

УДК 517.54

DOI: 10.37069/1683-4720-2023-37-5

©2023. М.О. Савченко, І.І. Скрипник, Є.О. Євгенєва

СЛАБКА НЕРІВНІСТЬ ГАРНАКА ДЛЯ НЕОБМЕЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ $p(x)$ -ЛАПЛАСА З ТОЧНИМИ НЕЛОГАРИФМІЧНИМИ УМОВАМИ

Доведено слабку нерівність Гарнака для необмежених розв'язків рівняння

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) = 0, \quad p(x) = \bar{p} + L \frac{\log \log \frac{1}{|x-x_0|}}{\log \frac{1}{|x-x_0|}}, \quad \bar{p} > 1, \quad L > 0,$$

з точними нелогарифмічними умовами на функцію $p(x)$.

MSC: 35B40, 35B45, 35B65.

Ключові слова: рівняння $p(x)$ -Лапласа, слабка нерівність Гарнака, необмежені розв'язки, нелогарифмічні умови.**1 Вступ та основний результат**

Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. У даній статті ми досліджуємо еліптичні рівняння такого типу

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

де показник $p(x)$ має наступну форму

$$p(x) = \bar{p} + \ell(|x - x_0|), \quad \ell(s) = L \frac{\log \log \frac{1}{s}}{\log \frac{1}{s}}, \quad \bar{p} > 1, \quad L > 0. \quad (2)$$

Метою роботи є встановлення слабкої нерівності Гарнака для невід'ємних розв'язків рівняння (1).

Перед тим як сформулювати основні результати, висвітлимо коротко історію проблеми. Дослідження регулярності мінімізаторів функціоналів з нестандартними умовами зросту було започатковано Жиковим [54–57, 59], Marcellini [36, 37], та Lieberman [35], а в останні тридцять років якісна теорія еліптичних і параболічних рівнянь другого порядку з так званою «логарифмічною» умовою

$$\operatorname{osc}_{B_r(x_0)} p(x) \leq \frac{L}{\log \frac{1}{r}}, \quad 0 < r < 1, \quad 0 < L < \infty, \quad (3)$$

Робота частково підтримана грантом Національної академії наук України (проект “Математичне моделювання складних динамічних систем та процесів актуальних для безпеки держави”, реєстраційний номер 0123U100853) та Європейським Союзом у рамках стипендії імені Марії Склодовської-Кюрі для постдокторантів.

набула активного розвитку (див. [1–3, 5, 6, 9–16, 20–22, 25–30, 39, 47–49, 52]). Рівняння такого типу і системи таких рівнянь виникають у різних задачах математичної фізики (див. напр. монографії [8, 25, 40, 53] і посилання в них).

Випадок, коли умова (3) замінюється на умову

$$\operatorname{osc}_{B_r(x_0)} p(x) \leq \frac{\mu(r)}{\log \frac{1}{r}}, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \mu(r) = \infty, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(r)}{\log \frac{1}{r}} = 0, \quad (4)$$

суттєво відрізняється від логарифмічного випадку. Виявляється, така нелогарифмічна умова є точною умовою гладкості скінченних функцій у відповідному просторі Соболева $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Тому цей випадок надзвичайно цікавий для вивчення. Але, наскільки нам відомо, результатів у цьому напрямку небагато. Жиков [58] отримав узагальнення логарифмічної умови, що гарантує щільність гладких функцій у просторі Соболева $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Зокрема, цей результат має місце, якщо $1 < \bar{p} \leq p(x)$ і

$$\operatorname{osc}_{B_r(x_0)} p(x) \leq L \frac{\log \log \frac{1}{r}}{\log \frac{1}{r}}, \quad 0 < L \leq \frac{\bar{p}}{n}. \quad (5)$$

Пізніше Жиков і Пастухова [60] встановили підвищену інтегрованість градієнта розв'язків рівняння $p(x)$ -Лапласа за тієї самої умови.

Внутрішня неперервність, неперервність до межі та нерівність Гарнака для рівняння $p(x)$ -Лапласа було доведено в роботах [4, 7, 51] за умови (4) і

$$\int_0^\infty \exp(-\gamma \exp(\mu^c(r))) \frac{dr}{r} = +\infty, \quad (6)$$

з деякими числами $\gamma, c > 1$. Наприклад, функція $\mu(r) = L \log \log \log \frac{1}{r}$ задовольняє умовам (4), (6), при достатньо малому додатньому числу L .

Результати статей [4, 7, 51] було узагальнено в роботах [43, 48] для широкого класу еліптичних і параболічних рівнянь з нелогарифмічним зростанням Орліча. Зокрема, у [48] доведено, що за умов (4), (6) функції з відповідних класів Де Джорджі $\mathcal{B}_1(\Omega)$ є неперервними і, крім того, було показано що розв'язки відповідних еліптичних і параболічних рівнянь з нестандартними умовами зросту належать до цих класів.

Якісні властивості обмежених розв'язків рівняння (1) за умови (2) було встановлено в [50].

Щодо необмежених розв'язків, то результатів небагато. Для двофазних еліптичних рівнянь

$$\operatorname{div} \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u + a(x) |\nabla u|^{q-2} \nabla u \right) = 0, \quad q > p,$$

відомо, що відстань між p і q не повинна бути надто великою. Інакше у випадку $q > \frac{np}{n-p}$, $p < n$ існують необмежені мінімізатори і в той же час стала в

нерівності Гарнака не може бути незалежною від розв'язку, на відміну від стандартного випадку, тобто, якщо $p = q$ (див. [1, 9–16, 24, 27, 28, 35, 39, 41, 47, 48, 52] та посилання в них). Саме Ok [39] довів обмеженість мінімізаторів еліптичних функціоналів двофазного типу у випадку $q > \frac{np}{n-p}$ за деяких додаткових припущень.

Точніше, за умови $\operatorname{osc}_{B_r(x_0)} a(x) \leq Ar^a$, $a \geq q - p$ функція u належить відповідному класу Де Джорджі $DG^+(\Omega)$ і є обмеженою сталою, що залежить від $\|u\|_{L^s}$ з $s \geq \frac{(q-p)n}{a+p-q}$. Ця умова, наприклад, дає можливість покращити результати регулярності [9–11, 14, 15] для необмежених мінімізаторів зі сталою, яка залежить від $\|u\|_{L^s}$. Слабка нерівність Гарнака для необмежених суперрозв'язків відповідних еліптичних рівнянь із узагальненими умовами зросту Орліча за так званих логарифмічних умов було доведено методом Мозера в [12].

Слабка нерівність Гарнака для функцій, що належать до відповідних еліптичних класів Де Джорджі $DG^-(\Omega)$, було доведено в [42] з нелогарифмічними умовами.

Перш, ніж сформулювати основний результат, нагадаємо означення класу De Giorgi.

Означення 1. Через $W^{1,\Phi}(B_R(x_0))$ будемо позначати клас функцій $u \in W^{1,1}(B_R(x_0))$ з $\int_{B_R(x_0)} \Phi(x, |\nabla u|) dx < \infty$ і будемо казати, що вимірна функція $u :$

$B_R(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ належить до еліптичного класу $DG_{\Phi}^{\pm}(B_R(x_0))$, якщо $u \in W^{1,\Phi}(B_R(x_0))$ та існують такі сталі $c > 0$, $q > 1$, що для будь-якої кулі $B_r(x_0) \subset B_R(x_0)$, будь-яких чисел $k \in \mathbb{R}$ і $\sigma \in (0, 1)$ мають місце нерівності:

$$\int_{B_r(x_0)} |\nabla(u-k)_{\pm}|^{p(x)} \zeta^q dx \leq \gamma \int_{B_r(x_0)} \left(\frac{u-k}{r\sigma} \right)_{\pm}^{p(x)} dx, \quad k \in \mathbb{R}, \sigma \in (0, 1), \quad (7)$$

де $(u-k)_{\pm} := \max\{\pm(u-k), 0\}$, $A_{k,r}^{\pm} := B_r(x_0) \cap \{(u-k)_{\pm} > 0\}$, $\zeta(x) \in C_0^{\infty}(B_r(x_0))$, $0 \leq \zeta(x) \leq 1$, $\zeta(x) = 1$ у $B_{(1-\sigma)r}(x_0)$ і $|\nabla \zeta(x)| \leq \frac{1}{\sigma r}$.

Будемо вважати параметри n , p , q структурними даними і писати γ , якщо константу можна визначити апіорно в термінах цих параметрів. Константа γ може змінюватися в рамках статті.

Основний результат представлено у теоремі.

Теорема 1. Нехай $u \in DG^-(\Omega)$, $u \geq 0$, $B_{8\rho}(x_0) \subset B_R(x_0) \subset \Omega$, і $u \in L_{loc}^m(\Omega)$ з деяким $m > 0$ і $\left(\int_{B_{2\rho}(x_0)} u^m \right)^{\frac{1}{m}} \leq d$. Тоді існує додатна константа C , що залежить тільки від відомих параметрів та d , така, що

$$\left(\int_{B_{\rho}(x_0)} u^{\theta} dx \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq C \left(\inf_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} u + \rho \right), \quad (8)$$

де $\int_{B_\rho(x_0)} u^\theta dx := |B_\rho(x_0)|^{-1} \int_{B_\rho(x_0)} u^\theta dx$ і $\theta > 0$ – деяке фіксоване число, що залежить тільки від відомих параметрів.

2 Допоміжні результати та інтегральні оцінки

2.1 Локальна кластерова лема

Один з основних кроків доведення теореми 1 передбачає використання локальної кластерової леми згідно DiBenedetto, Gianazza, Vespri [17] (див. також [18, 52]).

Лема 1. *Нехай $K_r(y)$ – куб у $\mathbb{R}^n$ з ребром r та центром у точці y і нехай $u \in W^{1,1}(K_r(y))$ задовольняє*

$$|(u - k)_-|_{W^{1,1}(K_r(y))} \leq \mathcal{K} k r^{n-1}, \quad \text{і} \quad |\{K_r(y) : u \geq k\}| \geq \alpha |K_r(y)|, \quad (9)$$

з деякими $\alpha \in (0, 1)$, $k \in \mathbb{R}$ та $\mathcal{K} > 0$. Тоді для будь-якого $\xi \in (0, 1)$ та будь-якого $\nu \in (0, 1)$ існує $\bar{x} \in K_r(y)$ та $\delta = \delta(n) \in (0, 1)$ такі, що

$$|\{K_{\bar{r}}(\bar{x}) : u \geq \xi k\}| \geq (1 - \nu) |K_{\bar{r}}(y)|, \quad \bar{r} := \delta \alpha^2 \frac{(1 - \xi)\nu}{\mathcal{K}} r. \quad (10)$$

2.2 Лема Де Джорджі–Пуанкаре

Наступна лема буде використана в подальшому, це є відома лема Де Джорджі–Пуанкаре (див. [32], Глава 2, Лема 3.9).

Лема 2. *Нехай $u \in W^{1,1}(B_r(y))$ для деякого $r > 0$ та $y \in \mathbb{R}^n$. Нехай k, l – дійсні числа, для яких справедлива нерівність $k < l$. Тоді існує така стала γ , яка залежить тільки від n , що*

$$(l - k) |A_{k,r}^-|^{1-\frac{1}{n}} \leq \gamma \frac{r^n}{|B_r(y) \setminus A_{l,r}^-|} \int_{A_{l,r}^- \setminus A_{k,r}^-} |\nabla u| dx,$$

де $A_{k,r}^- = B_r(y) \cap \{u < k\}$.

2.3 Локальні енергетичні оцінки

Для отримання локальних енергетичних оцінок доведемо спочатку допоміжний результат. Для будь-яких $k, r > 0$ позначимо $w(x) := \left(\frac{k}{r}\right)^{\ell(|x-x_0|)}$.

Лема 3. *Наступні нерівності виконуються для будь-яких $t, s > 0$:*

$$\sup_{r \leq k \leq r^{-\frac{n}{m}}} \left(\int_{B_r(x_0)} w^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_{B_r(x_0)} w^{-t} dx \right)^{\frac{1}{t}} \leq C \quad (11)$$

за умови, що $t L \left(1 + \frac{n}{m}\right) \frac{\log \log \frac{1}{r}}{\log \frac{1}{r}} \leq \frac{1}{2}$.

Доведення. Щоб довести нерівність (11), достатньо перевірити виконання наступних оцінок

$$r^{-n} \int_{B_r(x_0)} w^{-t} dx \leq \gamma \left(\frac{k}{r}\right)^{-t\ell(r)}, \quad (12)$$

$$r^{-n} \int_{B_r(x_0)} w^s dx \leq \gamma \left(\frac{k}{r}\right)^{s\ell(r)} \quad (13)$$

для $t > 0$ і $s > 0$. Нерівність (13) очевидна в силу зростання функції $\ell(|x - x_0|)$ на $x \in B_r(x_0)$ та в силу достатньої малості r . Перевіримо нерівність (12).

Інтегруючи частинами та зважаючи на зростання функції $\frac{\log \log \frac{1}{s}}{\log^2 \frac{1}{s}}$ на інтервалі $(0, r)$, отримаємо

$$\begin{aligned} r^{-n} \int_{B_r(x_0)} w^{-t} dx &= \gamma \int_0^r \left(\frac{k}{r}\right)^{-t\ell(s)} s^{n-1} ds \leq \\ &\leq r^n \left(\frac{k}{r}\right)^{-t\ell(r)} + t L \log \frac{k}{r} \frac{\log \log \frac{1}{r}}{\log^2 \frac{1}{r}} \int_0^r \left(\frac{k}{r}\right)^{-t\ell(s)} s^{n-1} ds \leq \\ &\leq r^n \left(\frac{k}{r}\right)^{-t\ell(r)} + t L \left(1 + \frac{n}{m}\right) \frac{\log \log \frac{1}{r}}{\log \frac{1}{r}} \int_0^r \left(\frac{k}{r}\right)^{-t\ell(s)} s^{n-1} ds \leq \\ &\leq r^n \left(\frac{k}{r}\right)^{-t\ell(r)} + \frac{1}{2} r^{-n} \int_{B_r(x_0)} w^{-t} dx \end{aligned}$$

за умови, що $t L \left(1 + \frac{n}{m}\right) \frac{\log \log \frac{1}{r}}{\log \frac{1}{r}} \leq \frac{1}{2}$, $r \leq v \leq r^{-\frac{n}{m}}$, з чого випливає оцінка (13), яка доводить (11). $\square$

Лема 4. Нехай $u \in DG_\Phi(B_R(x_0))$, тоді для будь-якого $r < R$ та будь-яких сталих $k \in \mathbb{R}$, $\sigma \in (0, 1)$, $\delta \in (0, 1)$ виконується така нерівність

$$\int_{A_{k, (1-\sigma)r}^-} |\nabla u|^{\bar{p}(1-\delta)} dx \leq \gamma \sigma^{-\bar{q}(1-\delta)} \left(\frac{k}{r}\right)^{\bar{p}(1-\delta)} r^n \left(\frac{|A_{k,r}^-|}{r^n}\right)^{\frac{(1-\delta)(s-1)}{s}}, \quad (14)$$

за умови, що $t L \left(1 + \frac{n}{m}\right) \frac{\log \log \frac{1}{r}}{\log \frac{1}{r}} \leq \frac{1}{2}$, де $\bar{q} = \max_{B_r(x_0)} p(x)$.

Доведення. Стартуючи з оцінки (7), маємо

$$\int_{A_{k,r}^-} |\nabla u|^{p(x)} \zeta^{\bar{q}} dx \leq \gamma \int_{B_r(x_0)} \left(\frac{(u-k)_-}{\sigma r} \right)^{p(x)} dx \leq \gamma \sigma^{-\bar{q}} \left(\frac{k}{r} \right)^{\bar{p}} \int_{A_{k,r}^-} w dx.$$

Звідки, використовуючи нерівність Юнга, отримаємо

$$\int_{A_{k,r}^-} w |\nabla u|^{\bar{p}} \zeta^{\bar{q}} dx \leq \int_{A_{k,r}^-} |\nabla u|^{p(x)} \zeta^{\bar{q}} dx + \int_{A_{k,r}^-} \left(\frac{k}{r} \right)^{p(x)} dx \leq \gamma \sigma^{-\bar{q}} \left(\frac{k}{r} \right)^{\bar{p}} \int_{A_{k,r}^-} w dx.$$

Комбінуючи отримані оцінки, маємо

$$\int_{B_r(x_0)} w |\nabla(u-k)_-|^{\bar{p}} \zeta^{\bar{q}} dx \leq \gamma \sigma^{-\bar{q}} \left(\frac{k}{r} \right)^{\bar{p}} \int_{A_{k,r}^-} w dx,$$

що призводить, в силу леми 3, до наступної оцінки

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x_0)} |\nabla(u-k)_-|^{\bar{p}(1-\delta)} \zeta^{\bar{q}} dx &\leq \left(\int_{B_r(x_0)} w |\nabla(u-k)_-|^{\bar{p}} \zeta^{\bar{q}} dx \right)^{1-\delta} \left(\int_{A_{k,r}^-} w^{-\frac{1-\delta}{\delta}} dx \right)^{\delta} \leq \\ &\leq \gamma \sigma^{-\bar{q}(1-\delta)} \left(\frac{k}{r} \right)^{\bar{p}(1-\delta)} \left(\int_{A_{k,r}^-} w dx \right)^{1-\delta} \left(\int_{A_{k,r}^-} w^{-\frac{1-\delta}{\delta}} dx \right)^{\delta} \leq \\ &\leq \gamma \sigma^{-\bar{q}(1-\delta)} \left(\frac{k}{r} \right)^{\bar{p}(1-\delta)} r^n \left(\frac{|A_{k,r}^-|}{r^n} \right)^{\frac{(1-\delta)(s-1)}{s}} \end{aligned}$$

з деякими $\delta \in (0, 1)$, $s > 1$. $\square$

2.4 Лема про розповсюдження додатності

Наступна лема є наслідком леми 4 та лем 6.2, 6.3 з [32, Глава 2].

Лема 5. Нехай $u \in DG^-(\Omega)$, $u \geq 0$, $B_r(\bar{x}) \subset B_\rho(x_0) \subset B_{8\rho}(x_0) \subset \Omega$, а також число $k > 0$ задовольняє умові:

$$k \leq \frac{1}{r^{\frac{n}{m}}}. \quad (15)$$

Нехай виконується умова

$$t L \left(1 + \frac{n}{m} \right) \frac{\log \log \frac{1}{r}}{\log \frac{1}{r}} \leq \frac{1}{2}, \quad (16)$$

покладемо також, що для деякого $\alpha_0 \in (0, 1)$ виконується оцінка

$$|\{B_{\frac{r}{2}}(\bar{x}) : u \geq k\}| \geq \alpha_0 |B_{\frac{r}{2}}(\bar{x})|, \quad (17)$$

тоді існує таке число $\eta_0 \in (0, 1)$, що залежить тільки від відомих параметрів та від α_0 , що або

$$k \leq \frac{r}{\eta_0}, \quad (18)$$

або

$$u(x) \geq \eta_0 k, \quad x \in B_r(\bar{x}). \quad (19)$$

Доведення леми майже не відрізняється від стандартного. Якщо (18) не виконується, то в силу (15) виконується нерівність (14). Детальне доведення представлено у Лемах 6.2 та 6.3 в [32, Глава 2].

3 Доведення теореми 1

Спочатку доведемо наступну лему.

Лема 6. Нехай $B_\rho(x_0) \subset B_{8\rho}(x_0) \subset \Omega$, $\left(\int_{B_{2\rho}(x_0)} u^m \right)^{\frac{1}{m}} \leq d$ і нехай справедлива нерівність

$$\left| \left\{ B_{\frac{\rho}{2}}(x_0) : u \geq N \right\} \right| \geq \alpha \left| B_{\frac{\rho}{2}}(x_0) \right|, \quad (20)$$

для деякого $N > 0$ і деякого числа $\alpha \in (0, 1)$. Тоді при виконанні умов леми 4 існують такі сталі C_2 , $\tau > 0$, які залежать лише від даних задачі, і d , що або має місце оцінка

$$\alpha^\tau \leq \frac{C_2 \rho}{N}, \quad (21)$$

або

$$\alpha^\tau \leq \frac{C_2}{N} \inf_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} u. \quad (22)$$

Доведення. Спочатку припустимо, що нерівність (21) порушується, тобто з деякими сталими $\tau > 0$ і $C_2 > 0$ маємо

$$\alpha^\tau N \geq C_2 \rho. \quad (23)$$

Зауважимо, що з нерівності (20) витікає така оцінка

$$|\{B_{2\rho}(x_0) : u \geq N\}| \geq 4^{-n} \alpha |B_{2\rho}(x_0)|. \quad (24)$$

Для того щоб далі застосувати лему 4 з $k = \varepsilon N$, де число ε буде обрано пізніше, нам знадобиться наступна оцінка, яка є наслідком нерівності (24)

$$\left(\int_{B_{2\rho}(x_0)} u^m dx \right)^{\frac{1}{m}} \geq N \left(\frac{|\{B_{2\rho}(x_0) : u \geq N\}|}{|B_{2\rho}(x_0)|} \right)^{\frac{1}{m}} \geq 4^{-\frac{n}{m}} \alpha^{\frac{1}{m}} N. \quad (25)$$

Крім того, використовуючи нерівність $(1+d)^{-1}4^{-\frac{n}{m}}\alpha^{\frac{1}{m}} < 1$, отримаємо:

$$|\{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0) : u \geq (1+d)^{-1}4^{-\frac{n}{m}}\alpha^{\frac{1}{m}}N\}| \geq |\{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0) : u \geq N\}| \geq \alpha|B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)|.$$

Обираючи $\varepsilon = (1+d)^{-1}4^{-\frac{n}{m}}\alpha^{\frac{1}{m}}$, з урахуванням (23) маємо

$$\varepsilon N = \alpha^{\frac{1}{m}}N(1+d)^{-1}4^{-\frac{n}{m}} \geq \alpha^{\tau}NC_2^{-1} \geq \rho,$$

за умови, що $\tau \geq \frac{1}{m}$ і $C_2 \geq (1+d)4^{\frac{n}{m}}$. З іншого боку, застосовуючи (25) і те, що $|B_2(x_0)| > 1$, отримаємо:

$$\varepsilon N \leq (1+d)^{-1} \left(\int_{B_{2\rho}(x_0)} u^m dx \right)^{\frac{1}{m}} \leq |B_{2\rho}(x_0)|^{-\frac{1}{m}} \frac{d}{d+1} \leq \rho^{-\frac{n}{m}}.$$

Отже, ми показали, що $\rho \leq \varepsilon N \leq \rho^{-\frac{n}{m}}$, що дозволяє застосувати лему 4 з $r = \rho$, $\sigma = 1/2$, $k = \varepsilon N$. Беручи до уваги, що

$$\int_{A_{\varepsilon N, \rho}^-} |\nabla u|^{\bar{p}(1-\delta)} \zeta^q(x) dx = \int_{A_{\varepsilon N, (1-\sigma)\rho}^-} |\nabla u|^{\bar{p}(1-\delta)} dx = \int_{B_{(1-\sigma)\rho}(x_0)} |\nabla(u - \varepsilon N)_-|^{\bar{p}(1-\delta)} dx,$$

можемо записати:

$$\int_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} |\nabla(u - \varepsilon N)_-|^{\bar{p}(1-\delta)} dx \leq \gamma \rho^n \left(\frac{\varepsilon N}{\rho} \right)^{\bar{p}(1-\delta)}. \quad (26)$$

Для того щоб застосувати локальну кластерову лему 1 перевіримо виконання умови (9). Використовуючи нерівності Пуанкаре, Гельдера і оцінку (26), отримаємо:

$$\|(u - \varepsilon N)_-\|_{W^{1,1}(B_{\frac{\rho}{2}}(x_0))} \leq |B_{\frac{\rho}{2}}|^{1-\frac{1}{\bar{p}(1-\delta)}} \|\nabla(u - \varepsilon N)_-\|_{L^{\bar{p}(1-\delta)}(B_{\frac{\rho}{2}}(x_0))} \leq \gamma \left(\frac{\rho}{2} \right)^{n-1} \varepsilon N.$$

Тепер застосуємо лему 1 з $k = \varepsilon N$, $\nu = \frac{1}{4}$, $\xi = \frac{1}{4}$, $\mathcal{K} = \gamma$, $r = \frac{\rho}{2}$. Отже, існує $\bar{x} \in B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)$ і $\delta = \delta(n)$, що при $\bar{r} \leq \rho$ має місце оцінка

$$\left| \left\{ B_{\bar{r}}(\bar{x}) : u \geq \frac{\varepsilon N}{4} \right\} \right| \geq \frac{3}{4} |B_{\bar{r}}(x_0)|, \quad \bar{r} = \delta_0 \alpha^2 \rho, \text{ де } \delta_0 := \frac{3\delta}{32\gamma}. \quad (27)$$

Щоб далі використати лему 5, перевіримо виконання умови $\bar{r} \leq \frac{\varepsilon N}{4} \leq \bar{r}^{-\frac{n}{m}}$. Спочатку покажемо виконання верхньої оцінки:

$$\frac{\varepsilon N}{4} \leq \frac{1}{4} \frac{1}{\rho^{\frac{n}{m}}} \leq \frac{1}{\rho^{\frac{n}{m}}} \leq \frac{1}{\bar{r}^{\frac{n}{m}}}.$$

З іншого боку із умови (23) витікає, що справедлива оцінка

$$\frac{1}{4}\varepsilon N = \frac{1}{4^{1+\frac{n}{m}}}(1+d)^{-1}\alpha^{\frac{1}{m}}N \geq C_2^{-1}\alpha^\tau N \geq \rho \geq \bar{r},$$

якщо $\tau \geq \frac{1}{m}$ і $C_2 \geq (1+d)4^{1+\frac{n}{m}}$.

Отже, застосовуючи лему 5 з $\alpha_0 = \frac{3}{4}$, $r = \bar{r}$ і $k = \frac{\varepsilon N}{4}$, ми отримуємо оцінку з деякою сталою $\eta_0 \in (0, 1)$, яка залежить лише від даних задачі

$$u(x) \geq \eta_0 \frac{\varepsilon N}{4}, \quad x \in B_{2\bar{r}}(\bar{x}),$$

за умови, що $C_2 \geq (1+d)4^{1+\frac{n}{m}}\eta_0^{-1}$.

Повторюючи цю процедуру $j-1$ разів, приходимо до наступної оцінки

$$u(x) \geq \frac{\eta_0^j \varepsilon N}{4}, \quad x \in B_{2^j \bar{r}}(\bar{x}), \quad (28)$$

справедливість якої обумовлена виконанням нерівності

$$2^j \bar{r} \leq \frac{\eta_0^j \varepsilon N}{4} \leq (2^j \bar{r})^{-\frac{n}{m}},$$

яке має місце при $\tau \geq \frac{1}{m} - 2\log_2 \eta_0$, $C_2 \geq (1+d)4^{1+\frac{n}{m}}\delta_0^{\log_2 \eta_0}$ та за умови, що j обирається з рівності $2^j \bar{r} = \rho$.

Отже з нерівності (28) витікає виконання оцінки

$$\alpha^\tau \leq \frac{C_2}{N} u(x) \quad \forall x \in B_{\frac{\rho}{2}}(x_0),$$

що завершує доведення леми. $\square$

Щоб завершити доведення слабкої нерівності Гарнака, визначимо $\bar{m}(\rho) = \inf_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} u(x) + \rho$ і оцінимо наступний інтеграл

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(x_0)} u^\theta dx &= \frac{\theta}{|B_\rho(x_0)|} \int_0^\infty |\{B_\rho(x_0) : u(x) > N\}| N^{\theta-1} dN = \\ &= \frac{\theta}{|B_\rho(x_0)|} \int_0^{\bar{m}(\rho)} |\{B_\rho(x_0) : u(x) > N\}| N^{\theta-1} dN + \\ &\quad + \frac{\theta}{|B_\rho(x_0)|} \int_{\bar{m}(\rho)}^\infty |\{B_\rho(x_0) : u(x) > N\}| N^{\theta-1} dN, \end{aligned}$$

де $\theta \in (0, \frac{1}{2\tau}]$. Зауважимо, що із виконання оцінки $\frac{|\{B_\rho(x_0): u(x) > N\}|}{|B_\rho(x_0)|} \geq \alpha$ витікає справедливості нерівності $\frac{|\{B_\rho(x_0): u(x) > N\}|}{|B_\rho(x_0)|} \leq \gamma\alpha$ з деякою додатною сталою γ . І тепер застосовуючи лему 6 з урахуванням того, що $\alpha \leq \left(\frac{C_2}{N} (\rho + \inf_{B_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} u) \right)^{\frac{1}{\tau}} = C_2^{\frac{1}{\tau}} N^{-\frac{1}{\tau}} (\bar{m}(\rho))^{\frac{1}{\tau}}$, отримаємо

$$\int_{B_\rho(x_0)} u^\theta dx \leq \gamma (\bar{m}(\rho))^\theta,$$

що завершує доведення теореми 1.

Acknowledgements.

This work is partially supported by grant of the National Academy of Sciences of Ukraine (project “Mathematical modelling of complex dynamical systems and processes caused by the state security”, Reg. No. 0123U100853), and by the European Union as part of a Marie Skłodowska–Curie Postdoctoral Fellowship.

References

1. Alkhutov, Yu.A. (1997). The Harnack inequality and the Hölder property of solutions of nonlinear elliptic equations with a nonstandard growth condition. *Differ. Uravn.*, 33(12), 1651–1660; transl. in (1998). *Differential Equations*, 33(12), 1653–1663.
2. Alkhutov, Yu.A. (2005). On the Hölder continuity of $p(x)$ -harmonic functions. *Sb. Math.*, 196(1-2), 147–171.
3. Alkhutov, Yu.A., Krasheninnikova, O.V. (2004). Continuity at boundary points of solutions of quasilinear elliptic equations with a nonstandard growth condition. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 68(6), 3–60.
4. Alkhutov, Yu.A., Krasheninnikova, O.V. (2008). On the continuity of solutions of elliptic equations with a variable order of nonlinearity. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 261, 7–15; transl. in (2008). *Proc. Steklov Inst. Math.*, 261, 1–10.
5. Alkhutov, Yu.A., Surnachev, M.D. (2019). A Harnack inequality for a transmission problem with $p(x)$ -Laplacian. *Appl. Anal.*, 98(1-2), 332–344.
6. Alkhutov, Yu.A., Surnachev, M.D. (2020). Harnack's inequality for the $p(x)$ -Laplacian with a two-phase exponent $p(x)$. *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 244(2), 116–147.
7. Alkhutov, Yu.A., Surnachev, M.D. (2019). Behavior at a boundary point of solutions of the Dirichlet problem for the $p(x)$ -Laplacian. *Algebra i Analiz*, 31(2), 88–117; transl. in (2020). *St. Petersburg Math. J.*, 31(2), 251–271.
8. Antontsev, S.N., Díaz, J.I., Shmarev, S. (2002). Energy Methods for Free Boundary Problems. Applications to Nonlinear PDEs and Fluid Mechanics. In: *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*, vol. 48, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA.
9. Baroni, P., Colombo, M., Mingione, G. (2015). Harnack inequalities for double phase functionals. *Nonlinear Anal.*, 121, 206–222.
10. Baroni, P., Colombo, M., Mingione, G. (2016). Non-autonomous functionals, borderline cases and related function classes. *St. Petersburg Math. J.*, 27, 347–379.
11. Baroni, P., Colombo, M., Mingione, G. (2018). Regularity for general functionals with double phase. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 57, 62.
12. Benyaiche, A., Harjulehto, P., Hästö, P., Karppinen, A. (2021). The weak Harnack inequality for unbounded supersolutions of equations with generalized Orlicz growth. *J. of Diff. Equations*, 275, 790–814.

13. Buryachenko, K.O., Skrypnik, I.I. (2022). Local continuity and Harnack's inequality for double-phase parabolic equations. *Potential Analysis*, 56(1), 137–164.
14. Colombo, M., Mingione, G. (2015). Bounded minimisers of double phase variational integrals. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 218(1), 219–273.
15. Colombo, M., Mingione, G. (2015). Regularity for double phase variational problems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 215(2), 443–496.
16. Colombo, M., Mingione, G. (2016). Calderon-Zygmund estimates and non-uniformly elliptic operators. *J. Funct. Anal.*, 270, 1416–1478.
17. DiBenedetto, E., Gianazza, U., Vespri, V. (2006). Local clustering of the non-zero set of functions in $W^{1,1}(E)$. *Rend. Lincei Mat. Appl.*, 17, 223–225.
18. DiBenedetto, E., Gianazza, U., Vespri, V. (2012). Harnack's Inequality for Degenerate and Singular Parabolic Equations. Springer, New York.
19. DiBenedetto, E., Trudinger, N.S. (1984). Harnack inequalities for quasi-minima of variational integrals. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 1(4), 295–308.
20. Diening, L., Harjulehto, P., Hästö, P., Růžička, M. (2017). Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. In: *Lecture Notes in Mathematics, 2017*. Springer, Heidelberg, 2011.
21. Fan, X. (1995). *A Class of De Giorgi Type and Hölder Continuity of Minimizers of Variational with $m(x)$ -Growth Condition*. China, Lanzhou Univ.
22. Fan, X., Zhao, D. (1999). A class of De Giorgi type and Hölder continuity. *Nonlinear Anal.*, 36, 295–318.
23. Gariepy, R., Ziemer, W.P. (1977). A regularity condition at the boundary point for solutions of quasilinear elliptic equations. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 67, 25–39.
24. Hadzhy, O.V., Skrypnik, I.I., Voitovych, M.V. Interior continuity, continuity up to the boundary and Harnack's inequality for double-phase elliptic equations with non-logarithmic growth, *Math. Nachrichten*, in press.
25. Harjulehto, P., Hästö, P. (2019). Orlicz Spaces and Generalized Orlicz Spaces. In: *Lecture Notes in Mathematics, vol. 2236*, Springer, Cham.
26. Harjulehto, P., Hästö, P. (2019). Boundary regularity under generalized growth conditions. *Z. Anal. Anwend.*, 38(1), 73–96.
27. Harjulehto, P., Hästö, P., Lee, M. (2021). Hölder continuity of quasiminimizers and ω -minimizers of functionals with generalized Orlicz growth. *Ann. Sc. Norm. Super Pisa Cl. Sci.*, 5, XXII(2), 549–582.
28. Harjulehto, P., Hästö, P., Toivanen, O. (2017). Hölder regularity of quasiminimizers under generalized growth conditions. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 56(2), Art. 22.
29. Harjulehto, P., Kuusi, T., Lukkari, T., Marola, N., Parviainen, M. (2008). Harnack's inequality for quasiminimizers with non-standard growth conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, 344(1), 504–520.
30. Krasheninnikova, O.V. (2002). On the continuity at a point of solutions of elliptic equations with a nonstandard growth condition. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1(236), 193–200.
31. Krylov, N.V., Safonov, M.V. (1980). A property of the solutions of parabolic equations with measurable coefficients. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 44(1), 161–175.
32. Ladyzhenskaya, O.A., Ural'tseva, N.N. (1973). *Linear and quasilinear elliptic equations*. Nauka, Moscow.
33. Landis, E.M. (1963). Some questions in the qualitative theory of second-order elliptic equations (case of several independent variables). *Uspehi Mat. Nauk*, 18, 1(109), 3–62.
34. Landis, E.M. (1998). Second Order Equations of Elliptic and Parabolic Type. In: *Translations of Mathematical Monographs, vol. 171*. American Math. Soc., Providence, RI.
35. Lieberman, G.M. (1991). The natural generalization of the natural conditions of Ladyzhenskaya and Ural'tseva for elliptic equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 16(2-3), 311–361.
36. Marcellini, P. (1989). Regularity of minimizers of integrals of the calculus of variations with non standard growth conditions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 105(3), 267–284.
37. Marcellini, P. (1991). Regularity and existence of solutions of elliptic equations with p, q -growth conditions. *J. Differential Equations*, 90(1), 1–30.

38. Maz'ya, V.G. (1967). Behavior, near the boundary, of solutions of the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation in divergent form. *Math. Notes of Ac. of Sciences of USSR*, 2, 610–617.
39. Ok, J. (2018). Harnack inequality for a class of functionals with non-standard growth via De Giorgi's method. *Adv. Nonlinear Anal.*, 7(2), 167–182.
40. Růžička, M. (2000). Electrorheological fluids: Modeling and Mathematical Theory. In: *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1748. Springer-Verlag, Berlin.
41. Savchenko, M.O., Skrypnik, I.I., Yevgenieva, Y.A. (2023). Continuity and Harnack inequalities for local minimizers of non uniformly elliptic functionals with generalized Orlicz growth under the non-logarithmic conditions. *Nonl. Analysis*, 230, 113221.
42. Savchenko, M.O., Skrypnik, I.I., Yevgenieva, Y.A. (2023). A note on the weak Harnack inequality for unbounded minimizers of elliptic functionals with generalized Orlicz growth, arXiv:2304.04499.
43. Savchenko, M.O., Skrypnik, I.I., Voitovych, M.V. (2020). Harnack's inequality for quasilinear elliptic equations with generalized Orlicz growth, arxiv:2008.03744v1 [math.AP].
44. Skrypnik, I.V. (1983). Pointwise estimates of certain capacitative potentials. In: *General theory of boundary value problems*, pp. 198–206. Naukova Dumka, Kiev.
45. Skrypnik, I.V. (1994). Methods for Analysis of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems. In: *Translations of Mathematical Monographs*, vol. 139. American Math. Soc., Providence, RI.
46. Skrypnik, I.V. (2008). Selected works. In: *Problems and Methods. Mathematics. Mechanics. Cybernetics*, vol. 1. Naukova Dumka, Kiev.
47. Skrypnik, I.I., Voitovych, M.V. (2019). $\mathfrak{B}_1$ classes of De Giorgi, Ladyzhenskaya and Ural'tseva and their application to elliptic and parabolic equations with nonstandard growth, *Ukr. Mat. Visn.*, 16(3), 403–447.
48. Skrypnik, I.I., Voitovych, M.V. (2021). $\mathcal{B}_1$ classes of De Giorgi-Ladyzhenskaya-Ural'tseva and their applications to elliptic and parabolic equations with generalized Orlicz growth conditions. *Nonlinear Anal.*, 202, 112135.
49. Skrypnik, I.I. (2022). Harnack's inequality for singular parabolic equations with generalized Orlicz growth under the non-logarithmic Zhikov's condition. *J. of Evolution Equations*, 22(2), 45.
50. Skrypnik, I.I., Yevgenieva, Ye.A. (to appear). Harnack inequality for solutions of the $p(x)$ -Laplace equation under the precise non-logarithmic Zhikov's conditions. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*
51. Surnachev, M.D. (2018). On Harnack's inequality for $p(x)$ -Laplacian. *Keldysh Institute Preprints*, 69, 10.20948/prepr-2018-69, 1–32.
52. Surnachev, M.D. (2021). On the weak Harnack inequality for the parabolic $p(x)$ -Laplacian. *Asymptotic Analysis*, DOI:10.3233/ASY-211746.
53. Weickert, J. (1998). Anisotropic Diffusion in Image Processing. In: *European Consortium for Mathematics in Industry*. B.G. Teubner, Stuttgart.
54. Zhikov, V.V. (1983). Questions of convergence, duality and averaging for functionals of the calculus of variations. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 47(5), 961–998.
55. Zhikov, V.V. (1986). Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 50(4), 675–710, 877.
56. Zhikov, V.V. (1995). On Lavrentiev's phenomenon. *Russian J. Math. Phys.*, 3(2), 249–269.
57. Zhikov, V.V. (1998). On some variational problems, *Russian J. Math. Phys.*, 5(1), 105–116.
58. Zhikov, V.V. (2004). On the density of smooth functions in Sobolev-Orlicz spaces. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 310, Kraev. Zadachi Mat. Fiz. i Smezh. Vopr. Teor. Funkts., 35 [34], 67–81, 226; transl. in (2006). *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 132(3), 285–294.
59. Zhikov, V.V., Kozlov, S.M., Oleinik, O.A. (1994). *Homogenization of differential operators and integral functionals*. Springer-Verlag, Berlin.
60. Zhikov, V.V., Pastukhova, S.E. (2008). On the improved integrability of the gradient of solutions of elliptic equations with a variable nonlinearity exponent. *Mat. Sb.*, 199(12), 19–52; transl. in *Sb. Math.*, 199(11–12), 1751–1782.

M. Savchenko, I. Skrypnik, Ye. Yevgenieva

Weak Harnack inequality for unbounded solutions to the $p(x)$ -Laplace equation under the precise non-logarithmic conditions.

The study of the regularity of solutions to the elliptic equations with non-standard growth has been initiated by Zhikov, Marcellini, and Lieberman, and in the last thirty years, the qualitative theory of second-order elliptic and parabolic equations has been actively developed. Equations of this type and systems of such equations arise in various problems of mathematical physics and engineering (e.g. in describing electrorheological fluids, or in image recognition and data denoising). There are two cases of the type of growth. The simple so-called "logarithmic" case is studied very well and there are a lot of classical results in this regard. But the so-called "non-logarithmic" growth differs substantially from the logarithmic case. The non-logarithmic condition introduced by Zhikov turned out to be a precise condition for the smoothness of finite functions in the corresponding Sobolev space, which makes it extremely interesting to study. But to our knowledge, there are only a few results in this direction. Zhikov and Pastukhova proved higher integrability of the gradient of solutions to the $p(x)$ -Laplace equation under the non-logarithmic condition. Interior continuity, continuity up to the boundary, and Harnack's inequality to the $p(x)$ -Laplace equation were proved by Alkhutov, Krashennnikova, and Surnachev. These results were generalized by Skrypnik and Voitovich. The qualitative properties of bounded solutions of $p(x)$ -Laplace equation under the non-logarithmic condition were established by Skrypnik and Yevgenieva. As for unbounded solutions, there are just a few results. Ok has proved the boundedness of minimizers of elliptic functionals of the double-phase type under some assumptions on the growth parameters. The obtained condition gives a possibility to improve the regularity results for unbounded minimizers. The weak Harnack inequality for unbounded supersolutions of the corresponding elliptic equations with generalized Orlicz growth under the so-called logarithmic conditions was proved by Benyaiche, Harjulehto, Hästö and Karppinen. In the current paper, the weak Harnack inequality for unbounded solutions to the $p(x)$ -Laplace equation has been proved under the precise non-logarithmic condition on the function $p(x)$.

Keywords: $p(x)$ -Laplace equation, weak Harnack's inequality, unbounded solutions, non-log conditions.

Ін-т прикл. математики і механіки НАН України, Слов'янськ,
Брауншвейзький технічний університет
shan_maria@ukr.net, ihor.skrypnik@gmail.com,
yevgenia.yevgenieva@gmail.com

Отримано 24.06.2023