'язку нелінійного матричного алгебраїчного рівняння.

MSC: 34N05.

Ключові слова: *нелінійне матричне рівняння, метод Ньютона.*

Нами досліджене нелінійне матричне рівняння відносно невідомої прямокутної матриці. Взагалі кажучи, лінеаризація такого рівняння визначає лінійний матричний оператор, який не має оберненого [1,3]. Прикладом такої ситуації є узагальнене матричне рівняння типу Сільвестра [7], не розв'язне для довільної неоднорідності. Крім того, у разі розв'язності узагальнене матричне рівняння типу Сільвестра, взагалі кажучи, розв'язне неоднозначно [7].

Нами досліджене нелінійне матричне рівняння відносно невідомої прямокутної матриці, лінеаризація якого визначає лінійний матричний оператор, який має обернений [1,3]. Прикладом такої ситуації є матричне рівняння Ляпунова [8]. Особливістю такого нелінійного матричного рівняння є можливість використання класичного методу Ньютона [9].

У загальному випадку лінеаризація нелінійного матричного рівняння відносно невідомої прямокутної матриці визначає лінійний матричний оператор, який не має оберненого [1, 3, 7]. Для такого такого нелінійного матричного рівняння не можливе використання класичного методу Ньютона [9], проте застосовний метод Ньютона – Канторовича [10].

1. Постановка задачі.

Досліджуємо задачу про знаходження розв'язку

$$Z \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},\ \alpha \neq \beta$$

нелінійного рівняння

$$F(Z) = 0. \tag{1}$$

Матричну функцію

$$F(Z): \ \mathbb{R}^{\alpha\times\beta} \to \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}$$

припускаємо визначеною у відкритій області $D \subset \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ і двічі неперервно диференційовною по Z на множині $\Omega \subseteq D \subset \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$. Визначимо оператор [3,10]

$$\mathcal{M}[A]: \ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n},$$

як такий, що ставить у відповідність матриці $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор $\mathcal{B} := \mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, утворений з n стовпців матриці A, а також обернений оператор [3,10]

$$\mathcal{M}^{-1}\Big[\mathcal{B}\Big]: \ \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

який ставить у відповідність вектору $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицю $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

2. Побудова наближень до розв'язків нелінійних матричних рівнянь методом Ньютона.

Актуальність дослідження задачі про знаходження розв'язку

$$Z \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, \ \alpha \neq \beta$$

нелінійного матричного рівняння (1) пов'язана з тим фактом, що переважна більшість досліджень умов розв'язності цього рівняння [11–16] передбачає рівність $\alpha = \beta = \gamma = \delta$. Значно менша увага приділяється дослідженню матричних рівнянь з невідомою прямокутною матрицею [7,17]. Позначимо вектор-функцію

$$f(z) := \mathcal{M}[F(Z)]: \ \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta}, \ z := \mathcal{M}[Z].$$

Функція $f(z)$ двічі неперервно диференційовна по z у відкритій області $\check{D} \subset \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$. Задача про знаходження розв'язку $Z \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ нелінійного матричного рівняння (1) приводить до задачі про знаходження розв'язку $z \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$ рівняння

$$f(z) = 0. \tag{2}$$

За умови $\alpha\beta = \gamma\delta$ для знаходження розв'язку нелінійного рівняння (1) можливе використання методу Ньютона [9,18]. Припустимо, що рівняння (1) в околі точки z_0 має корінь $z^* \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$ і в околі нульового наближення z_0 мають місце нерівності [9, с. 680, 682]

$$\Big|\Big| \big[f'(z_0)\big]^{-1} \Big|\Big| \leq \gamma_1, \ \Big|\Big| f(z_0) \Big|\Big| \leq \gamma_2, \ \Big|\Big| f''(z_k) \Big|\Big| \leq \gamma_3(k), \ k \in \mathbb{N}.$$

Припустимо також, що $\det\,[f'(z_0)] \neq 0$ та існує константа

$$\theta = \sup_{k\in\mathbb{N}} \Big\{ 2\,\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3(k) \Big\} < 1.$$

За цих умов рівняння (2) в околі точки z_0 має єдиний корінь $z^* \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$. Для знаходження розв'язку z^* рівняння (2) може бути використана ітераційна схема

$$z_{k+1} = z_k - J_k^{-1} f(z_k), \;\; J_k := f'(z_k) \in \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta}, \;\; k = 0, \; 1, \; 2, \; \dots ,$$

при цьому швидкість збіжності послідовності $\{z_k\}$ до розв'язку z^* рівняння (2) квадратична. За умови $\alpha\beta = \gamma\delta$, у випадку $\det[f'(z_0)] \neq 0$ для знаходження розв'язку нелінійного рівняння (1) може бути використана ітераційна схема

$$Z_{k+1} = Z_k - \mathcal{M}^{-1}\left[J_k^{-1} f(z_k)\right], \;\; k = 0, \; 1, \; 2, \; \dots . \tag{3}$$

Таким чином, доведено наступне твердження.

Теорема. *Припустимо, що для рівняння (1) виконані наступні умови. Функція*

$$f(z) := \mathcal{M}[F(Z)] : \;\; \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta}, \;\; z := \mathcal{M}[Z].$$

двічі неперервно диференційовна по z у відкритій області $\check{D} \subset \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$. Припустимо також, що

$$\det J_k \neq 0 \tag{4}$$

та існує константа

$$\theta = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\{ 2\,\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3(k) \right\} < 1. \tag{5}$$

За цих умов у випадку $\alpha\beta = \gamma\delta$ для знаходження розв'язку нелінійного рівняння (1) може бути використана ітераційна схема (3).

За умови $\alpha\beta \neq \gamma\delta$, взагалі кажучи, не можна гарантувати розв'язкність нелінійного рівняння (1), а у випадку розв'язності рівняння (1), не можна гарантувати єдність розв'язку нелінійного рівняння (1). У загальному випадку $\alpha\beta \neq \gamma\delta$, взагалі кажучи, лінеаризація нелінійного матричного рівняння (1) відносно невідомої прямокутної матриці визначає лінійний матричний оператор, який не має оберненого [1, 3, 7]. Для такого такого нелінійного матричного рівняння не можливе використання класичного методу Ньютона [9], проте застосовний метод Ньютона – Канторовича [10, 19].

Приклад. Продемонструємо ефективність доведеної теореми на прикладі задачі про знаходження розв'язку

$$Z \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

нелінійного матричного рівняння

$$F(Z) := Z\,Z^*\,Z + Z + A = 0; \tag{6}$$

тут

$$A := -2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача про знаходження розв'язку нелінійного матричного рівняння (6) приводить до задачі про знаходження розв'язку $z \in \mathbb{R}^6$ рівняння (2). Для знаходження розв'язку матричного рівняння (6) може бути використана ітераційна схема (3). Дійсно, для цього рівняння має місце рівність

$$\alpha\beta = \gamma\delta = 6.$$

Покладемо

$$z_0 := \frac{34}{35}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^*,$$

при цьому виконується вимога (4)

$$\det J_0 \neq 0.$$

У просторі $\mathbb{R}^n$ використовуватимемо "кубічну" норму [1, 2, 9]

$$||z||_{\mathbb{R}^n} := \max_{1\le i\le n} |z_i|, \ z \in \mathbb{R}^n.$$

У просторі $\mathbb{R}^{m\times n}$ дійсних $(m \times n)$ – матриць використовуватимемо норму

$$||Z||_{\mathbb{R}^{m\times n}} := \max_{1\le i\le m} \sum_{k=1}^{n} |z_{ik}|, \ Z := \{z_{ik}\} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

як відомо, підпорядковану "кубічній" нормі у просторі $\mathbb{R}^n$. Таким чином, отримуємо

$$z_1 = \frac{164\ 358}{164\ 255}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^*,$$

при цьому

$$F(Z_1) = \begin{pmatrix} \frac{11\ 120\ 867\ 306\ 912}{4\ 431\ 551\ 448\ 881\ 375} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11\ 120\ 867\ 306\ 912}{4\ 431\ 551\ 448\ 881\ 375} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, знаходимо

$$J_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1225}{4693} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4\ 332\ 825}{11\ 174\ 033} & 0 & 0 & -\frac{1\ 416\ 100}{11\ 174\ 033} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1225}{2381} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1225}{2381} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1\ 416\ 100}{11\ 174\ 033} & 0 & 0 & \frac{4\ 332\ 825}{11\ 174\ 033} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1225}{4693} \end{pmatrix}, \ \gamma_1 := ||J_0^{-1}||_\infty = \frac{1225}{2381}.$$

крім того

$$\gamma_2 := ||f(z_0)||_\infty = \frac{4796}{42\ 875}.$$

Задля оцінки величини $\gamma_3(0)$ на першому кроці обчислюємо матриці Гессе [20, 21] для функції $f(z_0)$:

$$H_1(z_0)=\begin{pmatrix} \frac{204}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{68}{35} & 0 & 0 & \frac{34}{35} & 0\\ 0 & 0 & \frac{68}{35} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{34}{35} & 0 & 0 & \frac{68}{35} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ H_2(z_0)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{68}{35} & 0 & 0 & \frac{34}{35} & 0\\ \frac{68}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{68}{35}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{34}{35} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{34}{35} & 0 & 0 & 0\\ \frac{34}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{34}{35}\\ 0 & \frac{68}{35} & 0 & 0 & \frac{34}{35} & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_3(z_0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{68}{35} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{34}{35} & 0 & 0\\ \frac{68}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{34}{35} & 0 & 0 & \frac{34}{35} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{34}{35} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ H_4(z_0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{34}{35} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{34}{35} & 0 & 0 & \frac{34}{35} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{68}{35}\\ 0 & 0 & \frac{34}{35} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{68}{35} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

крім того

$$H_5(z_0)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{34}{35} & 0 & 0 & \frac{68}{35} & 0\\ \frac{34}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{34}{35}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{34}{35} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{34}{35} & 0 & 0 & 0\\ \frac{68}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{68}{35}\\ 0 & \frac{34}{35} & 0 & 0 & \frac{68}{35} & 0 \end{pmatrix},\ H_6(z_0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{68}{35} & 0 & 0 & \frac{34}{35} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{68}{35} & 0 & 0\\ 0 & \frac{34}{35} & 0 & 0 & \frac{68}{35} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{204}{35} \end{pmatrix}.$$

Використовуючи підпорядкованість [1,2,9] норми у просторі $\mathbb{R}^{m\times n}$ "кубічній" нормі у просторі $\mathbb{R}^n$, отримуємо

$$\gamma_3(k):=\left\|d^2f(z_k\,;h)\right\|_\infty:=\left\|\begin{pmatrix} h^*H_1(z_k)h\\ .....\\ h^*H_4(z_k)h \end{pmatrix}\right\|_\infty=\left\|\begin{pmatrix} h^*H_1(z_k)\\ .....\\ h^*H_4(z_k) \end{pmatrix}h\right\|_\infty=$$

$$=\left\|\begin{pmatrix} h^*H_1\\ .....\\ h^*H_4 \end{pmatrix}\right\|_\infty=\left\|h^*\begin{pmatrix} H_1(z_k)\\ .....\\ H_4(z_k) \end{pmatrix}\right\|_\infty=\left\|\begin{pmatrix} H_1(z_k)\\ .....\\ H_4(z_k) \end{pmatrix}\right\|_\infty=\max_{1\le j\le 6}||H_j(z_k)||_\infty.$$

Отже, для рівняння (6) умова збіжності (5) ітераційної схеми (3) на першому кроці виконується:

$$\theta_1:=2\,\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3(0)=\frac{1\ 956\ 768}{2\ 916\ 725}\approx 0,670\ 878<1;$$

тут

$$\gamma_3(0)=||H_6(z_0)||_\infty=\frac{204}{35}.$$

На другому кроці ітераційної схеми (3) виконується вимога (4)

$$\det J_1 \neq 0.$$

Умова збіжності (5) ітераційної схеми (3) також виконується:

$$\theta_2 := 2\,\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3(1) = \frac{9\ 459\ 131\ 616}{13\ 688\ 190\ 425} \approx 0{,}691\ 043 < 1;$$

тут

$$\gamma_3(1) = ||H_6(z_1)||_\infty = \frac{986\ 148}{164\ 255},$$

крім того

$$H_1(z_1) = \begin{pmatrix} \frac{986\ 148}{164\ 255} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{328\ 716}{164\ 255} & 0 & 0 & \frac{164\ 358}{164\ 255} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{328\ 716}{164\ 255} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{164\ 358}{164\ 255} & 0 & 0 & \frac{328\ 716}{164\ 255} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_2(z_1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{328\ 716}{164\ 255} & 0 & 0 & \frac{164\ 358}{164\ 255} & 0 \\ \frac{328\ 716}{164\ 255} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{328\ 716}{164\ 255} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{164358}{164255} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{164\ 358}{164\ 255} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{164\ 358}{164\ 255} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{164\ 358}{164\ 255} \\ 0 & \frac{328\ 716}{164\ 255} & 0 & 0 & \frac{164\ 358}{164\ 255} & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_3(z_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{328\ 716}{164\ 255} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{164\ 358}{164\ 255} & 0 & 0 \\ \frac{328\ 716}{164\ 255} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{164\ 358}{164\ 255} & 0 & 0 & \frac{164\ 358}{164\ 255} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{164\ 358}{164\ 255} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а також

$$H_4(z_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{164\ 358}{164\ 255} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{164\ 358}{164\ 255} & 0 & 0 & \frac{164\ 358}{164\ 255} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{328\ 716}{164\ 255} \\ 0 & 0 & \frac{164\ 358}{164\ 255} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{328\ 716}{164\ 255} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_5(z_1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{164\ 358}{164\ 255} & 0 & 0 & \frac{328\ 716}{164\ 255} & 0 \\ \frac{164\ 358}{164\ 255} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{164\ 358}{164\ 255} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{164\ 358}{164\ 255} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{164\ 358}{164\ 255} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{328\ 716}{164\ 255} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{328\ 716}{164\ 255} \\ 0 & \frac{164\ 358}{164\ 255} & 0 & 0 & \frac{328\ 716}{164\ 255} & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_6(z_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{328\ 716}{164\ 255} & 0 & 0 & \frac{164\ 358}{164\ 255} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{328\ 716}{164\ 255} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{164\ 358}{164\ 255} & 0 & 0 & \frac{328\ 716}{164\ 255} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{986\ 148}{164\ 255} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо

$$z_2 \approx \frac{44\ 103\ 381}{44\ 103\ 368} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^*,$$

при цьому

$$||F(Z_2)||_\infty \approx 1,17\ 905 \times 10^{-6}.$$

На третьому кроці ітераційної схеми (3) також виконується вимога (4)

$$\det J_2 \neq 0;$$

таким чином, отримуємо

$$z_3 \approx \frac{15\ 370\ 647\ 192\ 391}{15\ 370\ 647\ 192\ 390} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^*,$$

при цьому

$$||F(Z_3)||_\infty \approx 2,60\ 236 \times 10^{-13}.$$

Задля оцінки точності знайдених за допомогою ітераційної схеми (3) наближень до розв'язку нелінійного матричного рівняння (6) скористаємось точним розв'язком цього рівняння

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо

$$||Z - Z_1||_\infty \approx 0,000\ 627\ 074, \ ||Z - Z_2||_\infty \approx 2,94\ 762 \times 10^{-7},$$

$$||Z - Z_3||_\infty \approx 6,50\ 591 \times 10^{-14}.$$

Запропонована у статті схема розв'язання нелінійних матричних рівнянь може бути використана до розв'яання нелінійних крайових задач для диференціальних рівнянь у частинних похідних [22,23].

Цитована література

1. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems; 2-th edition. – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. – 298 p.
2. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 277 с.
3. *Chuiko S.* Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation// Miskolc Mathematical Notes. – 2016. – V. 17, № 1. – P. 139–150.

4. *Zuyev A.* Partial asymptotic stabilization of nonlinear distributed parameter systems// Automatica. – 2005. – Vol. 41, № 1. – P. 1–10.
5. *Stanimirovic P.S., Stojanovic I., Pappas D., Chountasis S.* On removing blur in images using least squares solutions// Filomat. – 2016. – V. 30(14). – P. 3855–3866.
6. *Чуйко С.М., Чуйко О.В., Д'яченко Д.Д.* Умови розв'язності задачі про відновлення зображень методом найменших квадратів// Праці ІПММ. – 2022. – V. 36, № 1. – С. 44–53.
7. *Чуйко С.М.* О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра// Чебышевский сборник. – 2015. – V. 16, Вып. 1. – С. 52–66.
8. *Boichuk A.A.* Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type// Ukrainian Mathematical Journal. – 1998. – V. 50, № 8. – P. 1162–1169.
9. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
10. *Chuiko S.M.* To the generalization of the Newton-Kantorovich theorem// Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. mathematics, applied mathematics and mechanics. – 2017. – V. 85, № 1. – P. 62–68.
11. *Кувшинов В.М.* Особенности численного решения матричного алгебраического уравнения Риккати методом установления// Ученые записки ЦАГИ. – 1979. – V. X, № 1. – С. 69–87.
12. *Palin V.V.* Solvability of Quadratic Matrix Equations// Vestnik Moskovskogo Universiteta, Matematika. Mekhanika. – 2008. – V. 63, № 6. – P. 36–41.
13. *Зеликин М.И.* Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении. – М: Факториал. – 1998. – 352 с.
14. *Boichuk A.A.* A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations// Differential Equations. – 2001. – V. 37, № 4. – P. 464–471.
15. *Годунов С.К.* Нормы решений матричных уравнений Лурье–Риккати как критерий качества стабилизируемости и детектируемости. – Вычислительные проблемы в задачах математической физики. – Труды Института математики СО РАН, Т. 22. – Новосибирск: Наука, 1992. – С. 3–21.
16. *Справочник по теории автоматического управления*/ под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987.
17. *Penrose R.* On best approximate solutions of linear matrix equations// Cambridge Philos. soc. – 1955. – V. 52.
18. *Дэннис Дж., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 440 с.
19. *Чуйко С.М.* Обобщение метода Ньютона–Канторовича для систем нелинейных вещественных уравнений// Доповіді НАН України. – 2020. – № 3. – С. 3–9.
20. *Neudecker H., Magnus. J.R.* Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics. – New York: John Wiley & Sons, 1988. – 468 p.
21. *Постников М.М.* Введение в теорию Морса. – М.: Наука, 1971. – 567 с.
22. *Gutlyanskii V.Ya., Nesmelova O.V., Ryazanov V.I.* The Dirichlet problem for the Poisson type equations in the plane// Доповіді Національної академії наук України. – 2020. – № 5. — С. 10–16.
23. *Skrypnik I.I.* Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption// Israel Journal of Mathematics. – 2016. – V. 215, № 1. – P. 163–179.

References

1. Boichuk, A.A., Samoilenko, A.M. (2016). *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems.* 2-th edition, Berlin, Boston: De Gruyter.
2. Azbelev, N.V., Maksymov, V.P., Rakhmatullyna, L.F. (1991). *Introduction to the theory of functional differential equations.* Moscow, Nauka (in Russian).
3. Chuiko S. (2016). Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation. *Miskolc Mathematical Notes, 17*(1), 139–150.
4. Zuyev, A. (2005). Partial asymptotic stabilization of nonlinear distributed parameter systems. *Automatica, 41*(1), 1–10.

5. Stanimirovic, P.S., Stojanovic, I., Pappas, D., Chountasis, S. (2016). On removing blur in images using least squares solutions. *Filomat, 30*(14), 3855–3866.
6. Chuiko, S.M., Chuiko, O.V., Dyachenko, D.D. (2022). Conditions for solvability of the image recovery problem by the least squares method. *Proceedings of Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine*, *36*(1), 44–53.
7. Chuiko, S.M. (2015). On the solution of the generalised Sylvester matrix equation. *Chebyshevskii Sbornik*, *16*(1), 52–66.
8. Boichuk, A.A. (1998). Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type. *Ukrainian Mathematical Journal*, *50*(8), 1162–1169.
9. Kantorovich, L.V., Akilov, G.P. (1977). *Functional analysis.* Moscow, Nauka (in Russian).
10. Chuiko, S.M. (2017). To the generalization of the Newton-Kantorovich theorem. *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. mathematics, applied mathematics and mechanics*, *85*(1), 62–68.
11. Kuvshinov, V.M. (1979). Features of the numerical solution of the matrix algebraic Riccati equation by the method of establishment. *Scientific Notes of ZAGI*, *X*(1), 69–87.
12. Palin, V.V. (2008). Solvability of Quadratic Matrix Equations. *Vestnik of Moskov University, Matematiks. Mechanics*, *63*(6), 36–41.
13. Zelikin, M.I. (1998). *Single spaces and the Riccati equation in the calculus of variations.* Moscow, Factorial (in Russian).
14. Boichuk, A.A. (2001). A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations. *Differential Equations*, *37*(4), 464–471.
15. Godunov, S.K. (1992). Norms of solutions of Lurie-Riccati matrix equations as a criterion for stabilizability and detectability. *Computational problems in problems of mathematical physics*, Novosibirsk, Nauka, 3–21 (in Russian).
16. *Manual on Automatic Control Theory.* (1987). ed. by A.A. Krasovsky, Moscow, Nauka (in Russian).
17. Penrose, R. (1955). *On best approximate solutions of linear matrix equations.* Cambridge Philos. soc., 52.
18. Dennis, J. Jr., Schnabel, R. (1983). *Numerical methods for unconstrained optimisation and nonlinear equations*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall.
19. Chuiko, S.M. (2020). A generalisation of the Newton-Kantorovich method for systems of nonlinear real equations. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, *3*, 3–9.
20. Neudecker, H., Magnus, J.R. (1988). *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*, New York, John Wiley & Sons.
21. Postnikov, M.M. (1971). *Introduction to Morse theory*, Moscow, Nauka (in Russian).
22. Gutlyanskii, V.Ya., Nesmelova, O.V., Ryazanov, V.I. (2020). The Dirichlet problem for the Poisson type equations in the plane. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, *5*, 10–16.
23. Skrypnik, I.I. (2016). Removability of isolated singularities for anisotropic elliptic equations with gradient absorption. *Israel Journal of Mathematics*, *215*(1), 163–179.

S.M. Chuiko, O.V. Nesmelova, K.S. Shevtsova

Solving a nonlinear matrix equation by Newton's method.

Nonlinear matrix equations are often used in the quality theory of ordinary differential, functional differential, differential-algebraic and integro-differential equations, in the theory of motion stability, control theory, and in image reconstruction problems. In this paper, we study a nonlinear matrix equation with respect to an unknown rectangular matrix. In general, the linearization of a nonlinear matrix equation with respect to an unknown rectangular matrix defines a linear matrix operator that has no inverse. For such a nonlinear matrix equation, it is not possible to use the classical Newton method, but the Newton-Kantorovich method is applicable. The paper proposes original conditions for solvability and a scheme for finding solutions to a nonlinear matrix equation. To find approximations to solutions of nonlinear matrix equations in the case of an unknown rectangular matrix and to verify the convergence of the constructed iterative scheme, the paper uses the Newton method. To verify the effectiveness of the constructed iterative scheme, we find the nonconformities of the obtained approximations in the solution of a nonlinear matrix algebraic equation.

Keywords: *nonlinear matrix equation, Newton's method..*

Донбаський держ. пед. ун-т, 84112, Україна, Донецька обл., Слов'янськ,
Ін-т прикл. математики і механіки НАН України, Слов'янськ
chujko-slav@ukr.net
star-o@ukr.net
shevtsova19931993@gmail.com

Отримано 31.01.23