УДК 62-50:519.7
DOI: 10.37069/1683-4720-2022-36-11

©2022. **В.Ф. Щербак**

# СПОСТЕРІГАЧ ПАРАМЕТРІВ ГАРМОНІЙНОГО ОСЦИЛЯТОРА

Розглянуто використання методів теорії спосереження нелінійних динамічних систем в задачах визначення амплітуди, частоти та фази синусоїдального сигналу. Запропоновано схему побудови нелінійного спостерігача, який дозволяє отримувати оцінки невідомих параметрів за результатами вимірювання вихідного сигналу в реальному масштабі часу. Використовується розроблений в аналітичній механіці метод інваріантних співвідношень, який в задачах керування на траєкторіях руху динамічних систем дозволяє синтезувати додаткові зв'язки між відомими і невідомими величинами. Доведено асимптотичну збіжність оцінок шуканих компонент фазового ветора до їх справжнього значення. Результати моделювання демонструють ефективність пропонуємого способу розв'язку задачі спостереження за станом гармонійного осцилятора.

**MSC:** 34C15, 34D20.

***Ключові слова:*** *синусоїдний сигнал, нелінійний спостерігач, інваріантні співвідношення*

**1. Вступ.** Проблема оцінювання невідомої частоти, амплітуди та фази гармонійної сили $u(t) = A\sin(\omega t+\Phi)$, яка діє на механічну систему, знаходить відображення у достатньої кількості публікацій як у минулі так і в сучасні часи (див. [1]). Причина такого інтересу полягає в використанні відповідних методік в різних теоретичних та інженерних дисциплінах, наприклад, у обертальних механічних процесах, в задачах віброізоляції періодичних складових шуму через обертові механізми, для компенсації гармонійних збурень в алгоритмах автоматичного керування, у адаптивної фільтрації при обробці сигналів, тощо. В принципі, метод найменших квадратів, Фур'є аналіз, перетврення Лапласа дають потенційне рішення відповідних задач. Однак ці методи можуть не підходити, наприклад, для алгоритмів керування з обробкою даних в реальному часі.

Незважаючи на відносну простоту задачі визначення параметрів "чистої синусоїди" підходи до її розв'язання використовують досить складний апарат сучасних методів прикладної математики. Алгоритм нелінійного представлення синусоїдального сигналу з подальшим застосуванням нелінійного спостерігача Луєнбергера запропоновано у статті [2], де на базі загальної теорії нелінійного спостереження автори будують досить складну конструкцію відповідного спостерігача. В роботі [3] після представлення синусоїдального сигналу як лінійно параметризованої форми розроблено кілька адаптивних законів в яких з використовуючи апарату теорії ковзного режиму керування отримано оцінки параметрів синусоїди. Мультисинусоїдальний сигнал досліджено в роботах [4], [5] де відповідний оцінювач побудоано з використанням стандартного градієнтного алгоритму. Задача ідентифікації невідомої частоти синусоїдального збурення, яке діє на лінійне диференціальне рівняння першого порядку вирішується в роботі [6]. Слід зазначити роботу [7], в який також представлено підхід, заснований на побудові спостерігачах станів але вже для визначення параметрів періодичної сили, яка діє на лінійний осцилятор. На першому етапі оцінюються коефіцієнти скінченого наближення ряду Фур'є, за яким апроксимується зовнішня періодична сила з передбачуваною частотою. На другому етапі за результатами першого етапу пропонується побудувати спостерігач вже для уточнення частоти навантаження.

В пропонуємой роботі проблему отримання асимптотичних оцінок амплітуди, частоти та фази синусоїдального сигналу розв'язано за допомогою методу інваріантних співвідношень [8], який було розроблено в аналітичній механіці та призначено, зокрема, для пошуку частинних розв'язків (залежностей між змінними) в задачах динаміки твердого тіла з нерухомою точкою. Модифікація цього методу до проблем теорії спостереження, яку проведено в роботах [9], [10] і додатково досліджено в [11], дозволила розробити схему синтезу між відомими і невідомими величинами вихідної системи додаткових співвідношень, що виникають в процесі руху її розширеної моделі. Варто зазначити, що більш загальний підхід, який формує відповідний метод розв'язку задач спостереження для нелінійних динамічних систем завдяки синтезу інваріантного многовиду в просторі розширеної системи, було запропоновано в роботах [12], [13] як певну модифікацію методу стабілізації нелінійних систем $I\&I$ (Input and Invariance).

**2. Задача спостереження для визначення параметрів гармонійного сигналу.**

Основною метою роботи є використання підходу [11] у конкретному випадку, коли задача спостереження розв'язується для системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = -x_2,\ \dot{x}_2 = x_3 x_1,\ \dot{x}_3 = 0, \\ &y = x_1, \end{aligned} \tag{1}$$

зі станом $x := (x_1; x_2; x_3) \in R^3$ і виходом $y(t) \in R$, який вимірюється, тобто є відомим у будь який момент часу. Вихід цієї системи – перша компонента вектору стану, яку задано синусоїдним сигналом $y(t) = Asin(\omega t + \Phi)$. Амплітуда, частота і фаза сигналу в залежності від початкових умов $(x_{10}; x_{20}; x_{30}) \in R^3$ визначаються відповідно за формулами

$$A = \sqrt{\frac{x_{30}x_{10}^2 + x_{20}^2}{x_{30}}},\quad \omega = \sqrt{x_{30}},\quad \Phi = \arctan\left(\frac{\sqrt{x_{30}}x_{10}}{x_{20}}\right). \tag{2}$$

Таким чином, завдяки (2) задача оцінки амплітуди, частоти та фази синусоїдального сигналу зводиться до задачі спостереження стану системи (1) за інформацією про її рух. За припущенням такою інформацією є вихід $y = x_1(t)$, крім того можемо вважати відомими ті величини, які отримані з використанням тільки значень виходу. Зокрема, далі таким будемо вважати будь-який розв'язок задачі Коші $\xi(t, \xi_0)$ для довільної системи диференціальних рівнянь

$$\dot{\xi} = U(\xi, y(t)),\ \xi(0) = \xi_0 \in R^2, \tag{3}$$

де на праву частину системи $U(\xi, y(t))$ поки що накладено єдине обмеження, а саме: ці функції повинні задовольняти достатнім умовам теорем існування та єдиності розв'язків для $t \in [0, \infty)$.

Ідея методу синтезу інваріантних співвідношень, який далі буде використано в задачі спостереженняї, полягає в формуванні додаткових зв'язків, які виникають на деяких траєкторіях розширеної системи диференціальних рівнянь (1), (3) між "відомими" велечинами $y(t), \xi(t)$ та невідомими функціями $x_i(t),\ i = 2, 3$ вихідної системи. За цим методом далі буде розглянута

**Задача спостереження.** Знайти асимптотично точні оцінки $x_2(t), x_3(t)$ – компонент фазового вектору системи диференціальних рівнянь (1) за даними про вихід $x_1(t)$.

**3. Побудова інваріантних співвідношень.**

Будемо шукати додаткові співвідношення на траєкторіях розширеної системи диференціальних рівнянь (1), (3) у вигляді

$$x_i = \Psi_i(x_1) + \xi_i,\ i = 2, 3, \tag{4}$$

де $\Psi_i(x_1)$ деякі диференційовані за своїм аргументом функції, які підлягают визначенню в пропонуємой схемі спостереження. Введемо у розгляд відхилення $\varepsilon_i$ від співвідношень (4), зробивши у вихідних рівняннях заміну змінних $x_i$ за формулами

$$\varepsilon_i = x_i - \Psi_i(x_1) - \xi_i,\ i = 2, 3. \tag{5}$$

Якщо буде встановлено, що при зафіксованих тим чи іншим чином функціях $\Psi_i(x_1), \xi_i$ на деяких траєторіях розширеної системи диференціальних рівнянь має місце тотожність $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) \equiv 0$, то саме на цих траєкторіях інваріантні співвідношення (4) визначатимуть значення $x_i,\ i = 2, 3$.

З урахуванням заміни (5) рівняння для $\dot{x}_i\ i = 2, 3$ перетворюються в диференціальні рівняння відносно відхилень

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 =& \frac{d\Psi_2}{dx_1}(x_1)(\Psi_2(x_1) + \xi_2 + \varepsilon_2) + (\Psi_3(x_1) + \xi_3 + \varepsilon_3)x_1 - \dot{\xi}_2,\\ \dot{\varepsilon}_2 =& \frac{d\Psi_3}{dx_1}(x_1)(\Psi_2(x_1) + \xi_2 + \varepsilon_2) - \dot{\xi}_3.\end{aligned} \tag{6}$$

На першому етапі пропонуємої схеми визначимо структуру допоміжньої системи диференціальних рівнянь. Для цього вимагатимемо, щоб рівняння (3) відносно $\xi_i(t),\ i = 2, 3$ мали вигляд

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_2 =& \frac{d\Psi_2}{dx_1}(x_1)(\Psi_2(x_1) + \xi_2) + (\Psi_3(x_1) + \xi_3)x_1,\\ \dot{\xi}_3 =& \frac{d\Psi_3}{dx_1}(x_1)(\Psi_2(x_1) + \xi_2).\end{aligned} \tag{7}$$

За таким вибором маємо, що вразі $\xi_i(t)$ є будь-яким розв'язком задачі Коші для цієї системи, то рівняння відносно відхилень $\varepsilon_i(t),\ i = 2, 3$ стають однорідними

$$\dot{\varepsilon}_2 = \frac{d\Psi_2}{dx_1}\varepsilon_2 + \varepsilon_3 x_1, \quad \dot{\varepsilon}_3 = \frac{d\Psi_3}{dx_1}\varepsilon_2, \tag{8}$$

отже допускають тривіальний розв'язок $\varepsilon_2(t) = \varepsilon_3(t) \equiv 0$.

Таким чином отримано сім'ю додаткових систем виду (7), залежну від поки що вільних функцій $\Psi_i(x_1),\ i = 2,3$ та їхніх похідних. Кожна з них, разом з вихідною системою (1), перетворює на деяких траєкторіях рівності (4) в інваріантні співвідношення, за якими безпосередньо можуть бути знайдені невідомі компоненти фазового вектору $x_2, x_3$. На інших траєкторіях системи (1), (7) з'являються ненульові доданки $\varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t)$.

**4. Стабілізації відхилень.**

Природньо виникає питання про вибір вільних функцій $\Psi_i(x_1),\ i = 2,3$ таким чином, щоб доданки $\varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t)$ в формулах (5) прямували до нуля, тобто тривіальний розв'язок рівнянь у відхиленнях (8) мав би властивість глобальної асимптотичної стійкості. Відповідь на це питання становить зміст другого етапу пропонуємої схеми розв'язку задачі спостереження. Оскільки існує багато підходів до вирішення проблеми стабілізації неавтономних систем, то дослідження на цьому етапі в загальному випадку передбачають, що вибір вільних функцій здійснюється для кожної конкретної динамічної системи окремо в залежності від аналітичного виду правих частин відповідних диференціальних рівнянь (8).

Для автономного осцилятора (1) один із таких підходів може бути пов'язан зі спробою використання принципу інваріантності ЛаСалля [15]. Об'єктом дослідження в цьому випадку є система диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = -x_2,\ \dot{x}_2 = x_3 x_1,\ \dot{x}_3 = 0, \\ &\dot{\varepsilon}_2 = \frac{d\Psi_2}{dx_1}\varepsilon_2 + \varepsilon_3 x_1,\ \dot{\varepsilon}_3 = \frac{d\Psi_3}{dx_1}\varepsilon_2, \end{aligned} \tag{9}$$

фазовий вектор якої $(x_1, x_2, x_3, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \Omega \subset R^5$. Наведемо основні кроки відповідної схеми стабілізації відхилень.

Введемо у розгляд знаковизначену функцію

$$V = \frac{1}{2}(\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2),$$

та запишемо її похідну взяту в силу системи (8)

$$\dot{V} = \varepsilon_2 \left( \frac{d\Psi_2}{dx_1}\varepsilon_2 + \varepsilon_3 x_1 \right) + \frac{d\Psi_3}{dx_1}\varepsilon_2\varepsilon_3 = \frac{d\Psi_2}{dx_1}{\varepsilon_2}^2 + \left( x_1 + \frac{d\Psi_3}{dx_1} \right)\varepsilon_2\varepsilon_3.$$

Виберемо функції, які залишались вільними, з наступної сім'ї функцій

$$\Psi_2(x_1) = -x_1 + C_2, \quad \Psi_3(x_1) = -\frac{x_1^2}{2} + C_3, \tag{10}$$

де $C_i,\ i = 2,3$ – довільні сталі, які далі, без обмеження загальності, вважатимемо рівними нулю. За такими функціями похідна від $V$ стає знакосталою

$$\dot{V} = -\varepsilon_2^2 \leq 0, \tag{11}$$

а рівняння (9) приймають вигляд

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = -x_2,\ \dot{x}_2 = x_3 x_1,\ \dot{x}_3 = 0, \\ &\dot{\varepsilon}_2 = -\varepsilon_2 + x_1\varepsilon_3,\ \dot{\varepsilon}_3 = -x_1\varepsilon_2, \end{aligned} \tag{12}$$

Покажемо що виконання нерівністі (11) є достатньою умовою для забезпечення асимптотичного прямування змінних $\varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t)$ до нуля. Дійсно, фазовий вектор системи: $(x_1, x_2, x_3, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \Omega \subset R^5$. При цьому константа $x_3 > 0$, точка з координатами $(x_1(t), x_2(t))$ належить еліпсу $S_x$, а значення відхилень, згідно нерівності (11), лежать всередині сфери $S_\varepsilon$ де

$$S_x = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 x_1^2 + x_2^2 = A^2\}, S_\varepsilon = \{(\varepsilon_2, \varepsilon_3) : \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 \le \varepsilon_2^2(0) + \varepsilon_3^2(0)\}.$$

Звідси випливає, що множина $\Omega = S_x \times S_\varepsilon$ є компактною і позитивно інваріантною відносно (12).

Нехай $E$ — множина всіх точок $(x_1, x_2, x_3, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \Omega$ в яких $\dot{V} = -\varepsilon_2^2 = 0$. Зрозуміло, що множина $M = \{x_1, x_2, x_3, 0, 0\}$ є інваріантною в $E$. Якщо при цьому $M$ буде найбільшою інваріантною множиною, то, за теоремою ЛаСалля, всі розв'язки з початковими значеннями в $\Omega$ будуть з часом прямувати до $M$, тобто

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon_i(t) = 0,\ i = 2, 3. \tag{13}$$

Доведемо, що $M$ є найбільшою інваріантною множиною в $E$. А саме, припустимо протилежне: $\varepsilon_2(t) = 0$ і в той же час множина $E$ містить траєкторії з ненульовим відхиленням $\varepsilon_3(t)$. Оскільки $\varepsilon_2(t) = 0$, то з виду диференціальних рівнянь (12) випливає, що таке ненульове відхилення є константою: $\varepsilon_3(t) = \varepsilon_3^*$. Отже наше припущення призводить до існування співвідношення

$$\varepsilon_3^* x_1 = A\varepsilon_3^* \sin(\omega t + \Phi) \equiv 0,$$

що не є можливим для $\varepsilon_3^* \neq 0$ (із зрозумілих причин вважаємо, що $A \neq 0$). Отримане протиріччя доводить твердження, що множина $M$ є найбільшою інваріантною множиною в $E$, а відтак, за теоремою ЛаСаля, виконано умови (13).

**5. Остаточний вигляд спостерігача.**

Таким чином зафіксовано всі ступені свободи в пропонуємому алгоритмі спостереження, а саме: структура допоміжних диференціальних рівнянь задана рівняннями (7), а вибір функцій $\Psi_i(x_1),\ i = 2, 3$ за формулами (10) формує остаточний вигляд цих рівнянь.

За такою схемою доданки $\Psi_i(x_1),\ \xi_i(t)$ в формулах (5) стають відомими величинами, а відхилення $\varepsilon_i(t)\ i = 2, 3$ асимптотично прямують до нуля. Це дозволяє безпосередньо отримати асимптотичні оцінки шуканих змінних $x_2(t), x_3$. Тим самим доведено

**Твердження.** Формули

$$\hat{x}_2(t) = -x_1(t) + \xi_2(t),\ \hat{x}_3(t) = -\frac{x_1^2(t)}{2} + \xi_3(t),$$

де $\xi_2(t), \xi_3(t)$ будь-який розв'язок задачі Коші для системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2 &= x_1(t) - \xi_2 + \left(\xi_3 - \frac{x_1^2(t)}{2}\right) x_1(t), \\ \dot{\xi}_3 &= x_1(t)(x_1(t) - \xi_2), \end{aligned} \tag{14}$$

формують асимптотичні оцінки невідомих компонент фазового вектора $x_2(t), x_3$ вихідної системи (1).

**6. Обчислювальний експеримент.**

Запропонована в роботі схема розв'язання задачі спостереження була чисельно промодельована для широкого спектру початкових умов і параметрів динамічної системи (1). Сама ця система використана для отримання виходу $x_1(t)$ за яким вирішувалась задача побудови асимптотичних оцінок $x_2(t), x_3$.

У наведених тут результатах розрахункуї початкові значення для задачі Коші наступні: $x_1(0) = 5.0$; $x_2(0) = -2.0$; $x_3(0) = 0.5$; початкові умови для змінних додаткової системи диференціальних рівнянь (14) обираються довільним чином, в даному випадку $\xi_1(0) = 1.0$; $\xi_2(0) = 10.0$.

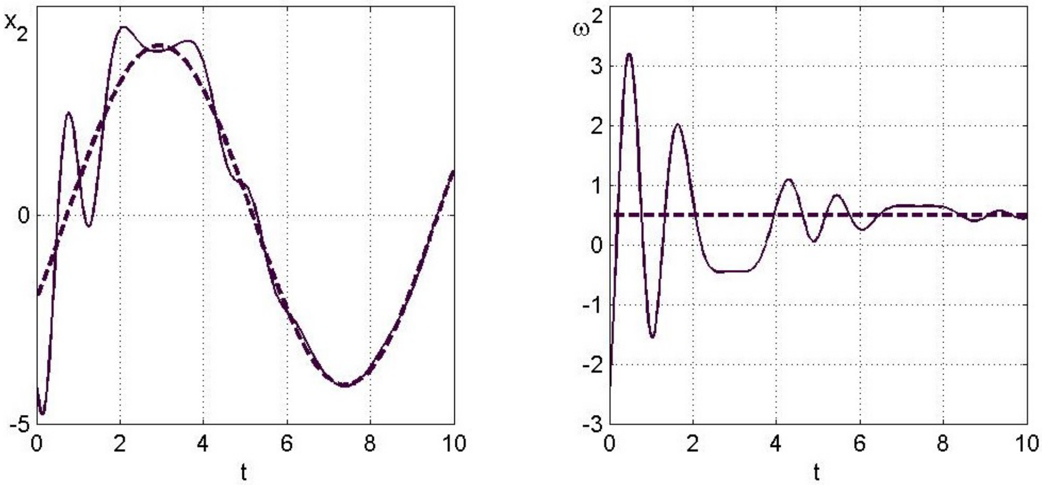


Рис. 1. Асимптотичне оцінювання змінних $x_2(t)$ та $x_3 = \omega^2$.

На рис.1 неперервною лінією зображено графіки апроксимуючих функцій

$$\hat{x}_2(t) = -x_1(t) + \xi_2(t), \quad \hat{x}_3(t) = -\frac{x_1^2(t)}{2} + \xi_3(t),$$

які, в повній відповідності до твердження 1, асимтотично прямують з часом до значень шуканих невідомих (які на графіках зображені переривчатими лініями), а саме до функції $x_2(t)$ та $x_{30} = \omega^2$. Як видно з цих графіків результати моделювання підтверджують ефективність пропонуємого способу асимптотичного оцінювання змінних стану гармонійного сигналу.

**7. Висновки.**

Розглянуто задачу спостереження стану і одночасної ідентифікації параметра, що характеризує амплітуду, частоту та фазу синусоїдального сигналу. Запропоновано метод побудови нелінійного спостерігача, який дозволяє отримувати оцінки невідомих за результатами вимірювання вихідного сигналу в реальному масштабі часу. Використовується розроблений в аналітичній механіці метод інваріантних співвідношень [8], який в задачах керування на траєкторіях руху динамічних систем дозволяє синтезувати додаткові зв'язки між відомими і невідомими величинами. Доведено асимптотичну збіжність оцінок параметрів та невідомого компоненту фазового ветора до їх справжнього значення. Отримані результати планується вдосконалити, оскільки запропонований метод за своєю суттю обмежений оцінкою однієї синусоїди. У цьому відношенні майбутні зусилля будуть спрямовані на виявлення можливого взаємозв'язку декількох елементарних осиляторів розглянутого типу для оцінки періодичних/квазіперіодичних сигналів, отриманих шляхом накладання різних гармонік. Крім того, через дуже просту структуру вихідної системи та декілька існуючих підходів, запропонованих для вирішення цієї проблеми спостереження, цілком може статися, що отриманий спостерігач є нічим іншим, як уже наявним спостерігачем/ідентифіатором (або їх варіацією), вираженим у зовсім іншій спосіб.

**Литература**


1. *Ziarani A. K., Karimi-Ghartemani M.* On the equivalence of three independently developped phase locked loops// IEEE Trans. on Aut. Cont., AC 50 N. 12. – 2005. – 2021–2027.
2. *Praly L., Isidori A., Marconi L.* A new observer for an unknown harmonic oscillator. – In: Proceedings of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Kyoto, Japan, 2006. – P. 24–28.
3. *Na J., Yang J., Wu X., Guo Y.* Robust adaptive parameter estimation of sinusoidal signals// Automatica. – 2015. – V. 53. – P. 376–384.
4. *Hou M.* Amplitude and Frequency estimator of a sinuosid// IEEE Trans. on Aut. Cont.. – 2005. – Vol. 50, n. 6. – P. 855–858.
5. *Hou M.* Parameter identification of sinusoids// IEEE Trans. Autom. Control. – 2012. – V. 57, n. 2. – P. 467–472.
6. *Беззубов В.А., Бобцов А.А.* Алгоритм идентификации параметров неизмеряемого синусоидального возмущения с нестационарной амплитудой// Мехатроника, автоматизация, управление. – 2020. – V. 21, n. 8. – P. 464–469.
7. *Chauvin J., Petit N.* Reconstruction of the Fourier expansion of inputs of linear time-varying systems// Automatica. – 2010. – V. 46, n. 2. – P. 354–361.
8. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений// Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
9. *Shcherbak V.F.* Synthesis of virtual measurements in nonlinear observation problem // PAMM. – 20004. – V. 4, Is. 1. – P. 139–140.
10. *Щербак В.Ф.* Синтез дополнительных соотношений в задаче наблюдения// Механика тведого тела. – 2004. – Т. 33. – С. 197–216.
11. *Жоголева Н.В., Щербак В.Ф.* Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления// Труды ИПММ НАН Украины. – 2015. – Т.29. – С. 69–76.

12. *Karagiannis D., Astolfi A.* Nonlinear observer design using invariant manifolds and applications// Proc. 44th IEEE Conf. Decision and Control and European Control Conference, Seville, Spain. – 2005. – P. 7775–7780.
13. *Karagiannis D., Carnevale D., Astolfi A.* Invariant manifold based reduced-order observer design for nonlinear systems// IEEE Transactions on Automatic Control. – 2008. – V. 53(11). – P. 2602–2614.
14. *Ковалев А.М., Щербак В.Ф.* Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1993. – 235 с.
15. *Khalil H.K.* Nonlinear systems. – 3rd edn. – Patience Hall, 2002. – 767 p.

**References**

1. Ziarani, A.K., Karimi-Ghartemani, M. (2005). On the equivalence of three independently developped phase locked loops. *IEEE Trans. on Aut. Cont., AC 50 N. 12*, 2021–2027.
2. Praly, L., Isidori, A., Marconi, L. (2006). A new observer for an unknown harmonic oscillator. *Proceedings of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Kyoto, Japan*, 24–28.
3. Na, J., Yang, J., Wu, X., Guo, Y. (2015). Robust adaptive parameter estimation of sinusoidal signals. *Automatica, 53*, 376–384.
4. Hou, M. (2005). Amplitude and Frequency estimator of a sinuosid. *IEEE Trans. on Aut. Cont., 50*(6), 855–858.
5. Hou, M. (2012). Parameter identification of sinusoids. *IEEE Trans. Autom. Control, 57*(2), 467–472.
6. Bezzubov, V.A., Bobtsov, A.A. (2020). Algoritm identifikatsii parametrov neizmeryayemogo sinusoidal'nogo vozmushcheniya s nestatsionarnoy amplitudoy. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravleniye, 21*(8), 464–469.
7. Chauvin, J., Petit, N. (2010). Reconstruction of the Fourier expansion of inputs of linear time-varying systems. *Automatica, 46*(2), 354–361.
8. Kharlamov, P.V. (1974). Ob invariantnykh sootnosheniyakh sistemy differentsial'nykh uravneniy. *Mekhanika tverdogo tela, 6*, 15–24.
9. Shcherbak, V.F. (2004). Synthesis of virtual measurements in nonlinear observation problem. *PAMM., 4*(1), 139–140.
10. Shcherbak, V.F. (2004). Sintez dopolnitel'nykh sootnosheniy v zadache nablyudeniya. *Mekhanika tvedogo tela, 33*, 197–216.
11. Zhogoleva, N.V., Shcherbak, V.F. (2015). Sintez dopolnitelnyh sootnosheniy v obratnyh zadachah upravleniya.*Trudy IPMM NAN Ukrainy, 29*, 69–76.
12. Karagiannis, D., Astolfi, A. (2005). Nonlinear observer design using invariant manifolds and applications. *Proc. 44th IEEE Conf. Decision and Control and European Control Conference, Seville, Spain*, pp. 7775–7780.
13. Karagiannis, D., Carnevale, D., Astolfi, A. (2008). Invariant manifold based reduced-order observer design for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control, 53*(11), 2602–2614.
14. Kovalev, A.M., Shcherbak, V.F. (1993). *Upravlyayemost', nablyudayemost', identifitsiruyemost' dinamicheskikh sistem.* Kiev: Nauk. dumka (in Russian).
15. Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear systems.* 3rd edn. Patience Hall.

**V.F. Shcherbak**

**Observer of harmonic oscillator parameters.**

This paper deals with the problem of asymptotically estimating amplitude, frequency and phase of a sinusoidal signal by adopting the theory of invariant relations proposed in analytical mechanics [8] and further investigated in [9], [10] (see also [11]). The problem of frequency, amplitude and phase estimation of a sinusoidal signal has attracted a remarkable research attention in the past and current literature. The reasons of this interest rely on several engineering applications where an effective and robust solution to this problem is crucial. To mention few, it is worth mentioning problems of harmonic disturbance compensation in automatic control, design of phase-looked loop circuits in telecommunication, adaptive filtering in signal processing, etc. In principle, the method of least squares, Fourier analysis, Laplace transform provide a potential solution to the corresponding problems. However, these methods may not be suitable, for example, for control algorithms with real-time data processing. The goal of this paper is to suggest a further contribution to this task by showing how to solve the problem at hand through the observer's theory. The method of invariant relations is used for the asymptotically observation scheme design. This aproach is based on dynamical extension of original system and construct of appropriate invariant relations, from which the unknowns variables can be expressed as a functions of the known quantities on the trajectories of extended system. The final synthesis is carried out from the condition of obtaining asymptotic estimates of unknown parameters. It is shown that an asymptotic estimate of the unknown states can be obtained by rendering attractive an appropriately selected invariant manifold in the extended state space. The asymptotic convergence of the estimates of the sought phase vector components to their true value is proved. The simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed method of solving the state observation problem of the harmonic oscillator. It should be noted that a more general approach, which forms an appropriate method for solving observation problems for nonlinear dynamical systems due to the synthesis of invariant manifold, was proposed as a modification of the I&I method (Input and Invariance) of stabilization of nonlinear systems in [12, 13].

***Keywords:*** *sinusoidal signal,nonlinear observer, invariant relations.*

*Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ*
scherbakv54@gmail.com

*Отримано 22.07.22*