

УДК 62-50,519.7

DOI: 10.37069/1683-4720-2023-37-2

©2023. Н.В. Жоголева, В.Ф. Щербак

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ЗОВНІШНЬОЇ ГАРМОНІЙНОЇ СИЛИ

Розглядається задача визначення зовнішньої сили, яка задана гармонійною функцією часу і діє на нелінійну автоколивальну систему загального виду (осцилятор Лієнара). Запропоновано схему асимптотичного оцінювання повного фазового вектору та невідомих параметрів зовнішнього навантаження за даними про переміщення осцилятора. Методика базується на методі синтезу інваріантних співвідношень, який дозволяє знаходити залежності між змінними побудованої спеціальним чином розширеної динамічної системи та визначати шукані невідомі як функції від відомих величин. Наведено результати числового моделювання пропонуємого способу визначення стану та параметрів зовнішньої сили для моделі математичного маятника.

MSC: 34C15, 34D20.

Ключові слова: *вимушені коливання, нелінійний спостерігач, асимптотичне оцінювання, інваріантні співвідношення.*

1. Вступ.

Проблема оцінювання частоти, амплітуди та фази гармонійної сили, яка діє на механічну систему знаходить відображення у достатній кількості публікацій як у минулі так і в сучасні часи. Причина такого інтересу полягає в використанні відповідних методик в різних теоретичних та інженерних дисциплінах, наприклад, у обертових механічних процесах, для механічних систем перетворення кінетичної енергії коливань, в задачах віброізоляції періодичних складових шуму через обертові механізми, для компенсації гармонійних збурень в алгоритмах автоматичного керування, у адаптивній фільтрації при обробці сигналів тощо. В принципі, метод найменших квадратів, Фур'є аналіз, перетворення Лапласа дають потенційний розв'язок відповідних задач. Однак ці методи можуть не підходити, наприклад, для алгоритмів керування з обробкою даних в реальному часі.

Незважаючи на відносну простоту задачі визначення частоти, амплітуди та фази "чистої синусоїди" підходи до їх розв'язання використовують досить складний апарат сучасних методів прикладної математики. Алгоритм нелінійного представлення синусоїдального сигналу з подальшим застосуванням нелінійного спостерігача Луєнбергера розглянуто у статті [14], де на базі загальної теорії нелінійного спостереження автори будують досить складну конструкцію відповідного спостерігача. В роботі [12] після представлення синусоїдального сигналу як лінійно параметризованої форми розроблено кілька адаптивних законів в яких, з використанням апарату теорії ковзного режиму керування, отримано оцінки параметрів синусоїди. Для мультисинусоїдального сигналу в [7] побудовано оцінювач з використанням стандартного градієнтного алгоритму. Задача ідентифікації невідомої

частоти синусоїдального збурення, яке діє на лінійне диференціальне рівняння першого порядку розв'язується в роботі [1]. Слід зазначити роботи [6, 16] в яких також представлено підхід, заснований на побудові спостерігача станів, але вже для визначення параметрів періодичної сили, яка діє на лінійний осцилятор. На першому етапі оцінюються коефіцієнти відрізка ряду Фур'є, який наближає періодичну силу з відомою частотою. На другому етапі пропонується за результатами першого етапу побудувати спостерігач вже для невідомої частоти.

В пропонуємій роботі невідома гармонійна сила, яка діє на нелінійний осцилятор, задається формулою $u(t) = a_1 + a_2 \cos \omega t + a_3 \sin \omega t$. Передбачається, що частота сили ω та параметри моделі осцилятора є відомими. Потрібно знайти швидкість коливань та коефіцієнти a_i , $i = \overline{1, 3}$ за даними про переміщення осцилятора.

З точки зору теорії керування виникає задача спостереження та ідентифікації, яка полягає у визначенні невідомих вихідної системи за даними виходу – відомої інформації про рух. Можливість розв'язання задачі спостереження та ідентифікації істотно залежить від аналітичної структури правих частин рівнянь динаміки та доступної інформації [3]. Для розв'язку цих задач в роботі використано метод інваріантних співвідношень [4], який було розроблено в аналітичній механіці та призначено, зокрема, для пошуку частинних розв'язків (залежностей між змінними) в задачах динаміки твердого тіла з нерухомою точкою. Модифікація цього методу до проблем теорії спостереження дозволила синтезувати між відомими і невідомими величинами вихідної системи додаткові зв'язки, що виникають в процесі руху її розширеної моделі [2, 5]. Варто зазначити, що більш загальний підхід, ніж метод інваріантних співвідношень, який формує метод розв'язку задач спостереження для нелінійних динамічних систем завдяки синтезу інваріантного многовиду в просторі розширеної системи, було запропоновано в роботах [8, 9] як певну модифікацію методу стабілізації нелінійних систем *I&I* (Input and Invariance).

Метою даної роботи є поширення методу синтезу інваріантних співвідношень на задачі спостереження та ідентифікації параметрів нелінійних осциляторів. Розроблено відповідну методику оцінювання та доведено асимптотичну збіжність оцінок невідомих до їхнього справжнього значення. Представлено результати числового моделювання процесу спостереження та ідентифікації для моделі математичного маятника.

2. Задача ідентифікації зовнішньої гармонійної сили.

В якості моделі механічної системи, на яку діє зовнішня сила, будемо розглядати рівняння вимушеного руху осцилятора Лієнара – диференціальне рівняння другого порядку, яке моделює коливання матеріальної точки

$$\ddot{x}(t) + f(x(t))\dot{x}(t) + g(x(t)) = u(t). \quad (1)$$

Тут $x(t)$ – відхилення точки від початку координат в момент t , $\dot{x}(t)$ – швидкість відхилення, множник $f(x(t))$ характеризує закон дисипації, а функція $g(x(t))$ – потенціальні сили. Зовнішній вплив на осцилятор задається гармонійною функцією часу $u(t) = a_1 + a_2 \cos \omega t + a_3 \sin \omega t$, період якої будемо вважати відомим.

Зауваження. Багато питань щодо стійкості, обмеженості коливань, існування періодичних розв’язків у рівнянні (1), наявності граничних циклів тощо є предметом досліджень в останні десятиріччя. Не розглядаючи ті чи інші якісні властивості рівняння Лієнара, далі нам буде достатньо припущення, що це рівняння з даними параметрами моделює процес перманентних коливань реального об’єкту, отже його розв’язок – функції $x(t)$, $\dot{x}(t)$ коректно визначені на $[0, \infty)$ та є обмеженими функціями часу.

Перепишемо вихідне рівняння (1) у формі системи в просторі станів, зробивши попередньо заміну змінних Лієнара: $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \dot{x}(t) + F(x(t))$, де $F(x(t)) = \int_0^x f(\sigma) d\sigma$. В результаті маємо систему

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) - F(x_1(t)), \quad \dot{x}_2(t) = -g(x_1(t)) + u(t). \quad (2)$$

Далі будемо вважати, що значення змінної $x_1(t)$ системи (2) вимірюються в процесі коливань осцилятора, тобто переміщення осцилятора є відомою функцією часу. Заміна Лієнара залежить від невідомої швидкості $\dot{x}(t)$, яку можемо знайти за формулою $\dot{x}(t) = x_2(t) - F(x(t))$ після визначення $x_2(t)$.

Таким чином задача спостереження та ідентифікації буде розглянута для системи (2) і полягатиме у визначенні $x_2(t)$ та сталих коефіцієнтів a_i , $i = \overline{1,3}$ за інформацією про рух осцилятора. Такою інформацією є $x_1(t)$, а також значення додаткових змінних $\xi(t) = (\chi(t), \xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))^T$, які будуть отримані з використанням значень виходу як розв’язок задачі Коші для поки що невизначеної системи диференціальних рівнянь

$$\dot{\xi} = U(t, \xi, x_1(t)), \quad \xi(0) = \xi_0 \in R^4. \quad (3)$$

Розмірність цієї системи збігається з числом шуканих невідомих, на її праву частину $U(t, \xi, x_1)$ поки що накладено єдине обмеження, а саме: ці функції повинні задовольняти достатнім умовам теореми існування розв’язків для $t \in [0, \infty)$.

Ідея методу синтезу інваріантних співвідношень [2], який далі буде використано для спостереження і параметричної ідентифікації, полягає в формуванні додаткових зв’язків між “відомими” величинами $x_1(t)$, $\xi(t)$ та невідомими вихідної системи: $x_2(t)$ і сталими a_i , $i = \overline{1,3}$, які виникають на деяких траєкторіях розширеної системи диференціальних рівнянь (2), (3). Далі за цим методом буде розглянута

Задача. Знайти асимптотично точні оцінки компоненти фазового вектора $x_2(t)$ та коефіцієнтів силового навантаження a_1, a_2, a_3 за даними про вихід $x_1(t)$ системи диференціальних рівнянь (2).

3. Побудова інваріантних співвідношень.

Будемо шукати додаткові співвідношення на траєкторіях розширеної системи диференціальних рівнянь (2), (3) у вигляді

$$x_2 = \Phi(t, x_1) + \chi, \quad a_i = \Psi_i(t, x_1) + \xi_i, \quad i = \overline{1,3}. \quad (4)$$

Як і права частина $U(t, \xi, x_1)$ системи диференціальних рівнянь (3), функції $\Phi(t, x_1), \Psi_i(t, x_1), i = \overline{1, 3}$ поки що невизначені, але передбачається, що вони є неперервно диференційованими функціями своїх аргументів. Введемо у розгляд відхилення $e = (\delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)^T$ від співвідношень (4), зробивши у вихідних рівняннях заміну невідомих за формулами

$$\delta = x_2 - \Phi(t, x_1) - \chi, \quad \varepsilon_i = a_i - \Psi_i(t, x_1) - \xi_i, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (5)$$

Якщо буде встановлено, що при зафіксованих тим чи іншим чином функціях $U(t, \xi, x_1), \Phi(t, x_1), \Psi_i(t, x_1)$ на деяких траєкторіях розширеної системи диференціальних рівнянь (2), (3) має місце тотожність $\|e(t)\| \equiv 0$, то саме на цих траєкторіях і для таких функцій рівності (4) стають інваріантними співвідношеннями для цієї системи, а відтак безпосередньо визначають значення шуканих невідомих $x_2(t), a_i, i = \overline{1, 3}$. На інших траєкторіях з'являються ненульові доданки $\delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

З урахуванням заміни (5) вихідні рівняння $\dot{x}_2$ та $\dot{a}_i = 0$ перетворюються в диференціальні співвідношення (тут $(\cdot)'_q$ означає частинну похідну $\frac{\partial(\cdot)}{\partial q}$)

$$\dot{\chi} + \dot{\delta} = -g(x_1) + \hat{u} - \Phi'_t - \Phi'_{x_1} \hat{v}, \quad \dot{\xi}_i + \dot{\varepsilon}_i = -\Psi'_{it} - \Psi'_{ix_1} \hat{v}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (6)$$

де $\hat{u} = \Psi_1 + \xi_1 + \varepsilon_1 + (\Psi_2 + \xi_2 + \varepsilon_2) \cos \omega t + (\Psi_3 + \xi_3 + \varepsilon_3) \sin \omega t$; $\hat{v} = \Phi - F + \chi + \delta$.

На першому етапі запропонованої схеми визначимо структуру допоміжної системи диференціальних рівнянь відносно $\chi(t), \xi_i(t), i = \overline{1, 3}$. Для цього виберемо з попередніх рівностей усі незалежні від відхилень члени і далі будемо вважати, що

$$\dot{\chi} = -g(x_1) + \tilde{u} - \Phi'_t - \Phi'_{x_1} \tilde{v}, \quad \dot{\xi}_i = -\Psi'_{it} - \Psi'_{ix_1} \tilde{v}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (7)$$

де $\tilde{u} = \Psi_1 + \xi_1 + (\Psi_2 + \xi_2) \cos \omega t + (\Psi_3 + \xi_3) \sin \omega t$, $\tilde{v} = \Phi - F + \chi$.

За таким вибором маємо, що в разі $\chi(t), \xi_i(t), i = \overline{1, 3}$ задовольняють (7), то доданки, які залишилися в співвідношеннях (6) утворюють лінійні однорідні рівняння відносно відхилень

$$\dot{\delta} = -\Phi'_{x_1} \delta + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos \omega t + \varepsilon_3 \sin \omega t, \quad \dot{\varepsilon}_i = -\Psi'_{ix_1} \delta, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (8)$$

які допускають тривіальний розв'язок $\delta(t) = \varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = \varepsilon_3(t) \equiv 0$.

Таким чином отримано сім'ю додаткових систем (7), залежну від поки що вільних функцій $\Phi(t, x_1), \Psi_i(t, x_1), i = \overline{1, 3}$ та їхніх похідних, кожна з яких, разом з вихідною системою (2), перетворюють на деяких своїх траєкторіях рівності (4) в інваріантні співвідношення, за якими безпосередньо можуть бути знайдені шукані невідомі $x_2(t), a_1, a_2, a_3$.

4. Стабілізації відхилень.

Оскільки невідомо саме на яких траєкторіях системи (2), (7) рівності (4) стають інваріантними, то природньо виникає питання про вибір вільних функцій $\Phi(t, x_1), \Psi_i(t, x_1), i = \overline{1, 3}$ таким чином, щоб відхилення від цих рівностей – доданки $\delta(t), \varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t)$ прямували до нуля, тобто тривіальний розв'язок диференціальних рівнянь (8) мав би властивість глобальної асимптотичної стійкості. В цьому випадку формули (4) формуватимуть якщо не точні, то принаймні

асимптотично точні оцінки шуканих невідомих. Саме тому стабілізація нульового розв'язку рівнянь у відхиленнях становить мету другого етапу запропонованої методики.

Існує декілька підходів до розв'язання проблеми стабілізації неавтономних систем диференціальних рівнянь. Тому, в загальному випадку, дослідження на цьому етапі передбачають, що вибір вільних функцій і відповідного методу здійснюється для кожної конкретної динамічної системи окремо, в залежності від аналітичного виду $f(x_1), g(x_1), u(t)$. Для нашої задачі скористаємося однією із існуючих методів стабілізації лінійних неавтономних систем, а саме: методом стабілізації, який розроблено в задачах адаптивної ідентифікації та керування [13].

Позначимо $v(x_1, t) = \Phi'_{x_1}(t, x_1)$, $u_i(x_1, t) = \Psi'_{i x_1}(t, x_1)$, $i = \overline{1, 3}$ і будемо розглядати ці частинні похідні в рівняннях (8) як керування. Для синтезу цих керувань з умов глобальної асимптотичної стійкості тривіального розв'язку рівнянь у відхиленнях введемо у розгляд знаковизначену функцію $V = \frac{1}{2}e^T e = \frac{1}{2}(\delta^2 + \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i^2)$ та запишемо її похідну в силу системи (8)

$$\dot{V} = -\delta[v\delta + (1 - u_1)\varepsilon_1 + (\cos \omega t - u_2)\varepsilon_2 + (\sin \omega t - u_3)\varepsilon_3].$$

Нехай $v = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = \cos \omega t$, $u_3 = \sin \omega t$. За таких керувань похідна $\dot{V} = -\delta^2 \leq 0$. Тобто для рівнянь у відхиленнях функція V стає функцією Ляпунова з негативно напіввизначеною похідною. В цьому випадку нульовий розв'язок системи (8) є рівномірно стійким, $\delta(t)^2 + \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i(t)^2 \leq \delta(t_0)^2 + \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i(t_0)^2$, крім того $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = 0$.

При цьому функції, які поки залишались вільними, з точністю до адитивних констант, приймають вигляд:

$$\Phi(t, x_1) = x_1, \quad \Psi_1(t, x_1) = x_1, \quad \Psi_2(t, x_1) = x_1 \cos \omega t, \quad \Psi_3(t, x_1) = x_1 \sin \omega t. \quad (9)$$

В підсумку отримуємо, що рівняння у відхиленнях стають системою однорідних лінійних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & W^T \\ -W & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (10)$$

де $W(t) = (1, \cos \omega t, \sin \omega t)^T$.

Для дослідження властивості асимптотичної стійкості її тривіального розв'язку розглянемо теорему ЛаСалля [10] для неавтономних систем диференціальних рівнянь з періодичною правою частиною $\dot{x} = f(t, x)$, $f(t, x) = f(t + T, x)$.

Теорема. [10] *Нехай $V(t, x)$ – дійснозначна функція з неперервними першими частинними похідними для всіх (t, x) . Припустимо, що*

a) $V(t, x) = V(t, t + T, x) \geq 0$ для всіх (t, x) ;

b) $\dot{V}(t, x) = \partial V / \partial t + \partial V / \partial x \cdot f(t, x) \leq 0$ для всіх (t, x) .

Нехай E - множина всіх (t_0, x_0) , така, що $\dot{V}(t_0, x_0) = 0$. Нехай M - об'єднання по всіх (t_0, x_0) , всіх траєкторій $x(t, t_0, x_0)$ з властивістю, що $(t, x(t, t_0, x_0))$ знаходиться в E для всіх t . Тоді всі обмежені розв'язки $x(t, t_0, x_0)$ прямують до M при $t \rightarrow \infty$.

Використовуючи теорему ЛаСалля, множина E у цьому випадку відповідає многовиду $\delta = 0$ і всі розв'язки (10) прямують до M при $t \rightarrow \infty$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\varepsilon}(t) = - \lim_{t \rightarrow \infty} W(t) \delta(t) = 0.$$

Так як $\varepsilon(t), W(t)$ обмежені, то точка $(0, \varepsilon) \in E$ є особливою точкою системи диференціальних рівнянь (10): $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \varepsilon^* - \text{const}$.

Розглядаючи траєкторії системи вздовж $\dot{V} = 0$ або $\delta = 0$ з рівнянь (10) маємо $W^T \varepsilon^* \equiv 0$, або в координатній формі

$$\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* \cos \omega t + \varepsilon_3^* \sin \omega t \equiv 0. \quad (11)$$

Оскільки компоненти вектора $W(t) : \{1, \cos \omega t, \sin \omega t\}$ лінійно незалежні функції, то з (11) витікає, що $\varepsilon(t) \equiv 0$.

Система (10) має періодичну праву частину, $W(t) = W(t + T)$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Отже, ми можемо застосувати теорему ЛаСалля. Оскільки $\delta \equiv 0 \Rightarrow \varepsilon = 0$ і множина M містить тільки початок координат, то тривіальний розв'язок системи (10) є рівномірно асимптотично стійким.

5. Остаточний вигляд спостерігача та ідентифікатора.

Запишемо остаточний вид додаткової ситеми (7), підставивши значення функцій $\Phi(t, x_1), \Psi_i(t, x_1), i = \overline{1, 3}$. Маємо

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= -g(x_1) + \tilde{u} - \tilde{v}, \quad \dot{\xi}_1 = -\tilde{v}, \\ \dot{\xi}_2 &= x_1 \omega \sin \omega t - \tilde{v} \cos \omega t, \quad \dot{\xi}_3 = -x_1 \omega \cos \omega t - \tilde{v} \sin \omega t, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\tilde{u} = x_1 + \xi_1 + (x_1 \cos \omega t + \xi_2) \cos \omega t + (x_1 \sin \omega t + \xi_3) \sin \omega t, \quad \tilde{v} = (1 - \alpha_1)x_1 + \chi.$$

Таким чином, всі ступені свободи запропонованої методики зафіксовано. В результаті маємо:

- 1) відхилення $\delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ в формулах (5) асимптотично прямують до нуля;
- 2) функції $\Phi(t, x_1), \Psi_i(t, x_1), i = \overline{1, 3}$ визначено формулами (9);
- 3) доданки $\chi(t), \xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)$ знаходимо, як розв'язок задачі Коші з довільними початковими умовами для системи (12).

Все це дозволяє безпосередньо отримати асимптотичні оцінки шуканих невідомих за формулами (5). Тим самим доведено

Твердження. Формули

$$\hat{x}_2 = x_1(t) + \chi(t), \quad \hat{a}_1 = x_1(t) + \xi_1(t), \quad \hat{a}_2 = x_1(t) \cos \omega t + \xi_2(t), \quad \hat{a}_3 = x_1(t) \sin \omega t + \xi_3(t),$$

де функції $\chi(t), \xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)$ задовольняють системі диференціальних рівнянь (12), формують асимптотичні оцінки змінної $x_2(t)$ та параметрів a_1, a_2, a_3 вихідної системи диференціальних рівнянь (2).

6. Обчислювальний експеримент. Математичний маятник.

Модель математичного маятника – це фізична модель коливальної системи, яка складається з матеріальної точки, підвішеної на невагомій і нерозтяжній нитці. Рівняння вимушених коливань мають вигляд

$$\ddot{x}(t) + \alpha_1 \dot{x}(t) + \alpha_2 \sin(x(t)) = u(t). \quad (13)$$

Тут $x(t)$ – відхилення маятника від вертикалі, α_1, α_2 – коефіцієнти, які характеризують відповідно явище дисипації та масово-гравітаційну характеристику маятника, $u(t) = a_1 + a_2 \cos \omega t + a_3 \sin \omega t$ – зовнішня спонукальна (змушуюча) сила. Як і в загальному випадку будемо вважати, що при вибраних параметрах рівняння (13) його розв'язок коректно визначено на $[0, \infty)$.

Перепишемо це рівняння у формі системи в просторі станів, зробивши заміну змінних Лієнара. Маємо

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - \alpha_1 x_1, \\ \dot{x}_2 &= -\alpha_2 \sin x_1 + a_1 + a_2 \cos \omega t + a_3 \sin \omega t. \end{aligned} \quad (14)$$

Крім задачі ідентифікації коефіцієнтів a_1, a_2, a_3 розглянемо задачу визначення швидкості коливань математичного маятника, яка, з урахуванням заміни змінних Лієнара, обчислюється за формулою $\dot{x}(t) = x_2(t) - \alpha_1 x_1(t)$.

В якості моделі реального маятника використовуємо результати числового інтегрування системи (14), вважаючи далі відомим вихід $x_1(t)$, за яким розв'язується задача побудови асимптотичних оцінок невідомих $x_2(t) - \alpha_1 x_1(t), a_1, a_2, a_3$. У наведених тут результатах розрахунку параметри цієї системи наступні:

$$\alpha_1 = 1.5, \alpha_2 = 0.5, \omega = 1.5, a_1 = -0.5, a_2 = -1.0, a_3 = 1.0.$$

Початкові умови для відповідної задачі Коші: $x(0) = (-0.5; 0.0)$; початкові умови для змінних додаткової системи диференціальних рівнянь обираються довільним чином, в даному випадку $\xi(0) = (-2.0; -0.5; 2.0; -2.0)$. Сама додаткова система для математичного маятника має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= -\chi + \alpha_1 x_1 - \alpha_2 \sin x_1 + \xi_1 + (x_1 \cos \omega t + \xi_2) \cos \omega t + (x_1 \sin \omega t + \xi_3) \sin \omega t, \\ \dot{\xi}_1 &= (\alpha_1 - 1)x_1 - \chi, \\ \dot{\xi}_2 &= -\cos \omega t[(1 - \alpha_1)x_1 + \chi] + \omega x_1 \sin \omega t, \\ \dot{\xi}_3 &= -\sin \omega t[(1 - \alpha_1)x_1 + \chi] - \omega x_1 \cos \omega t. \end{aligned}$$

На рис.1 штриховими лініями зображено графіки справжніх значень шуканих невідомих: $\dot{x}(t) = x_2(t) - \alpha_1 x_1(t), a_1, a_2, a_3$, а суцільними лініями графіки їх апроксимацій $\hat{\dot{x}}(t), \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$, обчислених за формулами

$$\begin{aligned} \hat{\dot{x}}(t) &= \hat{x}_2 - \alpha_1 x_1(t), \quad \hat{x}_2 = x_1(t) + \chi(t), \quad \hat{a}_1 = x_1(t) + \xi_1(t), \\ \hat{a}_2 &= x_1(t) \cos \omega t + \xi_2(t), \quad \hat{a}_3 = x_1(t) \sin \omega t + \xi_3(t). \end{aligned}$$

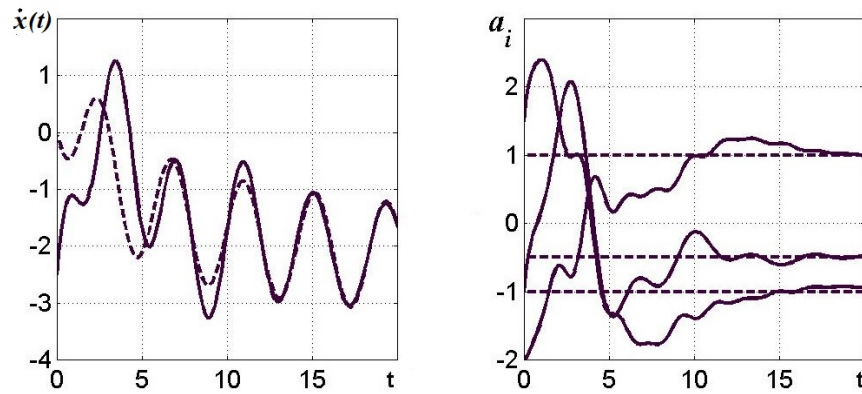


Рис. 1. Оцінювання швидкості $\dot{x}(t)$ та параметрів $a_i, i = 1, 2, 3$ маятника

Як видно з цього рисунку графіки апроксимацій в повній відповідності до Твердження асимптотично прямують з часом до справжніх значень шуканих невідомих. Результати моделювання при цих та багатьох інших варіантах параметрів для вихідної системи та зовнішнього навантаження підтверджують ефективність методу інваріантних співвідношень в задачах асимптотичного оцінювання невідомих компонент математичних моделей динамічних систем.

7. Висновки.

Розглянуто задачу спостереження та ідентифікації сталих параметрів, які визначають дію гармонійної зовнішньої сили з відомою частотою на автоколивальну систему загального виду (осцилятор Лієнара). Запропоновано новий метод побудови нелінійного спостерігача та ідентифікатора, які дозволяють отримувати оцінки невідомих за результатами вимірювання вихідного сигналу (переміщення осцилятора) в реальному масштабі часу. Використовується розроблений в аналітичній механіці метод інваріантних співвідношень [4], який в задачах керування на траєкторіях руху динамічних систем дозволяє синтезувати додаткові зв'язки між відомими і невідомими величинами [2]. Доведено асимптотичну збіжність оцінок швидкості коливань та коефіцієнтів зовнішнього впливу до їх справжніх значень. Представлено результати числового моделювання процесу спостереження та ідентифікації для моделі математичного маятника. Результати моделювання підтверджують ефективність методу інваріантних співвідношень в задачах асимптотичного оцінювання невідомих компонент математичних моделей динамічних систем.

Цитована література

1. Беззубов В.А., Бобцов А.А. Алгоритм идентификации параметров неизмеряемого синусоидального возмущения с нестационарной амплитудой // Мехатроника, автоматизация, управ-

- ление. – 2020. – Vol. 21, no. 8. – P. 464–469.
2. Жоголева Н.В., Щербак В.Ф. Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления // Труды ИПММ НАН Украины. – 2015. – Т. 29. – С. 69–76.
3. Ковалев А.М., Щербак В.Ф. Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1993. – 235 с.
4. Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
5. Щербак В.Ф. Синтез дополнительных соотношений в задаче наблюдения // Механика твердого тела. – 2004. – Т. 33. – С. 197–216.
6. Chauvin J., Petit N. Reconstruction of the Fourier expansion of inputs of linear time-varying systems // Automatica. – 2010. Vol. 46, no. 2. – P. 354–361.
7. Hou M. Parameter identification of sinusoids // IEEE Trans. Autom. Control. – 2012. – Vol. 57, no. 2. – P. 467–472.
8. Karagiannis, D., Astolfi, A. Nonlinear observer design using invariant manifolds and applications // Proc. 44th IEEE Conf. Decision and Control and European Control Conference, Seville, Spain. – 2005. – P. 7775–7780.
9. Karagiannis D., Carnevale D., Astolfi A. Invariant manifold based reduced-order observer design for nonlinear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2008. – Vol. 53, no. 11. – P. 2602–2614.
10. LaSalle P. Asymptotic stability criteria // Proc. Symposium Applied Mathematics. – 1962. – Vol. 13. Hydrodynamics Instability. – P. 299–307.
11. Loria A., Kelly R., Teel A.R. Uniform parametric convergence in the adaptive control of mechanical systems // European Journal of Control. – 2005. – Vol. 11, no. 2. – P. 87–100.
12. Na J., Yang J., Wu X., Guo Y. Robust adaptive parameter estimation of sinusoidal signals // Automatica. – 2015. – Vol. 53. – P. 376–384.
13. Narendra K. S., Kudva P. Stable adaptive schemes for system identification and control // Parts I and II, IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics, SMC-4. – 1974, – P. 542–560.
14. Praly L., Isidori A., Marconi L. A new observer for an unknown harmonic oscillator // Proceedings of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Kyoto, Japan. – 2006. – P. 24–28.
15. Shcherbak V.F. Synthesis of virtual measurements in nonlinear observation problem // PAMM. – 2004. – V. 4, Is. 1. – P. 139–140.
16. Torres L., Gomez-Aguilar J.F., Jimenez J., Mendoza E., Lopez-Estrada F.R., Escobar-Jimenez R.F. Parameter identification of periodical signals: Application to measurement and analysis of ocean wave forces // Digital Signal Processing. – 2017. – Vol. 69. – P 59–69.

References

1. Bezzubov, V.A., Bobtsov, A.A. (2020). Algoritm identifikatsii parametrov neizmeryayemogo sinusoidal'nogo vozmushcheniya s nestatsionarnoy amplitudoy. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravleniye*, 21(8), 464–469 (in Russian).
2. Zhogoleva, N.V., Shcherbak, V.F. (2015). Sintez dopolnitel'nykh sootnosheniy v obratnykh zadachakh upravleniya. *Trudy IPMM NAN Ukrainy*, 29, 69–76 (in Russian).
3. Kovalev, A.M., Shcherbak, V.F. (1993). *Upravlyayemost', nablyudayemost', identifikatsionnaya sposobnost' dinamicheskikh sistem*. Kiyev: Nauk. dumka (in Russian).
4. Kharlamov, P.V. (1974). Ob invariantnykh sootnosheniyakh sistemy differentsial'nykh uravneniy. *Mekhanika tverdogo tela, vyp. 6*, 15–24 (in Russian).
5. Shcherbak, V.F. (2004). Sintez dopolnitel'nykh sootnosheniy v zadache nablyudeniya. *Mekhanika tverdogo tela*, 33, 197–216 (in Russian).
6. Chauvin, J., Petit, N. (2010). Reconstruction of the Fourier expansion of inputs of linear time-varying systems. *Automatica*, 46(2), 354–361.
7. Hou, M. (2012). Parameter identification of sinusoids. *IEEE Trans. Autom. Control*, 57(2), 467–472.

8. Karagiannis, D., Astolfi, A. (2005). Nonlinear observer design using invariant manifolds and applications. *Proc. 44th IEEE Conf. Decision and Control and European Control Conference, Seville, Spain*, 7775–7780.
9. Karagiannis, D., Carnevale, D., Astolfi, A. (2008). Invariant manifold based reduced-order observer design for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(11), 2602–2614.
10. LaSalle, P. (1962). Asymptotic stability criteria. *Symposium Applied Mathematics. Vol. 13. Hydrodynamics Instability. Amer. Math. Soc.*, 299–307.
11. Loria, A., Kelly, R., Teel, A.R. (2005). Uniform parametric convergence in the adaptive control of mechanical systems. *European Journal of Control*, 11(2), 87–100.
12. Na, J., Yang, J., Wu, X., Guo, Y. (2015). Robust adaptive parameter estimation of sinusoidal signals. *Automatica*, 53, 376–384.
13. Narendra, K. S., Kudva, P. (1974). Stable adaptive schemes for system identification and control, Parts I and II. *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics, SMC-4*, 542–560.
14. Praly L., Isidori A., Marconi L. (2006). A new observer for an unknown harmonic oscillator. *Proceedings of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Kyoto, Japan*, 24–28.
15. Shcherbak, V.F. (2004). Synthesis of virtual measurements in nonlinear observation problem. *PAMM.*, 4(1), 139–140.
16. Torres, L., Gomez-Aguilar, J.F., Jimenez, J., Mendoza, E., Lopez-Estrada, F.R., Escobar-Jimenez, R.F. (2017). Parameter identification of periodical signals: Application to measurement and analysis of ocean wave forces. *Digital Signal Processing*, 69, 59–69.

N.V. Zhogoleva, V.F. Shcherbak

Identification of external harmonic force parameters.

The problem of determining the external force, which is given by the harmonic function of time and acts on a self-oscillating system of general type (Lienard oscillator) is considered. A general method of asymptotic estimation of oscillator velocity and force unknown parameters is proposed. Such problems of estimating the frequency, amplitude, and phase of an external force acting on a mechanical system are reflected in a sufficient number of publications both in past and present times. The reason for this interest lies in the use of appropriate techniques in various theoretical and engineering disciplines, for example, for mechanical systems for converting the kinetic energy of vibrations, in the problems of vibration isolation of periodic components of noise through rotating mechanisms, to compensate for harmonic disturbances in automatic control algorithms, in adaptive filtering during signal processing, and so on. In principle, the least squares method, Fourier analysis, and Laplace Transform provide a potential solution to the corresponding problems. However, these methods may not be suitable, for example, for control algorithms with real-time data processing. Despite the relative simplicity of the problem of determining the frequency, amplitude and phase of vibrations, approaches to solving them use a rather complex apparatus of modern methods of Applied Mathematics. The aim of this paper is to extend the method of synthesis of invariant relations to the problem of determining the parameters of external influence on a mechanical system. To obtain asymptotic estimates of the coefficients of external force, the method of invariant relations developed in analytical mechanics is used. Method was intended, in particular, to search for partial solutions (dependencies between variables) in problems of dynamics of rigid body with a fixed point. Modification of this method to the problems of observation theory made it possible to synthesize additional connections between known and unknown quantities of the original system that arise during the movement of its extended dynamic model. The asymptotic convergence of estimates of unknowns to their true value is proved. The results of numerical modeling of the asymptotic

estimation process of oscillator velocity and external force parameters for the mathematical pendulum model are presented.

Keywords: *forced oscillations, nonlinear observer, asymptotic estimation, invariant relations.*

Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Слов'янськ
zhogoleva.nadia@gmail.com
scherbakvf@outlook.com

Отримано 11.01.23