

УДК 517.54

DOI: 10.37069/1683-4720-2023-37-3

©2023. М.В. Краснощок

**ЗАДАЧА З УМОВАМИ ДІРІХЛЕ–ВЕНТЦЕЛЯ ДЛЯ РІВНЯННЯ
ЛАПЛАСА В НЕОБМЕЖЕНОМУ СЕКТОРІ**

Розглянуто мішану задачу Діріхле–Вентцеля в необмеженому секторі. За допомогою перетворення Мелліна крайову задачу зведено до різницевого рівняння. Отримано оцінки розв'язку крайової задачі у ваговому просторі Гільберта.

MSC: 34N05.**Ключові слова:** перетворення Мелліна, вагові простори Гільберта, регулярність.**1. Вступ.**

Нехай $\theta \in (0, 2\pi]$. Позначимо через s_θ нескінченний сектор, обмежений радіальними лініями $\gamma = \{(r, \phi) : r > 0, \phi = 0\}$ і $\gamma_\theta = \{(r, \phi) : r > 0, \phi = \theta\}$.

Розглянемо граничну задачу: знайти функцію $v(x)$ таку, що

$$-\Delta v = f, \text{ в } s_\theta, \quad (1)$$

$$v = \psi_1, \text{ на } \gamma_\theta, \quad v_{x_2} + \varkappa v_{x_1 x_1} = \psi, \text{ на } \gamma, \quad (2)$$

де f, ψ, ψ_1 – задані функції. Зауважимо, що область s_θ містить кутову точку в початку координат. Крім того, граничну умову (2) можна розглядати як умову Вентцеля, оскільки зовнішня нормальна похідна на γ дорівнює $-v_{x_2}$, а $v_{x_1 x_1}$ – оператору Лапласа–Бельтрамі на γ (див. [4]). Граничні задачі з умовою Вентцеля в гладких областях розглядалися в роботах [4, 6, 14, 17, 18]. Загальну теорію вагових просторів Гільберта у застосуванні до задач в областях з кутовими точками можна знайти у [16]. Задачі типу (1)–(2) вивчалися різними методами в [20, 22]. Інтерес до (1)–(2) викликаний, зокрема, моделями, що виникають при дослідженні процесів корозії (див. [8, 9, 13]). У даній роботі ми спираємося на результати робіт [23, 24], в яких задачі з кутовими точками зведено до різницевого рівняння і отримано оцінки розв'язків у вагових просторах Гільберта. Подібними методами різні задачі в областях з особливостями досліджувалися в роботах [5, 7, 11, 26].

Основну увагу ми приділяємо до задачі з $f = \psi_1 = 0$, тобто

$$-\Delta u = 0, \text{ в } s_\theta, \quad (3)$$

$$u_{x_2} + \varkappa u_{x_1 x_1} = g, \text{ на } \gamma, \quad u = 0, \text{ на } \gamma_\theta. \quad (4)$$

План роботи полягає в наступному. У другому розділі наведено основні факти щодо перетворення Мелліна, вагових просторів Гільберта і сформульовано основний результат – Теорему 1. У третьому розділі граничну задачу (3)–(4) зведено

до різницевого рівняння. Далі доведено твердження, що дозволяють побудувати розв'язок d_0 відповідного однорідного різницевого рівняння у вигляді нескінченного добутку, а також розв'язок d_1 неоднорідного рівняння у вигляді контурного інтегралу. Четвертий розділ містить додаткові оцінки, необхідні для інтегральних оцінок d_1 і розв'язку u відправної задачі (3)–(4). П'ятий розділ завершує доведення Теорема 1.

2. Допоміжні твердження. Основний результат.

Позначимо через $\tilde{g}(p)$ перетворення Мелліна функції $g(r)$. Формули обернення Мелліна мають вигляд

$$\tilde{g}(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r^{p-1} g(r) dr, \quad g(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p_1-i\infty}^{p_1+i\infty} r^{-p} \tilde{g}(p) dp, \quad p = p_1 + ip_2.$$

Остання формула, зокрема, передбачає, що функція $\tilde{g}$ є аналітичною в деякій смузі $a_1 < p_1 < a_2$. Для перетворення Мелліна справджується рівність Парсеваля

$$\int_0^\infty |g(r)|^2 r^{2p_1-1} dr = \frac{1}{2\pi i} \int_{p_1-i\infty}^{p_1+i\infty} |\tilde{g}(p)|^2 dp,$$

(див. Теорему 71 в [25]).

Введемо простори $H_\mu^k(s_\theta)$ із скінченною нормою

$$\|w\|_{H_\mu^k(s_\theta)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{s_\theta} |x|^{2(\mu-k+\alpha)} |\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} w(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

де $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$. У розділі 6.1 в [15] доведено, що дана норма еквівалентна нормі

$$\|w\|_{k,\mu,s_\theta} = \left(\sum_{i=0}^k \int_0^\infty r^{2(\mu-k+i)+1} \|(r\partial_r)^i w(r, \cdot)\|_{H^{k-i}(0,\theta)}^2 dr \right)^{1/2},$$

де (r, ϕ) – полярні координати, $w(x) = w(r, \phi)$, тобто існують сталі $0 < c_1 < c_2$ такі, що

$$c_1 \|w\|_{k,\mu,s_\theta} \leq \|w\|_{H_\mu^k(s_\theta)} \leq c_2 \|w\|_{k,\mu,s_\theta}. \quad (5)$$

Будемо також використовувати простори $H_\mu^{k+1/2}(R_+)$ з нормою

$$\|g\|_{H^{k+1/2}(R_+)} = \left(\sum_{i=0}^k \int_0^\infty r^{2(\mu-k+i)+1} |g_r^{(i)}(r)|^2 dr + \|g\|_{L_\mu^{k+1/2}(R_+)}^2 \right)^{1/2},$$

$$\text{де } \|g\|_{L_\mu^{k+1/2}(R_+)}^2 = \int_0^\infty r^{2\mu} dr \int_0^r |g^{(k)}(r+\rho) - g^{(k)}(r)|^2 \frac{d\rho}{\rho^2}.$$

Маємо такий результат (див. Твердження 3.2 в [23]).

Лема 1. *Існують додатні сталі $c_3(\mu)$, $c_4(\mu)$ такі, що*

$$c_3(\mu) \|g\|_{H_\mu^{k+1/2}(R_+)}^2 \leq \int_{\mu-k-i\infty}^{\mu-k+i\infty} |\tilde{g}(p)|^2 (1+|p|)^{2k+1} \frac{dp}{i} \leq c_4(\mu) \|g\|_{H_\mu^{k+1/2}(R_+)}^2. \quad (6)$$

Сліди функцій $w \in H_\mu^{k+1}(s_\theta)$ на γ , γ_θ можна розглядати як функції змінної r і подібним чином ввести прстори $H_\mu^{k+1/2}(\gamma)$, $H_\mu^{k+1/2}(\gamma_\theta)$, норми в яких позначимо через $\|\cdot\|_{k+1/2,\mu,\gamma}$, $\|\cdot\|_{k+1/2,\mu,\gamma_\theta}$ відповідно.

Сформулюємо основний результат даної роботи.

Теорема 1. *Нехай $l \in N$, $\mu \in R$ такі, що $-\frac{\pi}{2\theta} < \mu - l - 1 < 0$. Припустимо, що $f \in H_\mu^l(s_\theta)$, $\psi \in H_\mu^{l-1/2}(\gamma)$, $\psi_1 \in H_\mu^{l+3/2}(\gamma_\theta)$. Тоді задача (1)-(2) має єдиний розв'язок $v \in H_\mu^{l+2}(s_\theta)$ і, крім того, справедлива оцінка*

$$\|v\|_{l+2,\mu,s_\theta} \leq C (\|f\|_{l,\mu,s_\theta} + \|\psi\|_{l-1/2,\mu,\gamma} + \|\psi_1\|_{l+3/2,\mu,\gamma_\theta}). \quad (7)$$

де стала C залежить від l , μ , θ .

3. Різницеве рівняння.

Задача (3)-(4) в полярних координатах має такий вигляд

$$u_{rr}(r, \phi) + \frac{1}{r} u_r(r, \phi) + \frac{1}{r^2} u_{\phi\phi}(r, \phi) = 0, \quad r > 0, \quad 0 < \phi < \theta,$$

$$u(r, \theta) = 0, \quad r > 0, \quad \frac{1}{r} u_\phi(r, 0) + \kappa u_{rr}(r, 0) = g(r), \quad r > 0.$$

За допомогою перетворення Мелліна за змінною r , для образу $\tilde{u}(p, \phi)$ одержимо задачу

$$p^2 \tilde{u}(p, \phi) + \tilde{u}_{\phi\phi}(p, \phi) = 0, \quad 0 < \phi < \theta, \quad (8)$$

$$\tilde{u}_\phi(p+1, 0) + \kappa p(p+1) \tilde{u}(p, 0) = \tilde{g}(p+2), \quad (9)$$

$$\tilde{u}(p, \theta) = 0. \quad (10)$$

Розв'язок задачі (8)-(10) шукаємо у вигляді $\tilde{u}(p, \phi) = d(p) \frac{\sin p(\theta-\phi)}{\sin p\theta}$. Очевидно, що $\tilde{u}(p, \phi)$ задовольняє рівняння (8) і умову (10). Для знаходження $d(p)$ отримаємо рівняння

$$\text{ctg}(p+1)\theta d(p+1) - \kappa p d(p) = -\frac{\tilde{g}(p+2)}{p+1}, \quad (11)$$

Позначимо $\omega(p) = \kappa p \text{tg}(p+1)\theta$, і розглянемо спочатку однорідне рівняння

$$d(p+1) - \omega(p) d(p) = 0. \quad (12)$$

Функції $\sin x$, $\cos x$ можна записати у вигляді нескінченних добутків (див. [12], формули 1.431.1, 1.431.3).

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right), \quad \cos x = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2 \pi^2}\right).$$

Позначимо $\gamma = \varkappa\theta$, $a_k = \frac{k\pi}{\theta}$, $b_k = \frac{2k-1}{2\theta}\pi$, $k \in \mathbb{N}$, тоді

$$\omega(p) = \gamma p(p+1) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(a_k - 1 - p)(a_k + 1 + p)}{(b_k - 1 - p)(b_k + 1 + p)} \left(\frac{b_k}{a_k}\right)^2. \quad (13)$$

Загальний розв'язок (12) має вигляд

$$d(p) = \gamma^{p+1/2} \Gamma(p) \Gamma(p+1) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a_k + 1 + p) \Gamma(b_k - p)}{\Gamma((b_k + 1 + p) \Gamma(a_k - p))} \left(\frac{b_k}{a_k}\right)^{2p-1} W(k) E(p). \quad (14)$$

де $W(k)$ – довільні сталі, $E(p)$ – довільна періодична функція з періодом 1. Наслідуючи доведення Твердження 5.1 з [23], доведено такий результат.

Лема 2. *Нескінченний добуток*

$$A(p) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a_k + 1 + p) \Gamma(b_k - p)}{\Gamma((b_k + 1 + p) \Gamma(a_k - p))} \left(\frac{b_k}{a_k}\right)^{2p+1} \quad (15)$$

збігається за виключенням полюсів функцій $\Gamma(a_k + 1 + p)$, $\Gamma(b_k - p)$, $k \in \mathbb{N}$.

ЗАУВАЖЕННЯ 1. У зв'язку з доведенням даної леми важливо відмітити, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{a_k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta}{\pi k(2k-1)}$ абсолютно збігається.

Наслідок 1. *Функції (див. (14))*

$$d_0(p) = \gamma^{p+1/2} \Gamma(p) \Gamma(p+1) A(p), \quad d_s(p) = d_0(p) \sin(p\pi) \exp(ip\pi) \quad (16)$$

є розв'язками рівняння (12).

ЗАУВАЖЕННЯ 2. За допомогою формули Ейлера отримаємо

$$\begin{aligned} |\sin \pi p| &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\operatorname{ch}(2\pi p_2) - \cos(2\pi p_1))^{1/2}, \\ \sin \pi p \exp(ip\pi) &= \frac{1}{2i} (1 - \exp(-2\pi p_1 + 2\pi p_2)). \end{aligned} \quad (17)$$

Лема 3. *У смугі*

$$-1 - \frac{\pi}{\theta} < \operatorname{Re} p < \frac{\pi}{2\theta} \quad (18)$$

для великих значень $|p_2|$ справедлива асимптотична формула

$$\ln A(p) = \left(p + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{\operatorname{tg}(p+1)\theta}{\theta} + \frac{3}{2}p + r(p), \quad (19)$$

де $r(p) = O(1)$, при $|p_2| \rightarrow \infty$

Доведення. Прості полюси функції $A(p)$ знаходяться в точках $p = -1 - \frac{k\pi}{\theta} - n$, $p = \frac{2k-1}{2\theta} + n$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Отже функція $A(p)$ є аналітичною в смугі (18). Далі користуватимемося асимптотичною формулою (див. (6.1.40), с. 257 в [1])

$$\ln \Gamma(z) = (z - 1/2) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{12z} + \xi(z), \quad (20)$$

де $\xi(z) = O(\frac{1}{z^3})$, якщо $|z| \rightarrow \infty$, $|\arg z| < \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Після рутинних обчислень і застосування формули (20), маємо

$$\begin{aligned} \ln A(p) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(p + \frac{1}{2} \right) \ln \left(\frac{b_k}{a_k} \right)^2 + \ln \Gamma(a_k + p + 1) \right. \\ &\quad \left. + \ln \Gamma(b_k - p) - \ln \Gamma(b_k + p + 1) - \ln \Gamma(a_k - p) \right] \\ &= \left(p + \frac{1}{2} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{(a_k + 1 + p)(a_k - p - 1)}{(b_k + 1 + p)(b_k - p - 1)} \left(\frac{b_k}{a_k} \right)^2 + Q(p) + r(p) \end{aligned} \quad (21)$$

де

$$Q(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \frac{a_k + 1 + p}{a_k - p - 1} - b_k \ln \frac{b_k + 1 + p}{b_k - p - 1} \right], \quad (22)$$

$r(p) = O(1)$, якщо $|p| \rightarrow \infty$.

Для оцінки Q використаємо формулу Ейлера–Маклорена в такій простій формі (див. [3])

$$\sum_{i=1}^n \varphi(i) = \int_1^n \varphi(\tau) d\tau + \frac{\varphi(1) + \varphi(n)}{2} + \int_1^n \varphi'(x)(x - [x] - 1/2) dx, \quad (23)$$

де $[x]$ – ціла частина x . Позначимо $\delta = \frac{\pi}{\theta}$. Введемо функцію

$$\varphi(p, t) = \delta t \ln \frac{\delta t + p + 1}{\delta t - p - 1} - \delta(t - 1/2) \ln \frac{\delta(t - 1/2) + p + 1}{\delta(t - 1/2) - p - 1},$$

тоді

$$Q(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(p, k). \quad (24)$$

Безпосередніми обчисленнями отримаємо

$$\varphi'(t) = \int_{t/2}^t \left[\frac{4\delta^4 \tau^2 (p + 1)}{(\delta\tau + p + 1)^2 (\delta\tau - p - 1)^2} - \frac{4\delta^2 (p + 1)}{(\delta\tau)^2 - (p + 1)^2} \right] d\tau. \quad (25)$$

З (25) випливає рівномірна обмеженість при великих значень $|p|$ інтегралу

$$\left| \int_0^\infty \varphi'(p, \tau)(\tau - [\tau] - 1/2) d\tau \right| \leq c_5. \quad (26)$$

Бачимо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(p, n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\delta n \ln \frac{1 + \frac{p+1}{\delta n}}{1 - \frac{p+1}{\delta n}} - \delta(n - 1/2) \ln \frac{1 + \frac{p+1}{\delta(n-1/2)}}{1 - \frac{p+1}{\delta(n-1/2)}} \right] = 0. \quad (27)$$

Далі виводимо, що

$$\varphi(p, 1) = \delta \ln \frac{1 + \frac{p+1}{\delta}}{1 - \frac{p+1}{\delta}} - \delta/2 \ln \frac{1 + \frac{p+1}{\delta/2}}{1 - \frac{p+1}{\delta/2}} = O(1), \text{ при } |p| \rightarrow \infty. \quad (28)$$

Безпосередніми обчисленнями переконаємося в тому, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \varphi(p, \tau) d\tau = \frac{3}{2}p + O(1). \quad (29)$$

З (23), (24), (27), (28), (29) маємо

$$Q_1(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_1^n \varphi(p, \tau) d\tau + \frac{1}{2} \varphi(p, n) \right] + \frac{1}{2} \varphi(p, 1) + O(1) = \frac{3}{2}p + O(1). \quad (30)$$

У підсумку з (21), (22), (30), виводимо оцінку (19). $\square$

Введемо функцію

$$\Lambda(p) = p \gamma^{p+1/2} \Gamma(p) \Gamma(p+1) A(p). \quad (31)$$

Як бачимо, функція $\Lambda(p)$, з точністю до множника p , співпадає з $d_0(p)$. Нагадаємо оцінку (див. (6.3.18), с.219 в [1])

$$(\ln \Gamma(z))' = \ln z - \frac{1}{2z} + \xi_2(z) \quad (32)$$

де $\xi_2(z) = O(\frac{1}{z^2})$. За допомогою (16), (32), маємо такий наслідок з Лема 3.

Наслідок 2. У смугі

$$-1 < \operatorname{Re} < \frac{\pi}{2\theta} \quad (33)$$

для великих значень $|p_2|$ справедливі асимптотичні формули

$$\begin{aligned} \ln \Lambda(p) &= (p + \frac{1}{2}) \ln \omega(p) - \frac{p}{2} + r_1(p), \\ (\ln \Lambda(p))' &= \ln \omega(p) + r_2(p), \end{aligned} \quad (34)$$

де $r_1(p) = O(1)$, $r_2(p) = O(1)$, якщо $|p| \rightarrow \infty$.

Зауваження 3. Зауважимо, що оцінка (34) може бути корисною і при $\operatorname{Re} p \geq -1$, наприклад, якщо розглядається функція $(p+1)^2 \Lambda(p)$, для якої $p = -1$ є вже регулярною точкою.

Повернемося до рівняння (11). Шукаємо його розв'язок у вигляді

$$d_1(p) = d_s(p)y(p), \quad (35)$$

отримаємо

$$y(p+1) - y(p) = h(p), \quad h(p) = -\frac{\tilde{g}(p+2)}{\pi p(p+1)d_s(p)}. \quad (36)$$

Лема 4. У смугі

$$-1 - \frac{\pi}{2\theta} < \operatorname{Re} q < 0 \quad (37)$$

функція $h(p)$ є аналітичною і, крім того, маємо

$$\lim_{q \rightarrow -i\infty} |h(q)| = 0, \quad \lim_{q \rightarrow +i\infty} |h(q)| \exp(-2\pi q) = 0. \quad (38)$$

Граничні переходи (38) випливають з (17) і першої формули в (34).

Для додатніх значень параметру ε позначимо через $L_{0,\varepsilon}$ контур, який складається з точок p уявної осі при $|p| > \varepsilon$ і напівкола $|p| = \varepsilon$, $\operatorname{Re} p > 0$. Через $L_{-1,\varepsilon}$ позначимо контур, отриманий зсувом $L_{0,\varepsilon}$ на одиницю вліво.

Лема 5. Функція

$$y(p) = \frac{1}{2i} \int_{L_{-1,\varepsilon}} h(p+\zeta) [\operatorname{ctg} \pi \zeta + i] d\zeta \quad (39)$$

є розв'язком рівняння (36) при всіх p :

$$-\frac{\pi}{2\theta} < \operatorname{Re} p < 0. \quad (40)$$

Доведення. Маємо

$$\begin{aligned} y(p+1) - y(p) &= \frac{1}{2i} \int_{L_{-1,\varepsilon}} h(p+\zeta+1) [\operatorname{ctg} \pi \zeta + i] d\zeta - \frac{1}{2i} \int_{L_{-1,\varepsilon}} h(p+\zeta) [\operatorname{ctg} \pi \zeta + i] d\zeta \\ &= \frac{1}{2i} \left[\int_{L_{0,\varepsilon}} h(p+\zeta) [\operatorname{ctg} \pi \zeta + i] d\zeta - \int_{L_{-1,\varepsilon}} h(p+\zeta) [\operatorname{ctg} \pi \zeta + i] d\zeta \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Згідно з Лемою 4 функція $h(p+\zeta)$ не має особливостей, якщо $-1 - \frac{\pi}{2\theta} - \operatorname{Re} p < \operatorname{Re} \zeta < -\frac{\pi}{2\theta}$. За умовою (40) відрізок $[-1, 0]$ вкладається в інтервал $(-1 - \frac{\pi}{2\theta} -$

$\operatorname{Re} p, -\operatorname{Re} p)$, і, як наслідок, функція $h(p+\zeta)$ буде аналітичною за змінною ζ у смузі, що розташована між контурами $L_{-1,\varepsilon}$ і $L_{0,\varepsilon}$. Збіжність інтегралів в (41) забезпечується граничними співвідношеннями (38). З (41) і теореми Коші про лишки випливає

$$y(p+1) - y(p) = \pi \operatorname{Res}_{\zeta=0} h(p+\zeta) \operatorname{ctg} \pi \zeta = h(p).$$

Лему доведено. $\square$

ЗАУВАЖЕННЯ 4. Визначимо контур L_ε , який складається з напівкола $\operatorname{Re} p < 0$, $|p| = \varepsilon$ і точок уявної осі таких, що $|p| > \varepsilon$. Оскільки в області, що розташована між $L_{-1,\varepsilon}$ і L_ε немає особливих точок, ми можемо замінити в (39) інтегрування по $L_{-1,\varepsilon}$ на $-L_\varepsilon$:

$$y(p) = \frac{1}{2i} \int_{L_\varepsilon} h(p+\zeta) [\operatorname{ctg} \pi \zeta + i] d\zeta \quad (42)$$

За допомогою (35), (36), (42), можемо представити розв'язок $d_1(p)$ у вигляді

$$\begin{aligned} d_1(p) &= -\frac{1}{2i} \int_{L_\varepsilon} \frac{\tilde{g}(p+2+\zeta)}{\varkappa(p+1+\zeta)} \frac{d_0(p)}{(p+\zeta)d_0(p+\zeta)} \frac{\sin \pi p}{\sin \pi(p+\zeta) \exp(i\pi\zeta)} [\operatorname{ctg} \pi \zeta + i] d\zeta \\ &= \frac{1}{\varkappa} \int_{L_\varepsilon} \frac{\tilde{g}(p+2+\zeta)}{(p+1+\zeta)} \frac{\Lambda(p)}{p\Lambda(p+\zeta)} \frac{\sin \pi p}{\sin \pi(p+\zeta)} \frac{d\zeta}{e^{-i\pi\zeta} - e^{i\pi\zeta}} \quad (43) \end{aligned}$$

4. Інтегральні оцінки.

Дотримуючись тієї самої схеми, що запропоновано при доведенні Лем 7.1 і 7.2 з [23], можемо довести такі результати.

Лема 6. Якщо $y \in (-\infty, +\infty)$, $\operatorname{Re} p \in (-\frac{\pi}{2\theta}, 0)$, тоді справедлива нерівність

$$\left| \frac{\Lambda(p) \sin \pi p}{\Lambda(p+iy) \sin \pi(p+iy)} \right| \leq c_6 e^{(\pi-\varepsilon)|y|}, \quad (44)$$

де $\varepsilon > 0$, c_2 не залежить від p_2 .

Лема 7. Для всіх p таких, що $\operatorname{Re} p \in (-\frac{\pi}{2\theta}, 0)$ і $y \in (-1, 1)$, функція

$$B(y, p) = \frac{\Lambda(p) \sin \pi p}{\Lambda(p+iy) \sin \pi(p+iy)} \left[\frac{1+|p|}{1+|p+iy|} \right]^{k+1/2} - \frac{|\omega(p)|^{ip_2}}{|\omega(p+iy)|^{i(y+p_2)}} \quad (45)$$

задовольняє оцінку

$$|B(p, y)| \leq c_7 |y|. \quad (46)$$

Перейдемо до власне інтегральних оцінок $d_1(p)$.

Лема 8. Справедлива оцінка

$$\int_{\operatorname{Re} p = \mu-l-1} |d_1(p)|^2 (1+|p|)^{2l+3} \frac{dp}{i} \leq c_8 \int_{\operatorname{Re} p = \mu-l+1} |\tilde{g}(p)|^2 (1+|p|)^{2l-1} \frac{dp}{i} \quad (47)$$

за умовою

$$-\frac{\pi}{2\theta} < \mu - l - 1 < 0, l \in \mathbb{N}.$$

Доведення. Використовуючи (43), маємо

$$\begin{aligned} d_1(p) &= \text{v.p.} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\tilde{g}(p+2+\zeta)}{\varkappa(p+1+\zeta)} \frac{\Lambda(p)}{p\Lambda(p+\zeta)} \frac{\sin \pi p}{\sin \pi(p+\zeta)} \frac{d\zeta}{e^{-i\pi\zeta} - e^{i\pi\zeta}} \\ &\quad - \pi i \operatorname{Res}_{\zeta=0} \frac{\tilde{g}(p+2+\zeta)}{\varkappa(p+1+\zeta)} \frac{\Lambda(p)}{p\Lambda(p+\zeta)} \frac{\sin \pi p}{\sin \pi(p+\zeta)} \frac{1}{e^{-i\pi\zeta} - e^{i\pi\zeta}} \\ &= i \text{ v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{g}(p+2+y)}{\varkappa(p+1+y)} \frac{\Lambda(p)}{p\Lambda(p+y)} \frac{\sin \pi p}{\sin \pi(p+y)} \frac{dy}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} + \frac{\tilde{g}(p+2)}{2\varkappa(p+1)p}. \end{aligned} \quad (48)$$

Помножимо обидві частини (48) на $(1+|p|)^{l+3/2}$:

$$(1+|p|)^{l+3/2} d_1(p) = \frac{1}{2\varkappa} \frac{(1+|p|)^{l+3/2}}{(p+1)p} \tilde{g}(p+2) + I_1(p) + I_2(p), \quad (49)$$

де

$$\begin{aligned} I_1(p) &= i \text{ v.p.} \int_{-1}^{+1} \frac{\tilde{g}(p+2+y)}{\varkappa(p+1+y)} \frac{\Lambda(p)}{p\Lambda(p+y)} \frac{\sin \pi p}{\sin \pi(p+y)} \frac{dy}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}, \\ I_2(p) &= i \int_{|y|>1} \frac{\tilde{g}(p+2+y)}{\varkappa(p+1+y)} \frac{\Lambda(p)}{p\Lambda(p+y)} \frac{\sin \pi p}{\sin \pi(p+y)} \frac{dy}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} \end{aligned} \quad (50)$$

Варто відзначити, що другий інтеграл $I_2(p)$ не має особливостей. Оцінимо, для прикладу, перший інтеграл. Виділимо в $I_1(p)$ сингулярну і регулярну частини $I_1(p) = I_{11}(p) + I_{12}(p)$, де

$$\begin{aligned} I_{11}(p) &= |\omega(p)|^{ip_2} i \text{ v.p.} \int_{-1}^{+1} \frac{\tilde{g}(p+2+iy)}{\varkappa(p+1+iy)p} (1+|p+iy|)^{l+3/2} |\omega(p)|^{-i(p_2+y)} \frac{dy}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}, \\ I_{12}(p) &= i \int_{-1}^{+1} \frac{\tilde{g}(p+2+iy)(1+|p+iy|)^{l+3/2}}{\varkappa(p+1+iy)p} B(y, p) \frac{dy}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}, \end{aligned} \quad (51)$$

До інтегралу I_{12} застосовуємо оцінку (46)

$$\begin{aligned} |I_{12}(p)| &\leq c_9 \int_{-1}^{+1} |\tilde{g}(p+2+iy)| (1+|p+iy|)^{l-1/2} \frac{|y|dy}{|e^{\pi y} - e^{-\pi y}|} \\ &= c_9 \int_{-1}^{+1} |\tilde{g}(p_1+2+i(p_2-x))| (1+|p_1+i(p_2-x)|)^{l-1/2} \frac{|x|dx}{|e^{\pi x} - e^{-\pi x}|} \end{aligned}$$

Далі, за допомогою теореми Юнга (див. Теорему 4.30, с.90 в [2]), отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{\operatorname{Re} p=\mu-l-1} |I_{12}(p)|^2 \frac{dp}{i} &\leq c_{10} \int_{\operatorname{Re} p=\mu-l-1} |\tilde{g}(p+2)|^2 (1+|p|)^{2l-1} \frac{dp}{i} \left[\int_{-1}^1 \frac{|x|dx}{|e^{\pi x} - e^{-\pi x}|} \right]^2 \\ &\leq c_{11} \int_{\operatorname{Re} p=\mu-l+1} |\tilde{g}(p)|^2 (1+|p|)^{2l-1} \frac{dp}{i}. \end{aligned} \quad (52)$$

Оцінку інтегралу $I_{11}(p)$ одержимо за допомогою теореми Кальдерона–Зігмунда (див. Теорему 3.7, с.32 в [21]). Позначимо $K(x) = (\exp(-\pi x) - \exp(\pi x))^{-1}$. Якщо, наприклад, $x > 0$, тоді $\exp(\pi x) - \exp(-\pi x) \geq \pi x$. Оскільки K є непарною функцією, отримаємо, що

$$|K(x)| \leq \frac{1}{\pi|x|}. \quad (53)$$

Далі, нехай, для прикладу, $y > 0$ і $x > 2y$, тоді безпосереднім інтегруванням можна впевнитись у тому, що

$$\int_{2y}^{\infty} |K(x-y) - K(x)| \leq \frac{2}{\pi} \ln \frac{\operatorname{ch} \pi y + 1}{\operatorname{ch} \pi y} \leq c_{12}.$$

У загальному випадку виводимо, що

$$\sup_{y \neq 0} \int_{|x| > 2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx \leq c_{13}. \quad (54)$$

Маємо також для довільних $0 < r_1 < r_2$

$$\int_{r_1 < |x| < r_2} K(x) dx = \int_{-r_2}^{-r_1} K(x) dx + \int_{r_1}^{r_2} K(x) dx = 0. \quad (55)$$

З (53)–(55) бачимо, що виконано всі три умови (a, b, c) згаданої вище теореми з [21], отже

$$\int_{\operatorname{Re} p=\mu-l-1} |I_{11}(p)| \frac{dp}{i} \leq c_{14} \int_{\operatorname{Re} p=\mu-l+1} |\tilde{g}(p)|^2 (1+|p|)^{2l-1} \frac{dp}{i}. \quad (56)$$

З (52), (56) і аналогічних міркувань одержимо (47). $\square$

5. Доведення Теорема 1.

Розглянемо задачу Діріхле

$$\begin{aligned} -\Delta w &= f, \text{ в } s_\theta, \\ w &= 0, \text{ на } \gamma, \quad w = \psi_1, \text{ на } \gamma_\theta, \end{aligned} \quad (57)$$

З Твердження 2.5, с.98 в [19] випливає, що за умовами $\mu - l - 1 \neq j\frac{\pi}{\theta}$, $j \pm 1, \pm 2, \dots$, $f \in H_\mu^l(s_\theta)$, $\psi_1 \in H_\mu^{l+3/2}(\gamma_\theta)$, існує єдиний розв'язок $w \in H_\mu^{l+2}(s_\theta)$ задачі (57) і справедлива оцінка

$$\|w\|_{l+2,\mu,s_\theta} \leq c_{15} (\|f\|_{l,\mu,s_\theta} + \|\psi_1\|_{l+2,\mu,\gamma_\theta}). \quad (58)$$

Для функції $u = v - w$ отримаємо задачу (3), (4) з $g = \psi + w_{x_2} - \kappa w_{x_1 x_1} \in H_\mu^{l-1/2}(\gamma)$, $l \in \mathbb{N}$. З (58) бачимо, що

$$\|g\|_{l-1/2,\mu,\gamma} \leq c_{16} (\|f\|_{l,\mu,s_\theta} + \|\psi_1\|_{l+2,\mu,\gamma_\theta}). \quad (59)$$

Оцінимо норму u через норму її сліду на γ . Враховуючи, що $\widetilde{(r\partial_r)^j u}(p) = p^j u(p)$, одержимо з (5) за допомогою рівності Парсеваля

$$\|u\|_{l+2,\mu,s_\theta}^2 \leq c_{17} \sum_{i=0}^{l+2} \|p^i \tilde{u}(p, \cdot)\|_{H^{2+l-i}(0,\theta)}^2 d\theta. \quad (60)$$

Далі, оскільки $\tilde{u}(p, \phi) = d_1(p) \frac{\sin p(\theta-\phi)}{\sin p\theta}$, бачимо, що

$$\left| \frac{\partial^j \tilde{u}}{\partial \phi^j} \right|^2 \leq c_{18} \frac{|d_1(p)|^2}{|\sin^2 p\theta|} |p|^{2j} [|\sin p(\theta - \phi)|^2 + |\cos p(\theta - \phi)|^2]. \quad (61)$$

У Твердженні 7.4 роботи [23] доведено, що

$$\frac{|p|^2}{|\sin^2 p\theta|} \int_0^\theta [|\sin p\xi|^2 + |\cos p\xi|^2] d\xi \leq c_{19}(1 + |p|). \quad (62)$$

З (60)-(62) маємо

$$\begin{aligned} \|u\|_{l+2,\mu,s_\theta}^2 &\leq c_{20} \sum_{i=0}^{l+2} \int_{\operatorname{Re} p=\mu-l-1} |p|^{2(i-1)+2(2+l-i)} (1 + |p|) |d_1(p)|^2 \frac{dp}{i} \\ &\leq c_{21} \int_{\operatorname{Re} p=\mu-l-1} (1 + |p|)^{2(1+l)+1} |d_1(p)|^2 \frac{dp}{i} \end{aligned} \quad (63)$$

Лема 1, 8 дозволяють стверджувати, що з (47), (63) випливає нерівність

$$\|u\|_{l+2,\mu,s_\theta} \leq c_{22} \|g\|_{l-1/2,\mu,\gamma}. \quad (64)$$

Нарешті, оцінка (7) випливає з (58), (64).

Цитована література

1. *Abramowitz M., Stegun I.* Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. – U. S. Government Printing Office: Washington, D.C., 1964.
2. *Adams R.A.* Sobolev spaces. – Academic Press: New York-London, 1975.
3. *Apostol T.* An Elementary View of Euler's Summation Formula // *The American Mathematical Monthly*. – 1999. – V. 106. – P. 409–418.
4. *Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I.* A survey of results on nonlinear Venttsel problems // *Appl. Math.* – 2000. – V. 45. – P. 69–80.
5. *Bazaliy B.V., Friedman A.* The Hele-Shaw problem with surface tension in a half-plane // *J. Differential Equations*. – 2005. – V. 216. – P. 439–469.
6. *Bazaliy B. V., Kazmin S.N.* On a boundary value problem with a higher derivative in the boundary condition for a second-order parabolic equation // *J. Math. Sci.* – 2000. – V. 101. – P. 3398–3407.
7. *Bazaliy B. V., Vasylyeva N.* The transmission problem in domains with a corner point for the Laplace operator in weighted Hölder spaces // *J. Differential Equations*. – 2010. – V. 249. – P. 2476–2499.
8. *Cakoni F., Hu Y., Kress R.* Simultaneous reconstruction of shape and generalized impedance functions in electrostatic imaging // *Inverse Problems*. – 2014. – V. 30. – 105009. – 19 p.
9. *Caubet F., Dambrine M., Kateb D.* Shape optimization methods for the inverse obstacle problem with generalized impedance boundary conditions // *Inverse Problems*. – 2013. – V. 29. – 115011. – 26 p.
10. *Courant R., Hilbert D.* Methods of mathematical physics. Vol. I. Interscience Publishers, Inc.: New York, 1953.
11. *Dzhafarov R., Vasylyeva N.* Boundary value problems governed by superdiffusion in the right angle: existence and regularity // *J. Math.* – 2018. – Art. ID 5395124. – 29 p.
12. *Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M.* Tables of series, products and integrals. – Verlag Harri Deutsch: Thun., 1982.
13. *Hu Y., Wang B., Li T.* Corrosion shape reconstruction of the mixed boundary in electrostatic imaging // *Adv. Difference Equ.* – 2020. – Paper No. 405. – 19 p.
14. *Kashiwabara T., Colciago C., Dedè L., Quarteroni A.* Well-posedness, regularity, and convergence analysis of the finite element approximation of a generalized Robin boundary value problem // *SIAM J. Numer. Anal.* – 2015. – V. 53. – P. 105–126.
15. *Kozlov V. A., Maz'ya V.G., Rossmann, J.* Elliptic boundary value problems in domains with point singularities. – American Mathematical Society: Providence, RI, 1997.
16. *Kufner A., Sändig, A.-M.* Some applications of weighted Sobolev spaces. – Teubner Verlagsgesellschaft: Leipzig, 1987.
17. *Luo Y., Trudinger, N.S.* Linear second order elliptic equations with Venttsel boundary conditions // *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*. – 1991. – V. 118. – P. 193–207.
18. *Nazarov S., Pileckas K.* On noncompact free boundary problems for the plane stationary Navier–Stokes equations // *J. Reine Angew. Math.* – 1993. – V. 438. – P. 103–141.
19. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. – Walter de Gruyter and Co.: Berlin. – 1994.
20. *Nicaise S., Li H., Mazzucato A.* Regularity and a priori error analysis of a Ventcel problem in polyhedral domains // *Math. Methods Appl. Sci.* – 2017. – V. 40. – P. 1625–1636.
21. *Peyrière J.* An introduction to singular integrals. – Higher Education Press: Beijing. – 2018.
22. *Popivanov P., Slavova A.* On Ventcel's type boundary condition for Laplace operator in a sector // *J. Geom. Symmetry Phys.* – 2013. – V. 31. – P. 119–130.
23. *Solonnikov V.A., Frolova E.V.* A problem with the third boundary condition for the Laplace equation in a plane angle and its applications to parabolic problems // *Leningrad Math.* – 1991. – V. 2. – P. 891–916.
24. *Solonnikov V.A., Frolova E.V.* Investigation of a problem for the Laplace equation with a boundary condition of a special form in a plane angle // *J. Math. Sci.* – 1982. – V. 62. – P. 2819–2831.

25. *Titchmarsh E.C.* Introduction to the theory of Fourier integrals. – Chelsea Publishing Co.: New York, 1986.
26. *Vasylyeva N.* Mixed Dirichlet-transmission problems in nonsmooth domains // Understanding Complex Systems. – 2021. – V. 9. – P. 195–229.

References

1. Abramowitz, M., Stegun, I. (1964). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. U. S. Government Printing Office: Washington, D.C.
2. Adams, R.A. (1975). *Sobolev spaces*. Academic Press: New York-London.
3. Apostol, T. (1999). An Elementary View of Euler's Summation Formula. *The American Mathematical Monthly*, 106, 409–418.
4. Apushkinskaya, D. E., Nazarov, A. I. (2000). A survey of results on nonlinear Venttsel problems. *Appl. Math.*, V. 45, 69–80.
5. Bazaliy, B.V., Friedman, A. (2005). The Hele–Shaw problem with surface tension in a half-plane. *J. Differential Equations*, 216, 439–469.
6. Bazaliy, B. V., Kazmin, S. N. (2000). On a boundary value problem with a higher derivative in the boundary condition for a second-order parabolic equation. *J. Math. Sci.*, 101, 3398–3407.
7. Bazaliy, B. V., Vasylyeva, N. (2010). The transmission problem in domains with a corner point for the Laplace operator in weighted Hölder spaces. *J. Differential Equations*, 249, 2476–2499.
8. Cakoni, F., Hu, Y., Kress, R. (2014). Simultaneous reconstruction of shape and generalized impedance functions in electrostatic imaging. *Inverse Problems*, 30, 105009, 19 p.
9. Caubet, F., Dambrine, M., Kateb, D. (2013). Shape optimization methods for the inverse obstacle problem with generalized impedance boundary conditions. *Inverse Problems*, 29, 115011, 26 p.
10. Courant, R., Hilbert, D. (1953). *Methods of mathematical physics. Vol. I*. Interscience Publishers, Inc.: New York.
11. Dzhaferov, R., Vasylyeva, N. (2018). Boundary value problems governed by superdiffusion in the right angle: existence and regularity. *J. Math.*, Art. ID 5395124, 29 p.
12. Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M. (1982). *Tables of series, products and integrals*. Verlag Harri Deutsch: Thun.
13. Hu, Y., Wang, B., Li, T. (2020). Corrosion shape reconstruction of the mixed boundary in electrostatic imaging. *Adv. Difference Equ.*, Paper No. 405, 19 p.
14. Kashiwabara, T., Colciago, C., Dedé, L., Quarteroni, A. (2015). Well-posedness, regularity, and convergence analysis of the finite element approximation of a generalized Robin boundary value problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 53, 105–126.
15. Kozlov, V. A., Maz'ya, V.G., Rossmann, J. (1997). *Elliptic boundary value problems in domains with point singularities*. American Mathematical Society: Providence, RI.
16. Kufner, A., Sändig, A.-M. (1987). *Some applications of weighted Sobolev spaces*. Teubner Verlagsgesellschaft: Leipzig.
17. Luo, Y., Trudinger, N.S. (1991). Linear second order elliptic equations with Venttsel boundary conditions. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 118, 193–207.
18. Nazarov, S., Pileckas, K. (1933). On noncompact free boundary problems for the plane stationary Navier-Stokes equations. *J. Reine Angew. Math.*, 438, 103–141.
19. Nazarov, S. A., Plamenevsky, B. A. (1994). *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*. Walter de Gruyter and Co.: Berlin.
20. Nicaise, S., Li, H., Mazzucato, A. (2017). Regularity and a priori error analysis of a Ventcel problem in polyhedral domains. *Math. Methods Appl. Sci.*, 40, 1625–1636.
21. Peyrière, J. (2018). *An introduction to singular integrals*. Higher Education Press: Beijing.
22. Popivanov, P., Slavova, A. (2013). On Ventcel's type boundary condition for Laplace operator in a sector. *J. Geom. Symmetry Phys.*, 31, 119–130.
23. Solonnikov, V. A., Frolova, E. V. (1991). A problem with the third boundary condition for the Laplace equation in a plane angle and its applications to parabolic problems. *Leningrad Math.*, 2, 891–916.

24. Solonnikov, V.A., Frolova, E.V. (1982). Investigation of a problem for the Laplace equation with a boundary condition of a special form in a plane angle. *J. Math. Sci.*, 62, 2819–2831.
25. Titchmarsh, E.C. (1986). *Introduction to the theory of Fourier integrals*. Chelsea Publishing Co.: New York.
26. Vasylyeva, N. (2021). Mixed Dirichlet-transmission problems in nonsmooth domains. *Understanding Complex Systems*, 9, 195–229.

M.V. Krasnoshchok

Dirihlet–Ventcel boundary problem for Laplace equation in an unbounded sector.

We are concerned with boundary value problems for Laplace equation in an unbounded sector s_θ with vertex at the origin, the boundary conditions being of mixed type and jumping at corner. The boundary conditions are these: Dirichlet datum on one of the radial lines, while on the other the values of an Ventcel boundary condition is prescribed. We are interested in looking for solutions having a prescribed degree of smoothness up to the origin: more precisely we search for solutions of problem having all the derivatives up to the order that are square integrable with a power weight. This problem has a background in physical modeling of electrostatic or thermal imaging. Determining the geometry and the physical nature of an corrosion within a conducting medium from voltage and current measurements on the accessible boundary of the medium can be modeled as an inverse boundary value problem for the Laplace equation subject to appropriate boundary conditions on the corrosion surface. We are interesting in investigation of a regularity properties of solution to the @direct@ problem. Applying Mellin transform we pass to a finite difference equation. We use the methods of V.A.Solonnikov and E.V.Frolova just as in the case of the analogous finite difference equation obtained under the Dirichlet or the Neumann conditions indstead of the Ventcel condition in our case. We obtain the solution of homogeneous difference equation in the form of infinite product. Then we find asymptotic formulas for this solution. Returning to nonhomogeneous difference equation we find its solution in the form of contour integral. we define the solution of the starting problem by the help of the inverse Mellin transform. We estimate this solution in the norm of V.Kondratiev spaces $H_\mu^k(s_\theta)$ under some conditions on weight μ , higher order of derivatives k and the opening of the angle θ .

Keywords: *Mellin transform, weighted Hilbert spaces, regularity.*

Ін-т прикл. математики і механіки НАН України, Слов'янськ
iamm012@ukr.net

Отримано 05.05.23