

UDC: 517.9

DOI: 10.37069/1683-4720-2023-37-6

©2023. С.М. Чуйко, О.В. Несмєлова, М.В. Попов

МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦІЇ АДОМЯНА У ТЕОРІЇ СЛАБКОНЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Проблема розв'язності нелінійних крайових задач бере свій початок із класичної теорії періодичних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, розвинутої в роботах А. Пуанкаре, О.М. Ляпунова, І.Г. Малкіна, Ю.О. Митропольського, А.М. Самойленка, О.А. Бойчука та інших. У класичних роботах Р. Беллмана, Дж. Хейла, Ю.О. Митропольського, А.М. Самойленка та О.А. Бойчука отримані умови розв'язності нелінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь у критичних випадках. Для знаходження розв'язків нелінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь у критичних випадках у монографіях А.М. Самойленка та О.А. Бойчука побудовані ітераційні схеми з використанням методу простих ітерацій. У роботах О.А. Бойчука та С.М. Чуйка для знаходження розв'язків нелінійних крайових задач побудовані ітераційні схеми за схемою Ньютона – Канторовича з квадратичною збіжністю, а також отримані конструктивні умови збіжності. При побудові розв'язків нелінійної крайової задачі за допомогою методу простих ітерацій виникає проблема неможливості знаходження розв'язків в елементарних функціях, яка, у свою чергу, приводить до великих похибок у наближеннях до розв'язків цієї задачі. Спрощення обчислень нелінійних крайових задач, зокрема, періодичних крайових задач, в елементарних функціях може бути досягнуте з використанням методу декомпозиції Адомяна. Досліджена у статті техніка побудови наближень до розв'язків слабокнелінійних крайових задач з використанням методу декомпозиції Адомяна відрізняється від попередніх результатів авторів крайовою умовою, кількість компонент якої, взагалі кажучи, не співпадає з розмірністю розв'язку. Отримані результати можуть бути перенесені на слабокнелінійні крайові задачі з крайовою умовою з використанням нелінійних обмежених векторних функціоналів. У статті отримано конструктивні умови розв'язності та схему побудови розв'язків слабокнелінійної крайової задачі для звичайного диференціального рівняння у критичному випадку з використанням методу декомпозиції Адомяна.

MSC: 34B15.

Ключові слова: слабокнелінійні крайові задачі, метод декомпозиції Адомяна.**1. Постановка задачі.**

Досліджуємо задачу про побудову

$$z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

[1–3] слабокнелінійної крайової задачі

$$dz/dt = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon), \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha \quad (1)$$

у малому околі

$$z_0(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$$

Робота підтримана Національною академією наук України за конкурсом науково-дослідних робіт молодих учених НАН України у 2023 р. (р/н 0123U103046.)

породжуючої задачі

$$dz_0/dt = A(t)z_0 + f(t), \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha. \quad (2)$$

Тут $A(t)$ – неперервна по незалежній змінній t на відрізку $[a, b]$ матриця, $Z(z, t, \varepsilon)$ – нелінійна вектор-функція, аналітична за невідомою z у малому околі розв’язку породжуючої задачі (2) та неперервна по малому параметру ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. Крім того, вектор-функція $Z(z, t, \varepsilon)$ та функція $f(t)$ неперервні по незалежній змінній t на відрізку $[a, b]$, крім того $\ell z(\cdot)$ – лінійний обмежений векторний функціонал [1–3]

$$\ell z(\cdot) : \mathbb{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Актуальність вивчення крайової задачі (1) пов’язана з широким застосуванням подібних задач при вивченні неізотермічних хімічних реакцій [4], а також періодичних процесів у біологічних системах, механіці, радіотехніці, теорії керування, теорії стійкості руху [1–3, 5]. Наприкінці статті буде наведено приклад знаходження наближень до періодичного розв’язку цієї задачі з використанням побудованої нами ітераційної схеми.

У статтях [6, 7], використовуючи ефективний метод Ньютона–Канторовича [8], знайдені наближення до розв’язків нелінійних крайових задач, зокрема, періодичних крайових задач. При побудові розв’язків нелінійних крайових задач виникає проблема неможливості знаходження розв’язків в елементарних функціях, яка, у свою чергу, приводить до великих похибок розв’язків нелінійних крайових задач. Подібна проблема була продемонстрована для періодичної задачі для рівняння, яке визначає рух супутника на еліптичній орбіті [9, 10].

Крім того, побудова розв’язків нелінійних крайових задач з використанням методу простих ітерацій [1] значно ускладнюється обчисленням похідних нелінійностей. У статтях [6, 7] прискорення збіжності ітераційних досягнуто обчисленням похідних нелінійностей на кожному кроці. Враховуючи зазначене, спрощення обчислень похідних нелінійностей та можливість знаходження розв’язків нелінійних крайових задач, зокрема, періодичних крайових задач, в елементарних функціях можуть бути досягнуті з використанням методу декомпозиції Адомяна [11, 12]. Приклад такого спрощення буде наведено нижче.

2. Необхідна умова розв’язності.

Досліджуємо критичний випадок:

$$P_{Q^*} \neq 0,$$

причому припускаємо виконаною умову

$$P_{Q_d^*} \left\{ \alpha - \ell K \left[f(s) \right] (\cdot) \right\} = 0; \quad (3)$$

в цьому випадку породжуюча задача (2) має сім’ю розв’язків

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G \left[f(s); \alpha \right] (t), \quad r := n - n_1, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $X(t)$ – нормальна ($X(a) = I_n$) фундаментальна матриця однорідної частини системи (2), $Q = \ell X(\cdot)$ – $(m \times n)$ -матриця,

$$\text{rank } Q = n_1, \quad X_r(t) := X(t)P_{Q_r},$$

P_{Q_r} – $(n \times r)$ -матриця, утворена з r лінійно-незалежних стовпців $(n \times n)$ -матриці-ортопроектора

$$P_Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(Q),$$

$P_{Q_d^*}$ – $(d \times m)$ -матриця, утворена з $(d := m - n_1)$ лінійно незалежних рядків $(m \times m)$ -матриці-ортопроектора

$$P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(Q^*).$$

Крім того

$$G[f(s); \alpha](t) = K[f(s)](t) + X(t)Q^+ \left\{ \alpha - \ell K[f(s)](\cdot) \right\}$$

– узагальнений оператор Гріна крайової задачі (2),

$$K[f(s)](t) = X(t) \int_a^t X^{-1}(s)f(s)ds$$

– оператор Гріна задачі Коші для системи (2), Q^+ – псевдообернена матриця за Муром–Пенроузом [1]. Необхідна і достатня умова розв’язності слабконелінійної крайової задачі (1)

$$P_{Q_d^*} \ell K \left[Z(z(s, \varepsilon), s, \varepsilon) \right](\cdot) = 0$$

приводить до необхідної умови розв’язності задачі (1) у малому околі розв’язку породжуючої задачі (2):

$$F_0(c_r) := P_{Q_d^*} \ell K \left[A_0(z_0(s, c_r), s) \right](\cdot) = 0. \quad (4)$$

Рівняння (4) будемо далі називати рівнянням для породжуючих амплітуд слабконелінійної крайової задачі (1).

3. Достатня умова розв’язності.

Припустимо, що рівняння для породжуючих амплітуд (4) має дійсні корені. Фіксуємо один із дійсних розв’язків $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ рівняння (4), приходимо до задачі про побудову розв’язку нелінійної крайової задачі (1) у малому околі розв’язку

$$z_0(t, c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G[f(s); \alpha](t), \quad c_r^* \in \mathbb{R}^r$$

породжуючої задачі (2). Позначимо $(d \times r)$ – вимірну матрицю

$$B_0 := P_{Q_d^*} \ell K \left[\mathcal{A}_1(s) X_r(s) \right] (\cdot).$$

Традиційною умовою розв’язності задачі (1) у малому околі розв’язку породжуючої задачі (2) є вимога простоти коренів [1–3]

$$P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0 \quad (5)$$

рівняння (4) породжуючих амплітуд задачі (1); тут

$$\mathcal{A}_1(t) = \frac{\partial Z(z, t, \varepsilon)}{\partial z} \bigg|_{\substack{z = z_0(t, c_r^*) \\ \varepsilon = 0}}$$

– $(n \times n)$ – вимірна матриця. Розв’язок крайової задачі (1) шукаємо у вигляді

$$z(t, \varepsilon) := z_0(t, c_r^*) + u_1(t, \varepsilon) + \dots + u_k(t, \varepsilon) + \dots$$

Нелінійна вектор-функція $Z(z, t, \varepsilon)$ аналітична за невідомою z в околі розв’язку $z_0(t, c_r^*)$ породжуючої задачі (2), тому у зазначеному околі має місце розклад [11, с. 502]

$$\begin{aligned} Z(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = & A_0(z_0(t, c_r^*), t) + A_1(z_0(t, c_r^*), u_1(t), t, \varepsilon) + \\ & + A_2(z_0(t, c_r^*), u_1(t, \varepsilon), u_2(t, \varepsilon), t, \varepsilon) + \dots + A_n(z_0(t, c_r^*), u_1(t, \varepsilon), \dots, u_n(t, \varepsilon), t, \varepsilon) + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Перше наближення до розв’язку нелінійної крайової задачі (1) у критичному випадку

$$z_1(t, \varepsilon) := z_0(t, c_r^*) + u_1(t, \varepsilon), \quad u_1(t, \varepsilon) = X_r(t) c_1 + \varepsilon G \left[A_0(z_0(s, c_r^*)) \right] (t), \quad c_1 \in \mathbb{R}^r$$

визначає розв’язок нелінійної крайової задачі першого наближення

$$\frac{du_1(t, \varepsilon)}{dt} = A(t) u_1(t, \varepsilon) + A_0(z_0(t, c_r^*)), \quad \ell u_1(\cdot, \varepsilon) = 0.$$

Розв’язність крайової задачі першого наближення гарантована вибором розв’язку $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ рівняння для породжуючих амплітуд (4). Друге наближення до розв’язку нелінійної крайової задачі (1) у критичному випадку

$$z_2(t, \varepsilon) := z_0(t, c_r^*) + u_1(t, \varepsilon) + u_2(t, \varepsilon)$$

визначає розв’язок нелінійної крайової задачі другого наближення

$$\frac{du_2(t, \varepsilon)}{dt} = A(t) u_2(t, \varepsilon) + A_1(z_0(t, c_r^*), u_1(t, \varepsilon), \varepsilon), \quad \ell u_2(\cdot, \varepsilon) = 0;$$

тут

$$u_2(t, \varepsilon) = X_r(t)c_2 + \varepsilon G \left[A_1(z_0(s, c_r^*), u_1(s, \varepsilon), \varepsilon) \right] (t), \quad c_2 \in \mathbb{R}^r.$$

Умова розв'язності крайової задачі другого наближення

$$F_1(c_1) := P_{Q_d^*} \ell K \left[A_1(z_0(s, c_r^*), u_1(s, \varepsilon), \varepsilon) \right] (\cdot) = 0$$

являє собою лінійне рівняння

$$F_1(c_1) = B_0 c_1 + d_1(\varepsilon) = 0, \quad (7)$$

однозначно розв'язне за умови (5) простоти коренів рівняння (4) породжуючих амплітуд; тут

$$B_0 = F'_1(c_1) \in \mathbb{R}^{d \times r}, \quad d_1(\varepsilon) := F_1(c_1) - B_0 c_1.$$

Дійсно, позначимо вектор-функцію [18]

$$v(t, \mu) := z_0(t, c_r^*) + \mu u_1(t, \varepsilon) + \dots + \mu^k u_k(t, \varepsilon) + \dots,$$

при цьому

$$\begin{aligned} F_1(c_1) &:= P_{Q_r^*} \ell K \left[A_1(z_0(s, c_r^*), u_1(s, \mu)) \right] (\cdot) = \\ &= P_{Q_r^*} \ell K \left[Z'_\mu(v(s, \mu), s, \varepsilon) \right] (\cdot) \Big|_{\mu=0} = P_{Q_r^*} \ell K \left[\mathcal{A}_1(s) u_1(s, \varepsilon) \right] (\cdot), \end{aligned}$$

отже

$$B_0 = F'_1(c_1).$$

Таким чином, за умови (5) простоти коренів рівняння (4) породжуючих амплітуд задачі (1) отримуємо принаймні один розв'язок крайової задачі першого наближення

$$u_1(t, \varepsilon) = X_r(t)c_1 + \varepsilon G \left[A_0(z_0(s, c_r^*)) \right] (t), \quad c_1 = -B_0^{-+} d_1(\varepsilon).$$

Умови розв'язності крайових задач наступних наближень

$$F_j(c_j) := P_{Q_d^*} \ell K \left[A_1(z_0(s, c_r^*), u_1(s, \varepsilon), \dots, u_j(s, \varepsilon)) \right] (\cdot) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

являють собою лінійні рівняння

$$F_j(c_j) = B_0 c_j + d_j(\varepsilon) = 0; \quad (8)$$

тут

$$B_0 = F'(c_j) \in \mathbb{R}^{d \times r}, \quad d_j(\varepsilon) := F(c_j) - B_0 c_j, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

За умови (5) простоти коренів рівняння (4) породжуючих амплітуд задачі (1) рівняння (8) має принаймні один розв'язок. Послідовність наближень до розв'язку нелінійної крайової задачі (1) у критичному випадку визначає ітераційна схема

$$\begin{aligned} u_1(t, \varepsilon) &= X_r(t)c_1 + \varepsilon G \left[A_0(z_0(s, c_r^*)) \right] (t), \quad c_1 = -B_0^{-+} d_1(\varepsilon), \\ z_{k+1}(t, \varepsilon) &:= z_0(t, c_r^*) + u_1(t, \varepsilon) + \dots + u_{k+1}(t, \varepsilon), \quad c_k = -B_0^{-1} d_k(\varepsilon), \\ u_{k+1}(t, \varepsilon) &= X_r(t)c_{k+1} + \varepsilon G \left[A_k(z_0(s, c_r^*), u_1(s, \varepsilon), \dots, u_k(s, \varepsilon)) \right] (t), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Проміжок значень малого параметру $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $0 \leq \varepsilon_* \leq \varepsilon_0$, для яких зберігається збіжність ітераційної схеми (9) до розв'язку періодичної крайової задачі (1) у критичному випадку можна оцінити аналогічно [1, 15–18].

Теорема. У критичному випадку ($P_{Q^*} \neq 0$) породжуюча періодична крайова задача (2) за умови (3) має r -параметричну сім'ю розв'язків

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G \left[f(s); \alpha \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Якщо при цьому задача про побудову розв'язку нелінійної крайової задачі (1) у малому околі розв'язку породжуючої задачі (2) у критичному випадку розв'язна, то рівняння (4) для породжуючих амплітуд має дійсні корені. За умови (5) простоти коренів рівняння (4) для породжуючих амплітуд задача (1) має принаймні один розв'язок. Послідовність наближень до розв'язку нелінійної крайової задачі (1) визначає ітераційна схема (9). Якщо існує константа $0 < \gamma < 1$, для якої має місце нерівність

$$\|u_1(t, \varepsilon)\| \leq \gamma \|z_0(t, c_r^*)\|, \quad \|u_{k+1}(t, \varepsilon)\| \leq \gamma \|u_k(t, \varepsilon)\|, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

то ітераційна схема (9) збігається до розв'язку нелінійної крайової задачі (1).

Приклад нелінійної крайової задачі, для якої справджуються умови доведеної теореми, був запропонований студенткою фізико-математичного факультету Слов'янського державного педагогічного університету О. Зінченко [19]. Особливістю цього прикладу є той факт, що при побудові розв'язків за допомогою методу простих ітерацій [1, 3, 16] для цієї нелінійної крайової задачі виникає проблема неможливості знаходження розв'язків в елементарних функціях, яка, у свою чергу, приводить до великих похибок розв'язків цієї задачі. При побудові розв'язків за допомогою методу найменших квадратів точність вища, проте величина похибок розв'язків цієї задачі не змінюється після другої ітерації [19].

Приклад. Продемонструємо ефективність доведеної теореми на прикладі задачі про знаходження аналітичних розв'язків нелінійної крайової задачі

$$\frac{dz}{dt} = (2t - 1)z + \varepsilon z \ln z, \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) := z(0, \varepsilon) - z(1, \varepsilon) = 0. \quad (11)$$

Нормальна фундаментальна матриця однорідної частини диференціального рівняння (11) – функція

$$X(t) = e^{t^2-t}.$$

Оскільки $Q = 0$, то для крайової задачі (11) має місце критичний випадок [1,5,16]:

$$Q := \ell X(\cdot) = 0.$$

Загальний розв'язок породжуючої задачі для рівняння (11) має вигляд

$$z_0(t, c_r) = c_r e^{t^2-t}.$$

Оператор Гріна задачі Коші для рівняння (11) з довільною неоднорідністю $f(t)$

$$K[f(s)](t) = e^{t^2-t} \int_0^t e^{s-s^2} f(s) ds$$

визначає функціонал

$$\ell K[f(s)](\cdot) = K[f(s)](0) - K[f(s)](1) = - \int_0^1 e^{s-s^2} f(s) ds.$$

Рівняння (4) для породжуючих амплітуд для задачі (11)

$$F_0(c_r) = \int_0^1 e^{s-s^2} c_r e^{s^2-s} \ln(c_r e^{s^2-s}) ds = c_r \ln c_r - \frac{c_r}{6} = 0$$

має єдиний розв'язок

$$c_r^* = e^{\frac{1}{6}} \approx 1,18\,136,$$

який визначає похідну

$$\mathcal{A}_1(t) = 1 + \ln z_0(t, c_r^*) = t^2 - t + \frac{7}{6},$$

і приводить до константи $B_0 = 1$. Оскільки $B_0 \neq 0$, то умова (5) простоти коренів рівняння (4) для породжуючих амплітуд виконується. Оскільки $Q = Q^+ = 0$, то оператор Гріна крайової задачі (11), співпадає з оператором Гріна задачі Коші для рівняння (11) з довільною неперервною на відріжку $[0; 1]$ неоднорідністю

$$G[f(s); \alpha](t) \equiv K[f(s)](t).$$

Крайова задача першого наближення для рівняння (11) розв'язна в наслідок рівності $F_0(c_r^*) = 0$. Таким чином, отримуємо

$$z_0(t, c_r^*) = e^{\frac{1}{6}-t^2-t}.$$

Використовуючи ітераційну схему (9) знаходимо

$$\begin{aligned} z_1(t, \varepsilon) &:= z_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon), \quad z_1(t, \varepsilon) = X_r(t)c_1 + \varepsilon G \left[A_0(z_0(s, c_0^*)) \right] (t) = \\ &= \frac{\varepsilon t e^{\frac{1}{6}-t+t^2}}{6} (1 - 3t + 2t^2); \end{aligned}$$

тут

$$A_0(z_0(t, c_0^*)) = \left(\frac{1}{6} - t + t^2 \right) e^{\frac{1}{6}-t+t^2}, \quad c_1 = 0.$$

На другому кроці отримуємо

$$z_2(t, \varepsilon) := z_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon) + u_2(t, \varepsilon);$$

тут

$$\begin{aligned} u_2(t, \varepsilon) &= X_r(t)c_2 + \varepsilon G \left[A_1(z_0(s, c_0^*), u_1(s, \varepsilon)) \right] (t) = \\ &= \frac{e^{(-1+t)t}}{72} \left(72c_2 + e^{1/6}(-1+t)^2t^2(7-4t+4t^2)\varepsilon^2 \right), \quad c_2 = -\frac{\varepsilon^2 e^{1/6}}{360}, \end{aligned}$$

крім того

$$A_1(z_0(t, c_0^*), u_1(t, \varepsilon)) = \frac{\varepsilon t e^{(-1+t)t}}{36} (7 - 6t + 6t^2) e^{1/6} (1 - 3t + 2t^2).$$

На третьому кроці отримуємо

$$z_3(t, \varepsilon) := z_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon) + u_2(t, \varepsilon) + u_3(t, \varepsilon);$$

тут

$$\begin{aligned} u_3(t, \varepsilon) &= X_r(t)c_3 + \varepsilon G \left[A_2(z_0(s, c_0^*), u_1(s, \varepsilon), u_2(s, \varepsilon)) \right] (t) = \frac{\varepsilon^3 e^{\frac{1}{6}-t+t^2}}{6480} \times \\ &\times (-1+t)t(-1+2t)(1+(-1+t)t)(-21+5(-1+t)t(15+4(-1+t)t)), \quad c_3 = 0, \end{aligned}$$

крім того

$$\begin{aligned} A_2(z_0(t, c_0^*), u_1(t, \varepsilon), u_2(t, \varepsilon)) &= \frac{e^{(-1+t)t}}{432} \times \\ &\times (72c_2(7-6t+6t^2) + e^{1/6}(-1+t)^2t^2(55-94t+118t^2-48t^3+24t^4)\varepsilon^2). \end{aligned}$$

На четвертому кроці отримуємо

$$z_4(t, \varepsilon) := z_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon) + u_2(t, \varepsilon) + u_3(t, \varepsilon) + u_4(t, \varepsilon);$$

тут

$$u_4(t, \varepsilon) = \varepsilon G \left[A_2(z_0(s, c_0^*), u_1(s, \varepsilon), u_2(s, \varepsilon), u_3(s, \varepsilon)) \right] (t) = \frac{\varepsilon^3 e^{1/6} e^{(-1+t)t}}{6480} \times \\ \times ((-1+t)t(-1+2t) (1+(-1+t)t)(-21+5(-1+t)t(15+4(-1+t)t))),$$

крім того

$$A_3(z_0(t, c_0^*), u_1(t, \varepsilon), u_2(t, \varepsilon), u_3(t, \varepsilon)) = \\ = \frac{\varepsilon^3 t e^{\frac{1}{6}-t+t^2}}{38\,880} \left(-165 + 243t + 2267t^2 - 10\,155t^3 + 20\,625t^4 - 25\,263t^5 + \right. \\ \left. + 20\,778t^6 - 12\,150t^7 + 4900t^8 - 1320t^9 + 240t^{10} \right).$$

Для знайдених за допомогою ітераційної схеми (9) наближень до розв'язку задачі (11) для

$$\varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \quad \varepsilon_0 := 0, 1,$$

мають місце нерівності

$$\|u_1(t, \varepsilon)\| \leq \gamma \|z_0(t, c_r^*)\|_{C[0,1]}, \quad \|u_{k+1}(t, \varepsilon)\|_{C[0,1]} \leq \gamma \|u_k(t, \varepsilon)\|_{C[0,1]}; \quad (12)$$

тут

$$\gamma \approx 0,0295\,876 \ll 1, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

отже, можна казати про практичну збіжність ітераційної схеми (9) до розв'язку задачі (11) для $\varepsilon \in [0, 0, 1]$. Оскільки для

$$\varepsilon \in [0, 3], \quad \gamma \approx 0,887\,627$$

мають місце нерівності (12), то можна казати про практичну збіжність ітераційної схеми (9) до розв'язку задачі (11) для $\varepsilon \in [0, 3]$. При побудові за допомогою ітераційної схеми (9) наближень до розв'язку задачі (11) на кожному кроці забезпечене точне виконання умов розв'язності, які гарантують точне виконання крайових умов (11). Точність знайдених за допомогою ітераційної схеми (9) наближень до розв'язку задачі (11) визначають нев'язки

$$\Delta_k(\varepsilon) := \left\| z'_k(t, \varepsilon) - \varepsilon Z(z_k(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \right\|_{C[0,1]}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4;$$

тут

$$Z(z(t, \varepsilon), t, \varepsilon) := (2t - 1)z(t, \varepsilon) + \varepsilon z(t, \varepsilon) \ln z(t, \varepsilon).$$

– нелінійність крайової задачі (11). Зокрема

$$\Delta_0(0, 1) \approx 0,0196\,893, \quad \Delta_1(0, 1) \approx 0,000\,163\,663, \quad \Delta_2(0, 1) \approx 3,82\,844 \times 10^{-6};$$

$$\Delta_3(0, 1) \approx 4, 22\ 993 \times 10^{-8}, \quad \Delta_4(0, 1) \approx 1, 07\ 864 \times 10^{-9}.$$

Порівняємо точність знайдених за допомогою ітераційної схеми (9) наближень до розв'язку задачі (11) з точністю

$$\delta_k(\varepsilon) := \left\| y'_k(t, \varepsilon) - \varepsilon Z(y_k(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \right\|_{\mathbb{C}[0;1]}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

наближень

$$y_k(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + x_k(t, \varepsilon), \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\begin{aligned} x_1(t, \varepsilon) \approx & -0,0\ 000\ 320\ 264 - t \cdot \left[0,0196\ 536 \cdot (1-t) + 0,0601\ 986 \cdot (1-t)^2 - \right. \\ & -0,0\ 718\ 794 \cdot (1-t)^3 + 0,0\ 869\ 444 \cdot (1-t)^4 - 0,07\ 242 \cdot (1-t)^5 + \\ & +0,0\ 594\ 333 \cdot (1-t)^6 - 0,038\ 034 \cdot (1-t)^7 t + 0,0\ 214\ 742 \cdot (1-t)^8 - \\ & \left. -0,00\ 829\ 416 \cdot (1-t)^9 + 0,00\ 207\ 076 \cdot (1-t)^{10} - 0,000\ 122\ 446 \cdot (1-t)^{11} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(t, \varepsilon) \approx & -0,0\ 000\ 328\ 073 - t \cdot \left[0,0\ 196\ 527 \cdot (1-t) + \right. \\ & +0,0\ 601\ 981 \cdot (1-t)^2 - 0,0\ 718\ 842 \cdot (1-t)^3 + 0,086\ 969 \cdot (1-t)^4 - \\ & -0,072\ 472 \cdot (1-t)^5 + 0,0\ 595\ 019 \cdot (1-t)^6 - 0,0\ 381\ 007 \cdot (1-t)^7 + \\ & +0,0\ 215\ 211 \cdot (1-t)^8 - 0,00\ 831\ 588 \cdot (1-t)^9 + \\ & \left. +0,00\ 207\ 643 \cdot (1-t)^{10} - 0,000\ 122\ 812 \cdot (1-t)^{11} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3(t, \varepsilon) \approx & -0,0\ 000\ 328\ 073 - t \cdot \left[0,0196\ 527 \cdot (1-t) + 0,0601\ 981 \cdot (1-t)^2 - \right. \\ & -0,0\ 718\ 841 \cdot (1-t)^3 + 0,086\ 969 \cdot (1-t)^4 - 0,072\ 472 \cdot (1-t)^5 + \\ & +0,0595\ 019 \cdot (1-t)^6 - 0,0\ 381\ 007 \cdot (1-t)^7 + 0,0\ 215\ 211 \cdot (1-t)^8 - \\ & \left. -0,0\ 083\ 159 \cdot (1-t)^9 + 0,00\ 207\ 644 \cdot (1-t)^{10} - 0,000\ 122\ 813 \cdot (1-t)^{11} \right], \end{aligned}$$

до розв'язку крайової задачі (11), одержаних за допомогою методу найменших квадратів [19] для фіксованого значення $\varepsilon = 0, 1$. Таким чином, для $\varepsilon = 0, 1$ отримуюмо

$$\delta_0(0, 1) = \Delta_0(0, 1) \approx 0,0196\ 893;$$

$$\delta_1(0, 1) \approx 1,29\ 484 \cdot 10^{-7} \ll \Delta_1(0, 1) \approx 0,000\ 163\ 663;$$

$$\delta_2(0, 1) \approx 2,20\ 191 \cdot 10^{-8} \leq \Delta_2(0, 1) \approx 3,82\ 844 \times 10^{-6};$$

$$\delta_3(0, 1) \approx 2,20\ 212 \cdot 10^{-8} \gg \Delta_4(0, 1) \approx 1,07\ 864 \times 10^{-9}.$$

Точність знайдених за допомогою ітераційної схеми (9) наближень до розв'язку задачі (11) перевищує точність наближень до розв'язку крайової задачі (11), одержаних за допомогою методу найменших квадратів, починаючи з третього кроку. В свою чергу, точність знайдених за допомогою ітераційної схеми (9) наближень до розв'язку задачі (11) послідовно зменшується на кожному році, в той час, як точність наближень до розв'язку крайової задачі (11), одержаних за допомогою методу найменших квадратів, після другого кроку практично не зменшується.

Відзначимо також, що точність наближень, одержаних за допомогою методу простих ітерацій [1]

$$\tilde{\Delta}_1(0,1) \approx 1,16\,055 \cdot 10^{-4}, \quad \tilde{\Delta}_2(0,1) \approx 3,82\,851 \cdot 10^{-6},$$

$$\tilde{\Delta}_3(0,1) \approx 1,22\,684 \cdot 10^{-5},$$

значно менша за точність наближень до розв'язку крайової задачі (11), знайдених за допомогою як ітераційної схеми (9), так і за допомогою методу найменших квадратів [19].

Оцінка $\varepsilon_* \approx 0,518\,181$ довжини проміжку ε^* значень малого параметру, на якому зберігається збіжність ітераційної схеми, побудованої за методом простих ітерацій [1] отримана у статті О.С. Чуйка [20] значно менша за проміжок $\varepsilon \in [0, 3]$ практичної збіжності ітераційної схеми (9) до розв'язку задачі (11), отриманий вище.

Запропоновані у статті умови розв'язності та схема побудови розв'язків нелінійної крайової задачі з використанням методу декомпозиції Адомяна у критичному випадку можуть бути перенесені на нелінійні крайові задачі з перемиканнями [21].

Цитована література

1. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems; 2-th edition. – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. – 298 p.
2. *Boichuk A.A.* Nonlinear boundary-value problems for systems of ordinary differential equations // *Ukrainian Mathematical Journal*. – 1998. – Vol. 50, № 2. – P. 186–195.
3. *Бойчук А.А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. – К., Наук. думка, 1990. – 96 с.
4. *Benner P., Seidel-Morgenstern A., Zuyev A.* Periodic switching strategies for an isoperimetric control problem with application to nonlinear chemical reactions // *Applied Mathematical Modelling*. – 2019. – Vol. 69. – P. 287–300.
5. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
6. *Boichuk A.A., Chuiko S.M.* On approximate solutions of nonlinear boundary-value problems by the Newton–Kantorovich method // *Journ. Math. Sci.* – 2021. – Vol. 258, № 5. – P. 594–617.
7. *Boichuk A.A., Chuiko S.M.* On approximate solutions of weakly nonlinear boundary-value problems by the Newton–Kantorovich method // *Journ. Math. Sci.* – 2022. – Vol. 261, № 2. – P. 228–240.
8. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
9. *Шлапак Ю.Д.* О периодических решениях нелинейных уравнений второго порядка, не разрешенные относительно старшей производной // *Укр. мат. журн.* – 1974. – Vol. 26, № 6. – С. 850–854.

10. Samoilenko A.M., Chuiko S.M., Starkova O.V. Nonlinear boundary-value problem that is not solved with respect to the derivative // *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal*. – 2020. – Vol. 72, № 8. – P. 1280–1293.
11. Adomian G. A review of the decomposition method in applied mathematics // *Journ. of Math. Math. Anal. and Appl.* – 1988. – Vol. 135. – P. 501–544.
12. Чуйко С.М., Чуйко О.С., Попов М.В. Метод декомпозиції Адомяна у теорії нелінійних періодичних крайових задач // *Нелінійні коливання*. – 2022. – Vol. 25, № 4. – С. 413–425.
13. Adomian G. Convergent series solution of nonlinear equations // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 1984. – Vol. 11. – P. 225–230.
14. Boichuk A., Chuiko S. Autonomous weakly nonlinear boundary value problems in critical cases // *Differential Equations*. – 1992. – № 10. – P. 1353–1358.
15. Chuiko S.M. Domain of convergence of an iterative procedure for an autonomous boundary value problem // *Nonlinear Oscillations (N.Y.)*. – Vol. 9, № 3. – 2006. – P. 405–422.
16. Гребенников Е.А., Рябов Ю.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
17. Adomian G. Convergent series solution of nonlinear equations // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 1984. – Vol. 11. – P. 225–230.
18. Mac M., Leung C.S., Harko T. A brief introduction to the Adomian decomposition method // *Romanian Astron. Journ.* – 2019. – Vol. 1, № 1. – P. 1–41.
19. Chuiko S.M. On approximate solution of boundary value problems by the least square method // *Nonlinear Oscillations*. – 2008. – Vol. 11, № 4. – P. 585–604.
20. Chuiko A.S. The convergence domain of an iterative procedure for a weakly nonlinear boundary value problem // *Nonlinear Oscillations*. – 2005. – Vol. 8, № 2. – P. 277–287.
21. Benner P., Chuiko S., Zuyev A. A periodic boundary value problem with switchings under nonlinear perturbations // *Boundary Value Problems*. – 2023. – Vol. 50. – P. 1–12.

References

1. Boichuk, A.A., Samoilenko, A.M. (2016). *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*. 2-th edition. Berlin; Boston: De Gruyter.
2. Boichuk, A.A. (1998). Nonlinear boundary-value problems for systems of ordinary differential equations. *Ukrainian Mathematical Journal*, 50(2), 186–195.
3. Boichuk, A.A. (1990). *Constructive methods for the analysis of boundary value problems*. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
4. Benner, P., Seidel-Morgenstern, A., Zuyev, A. (2019). Periodic switching strategies for an isoperimetric control problem with application to nonlinear chemical reactions. *Applied Mathematical Modelling*, 69, 287–300.
5. Malkin, I.G. (1956). *Some Problems of the Theory of Nonlinear Oscillations*. Moscow: Gostekhizdat (in Russian).
6. Boichuk, A.A., Chuiko, S.M. (2021). On approximate solutions of nonlinear boundary-value problems by the Newton–Kantorovich method. *Journ. Math. Sci.*, 258(5), 594–617.
7. Boichuk, A.A., Chuiko, S.M. (2022). On approximate solutions of weakly nonlinear boundary-value problems by the Newton–Kantorovich method. *Journ. Math. Sci.*, 261(2), 228–240.
8. Kantorovich, L.V., Akilov, G.P. (1977). *Functional Analysis*. Moscow: Nauka (in Russian).
9. Shlapak, Yu.D. (1974). On periodic solutions of second order nonlinear equations not solvable with respect to the major derivative. *Ukrainian Mathematical Journal*, 26(6), 850–854 (in Russian).
10. Samoilenko, A.M., Chuiko, S.M., Starkova, O.V. (2020). Nonlinear boundary-value problem that is not solved with respect to the derivative. *Ukrainian Mathematical Journal*, 72(8), 1280–1293.
11. Adomian, G. (1988). A review of the decomposition method in applied mathematics. *Journ. of Math. Math. Anal. and Appl.*, 135, 501–544.
12. Chuiko, S.M., Chuiko, O.S., Popov, M.V. (2022). Adomian decomposition method in the theory of nonlinear periodic boundary value problems. *Nonlinear oscillations*, 25(4), 413–425 (in Ukrainian).
13. Adomian, G. (1984). Convergent series solution of nonlinear equations. *Journal of Computational*

- and Applied Mathematics*, 11, 225–230.
14. Boichuk, A., Chuiko, S. (1992). Autonomous weakly nonlinear boundary value problems in critical cases. *Differential Equations*, 10, 1353–1358.
 15. Chuiko, S.M. (2006). Domain of convergence of an iterative procedure for an autonomous boundary value problem. *Nonlinear Oscillations (N.Y.)*, 9(3), 405–422.
 16. Grebenikov, E.A., Ryabov, Y.A. (1979). *Constructive methods of analysis of nonlinear systems*. Moscow: Nauka (in Russian).
 17. Adomian, G. (1984). Convergent series solution of nonlinear equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 11, 225–230.
 18. Mac, M., Leung, C.S., Harko, T. (2019). A brief introduction to the Adomian decomposition method. *Romanian Astron. Journ.*, 1(1), 1–41.
 19. Chuiko, S.M. (2008). On approximate solution of boundary value problems by the least square method. *Nonlinear Oscillations (N.Y.)*, 11(4), 585–604.
 20. Chuiko, A.S. (2005). The convergence domain of an iterative procedure for a weakly nonlinear boundary value problem. *Nonlinear Oscillations*, 8(2), 277–287.
 21. Benner, P., Chuiko, S., Zuyev, A. (2023). A periodic boundary value problem with switchings under nonlinear perturbations. *Boundary Value Problems*, 50, 1–12.

S.M. Chuiko, O.V. Nesmelova, M.V. Popov

Adomian decomposition method in the theory of weakly nonlinear boundary value problems.

The problem of solvability of nonlinear boundary value problems originates from the classical theory of periodic boundary value problems for systems of ordinary differential equations, developed in the works of A. Poincare, O.M. Lyapunov, I.G. Malkin, Yu.O. Mitropolsky, A.M. Samoilenko, O.A. Boichuk and others. In the classical works of R. Bellman, J. Hale, Y.O. Mitropolsky, A.M. Samoilenko and O.A. Boichuk, the conditions for solvability of nonlinear boundary value problems for systems of differential equations in critical cases were obtained. To find solutions to nonlinear boundary value problems for systems of differential equations in critical cases, iterative schemes using the method of simple iterations were constructed in the monographs of A.M. Samoilenko and O.A. Boichuk. In the works of O.A. Boichuk and S.M. Chuiko, iterative schemes based on the Newton–Kantorovich scheme with quadratic convergence were constructed to find solutions to nonlinear boundary value problems, and constructive conditions for convergence were obtained. The technique for constructing approximations to solutions of weakly nonlinear boundary value problems using the Adomian decomposition method investigated in this paper differs from the authors' previous results in that the boundary condition, the number of components of which, in general, does not coincide with the dimension of the solution. The results obtained can be transferred to weakly nonlinear boundary value problems with a boundary condition using nonlinear bounded vector functions. The article obtains constructive conditions for solvability and a scheme for constructing solutions to a weakly nonlinear boundary value problem for an ordinary differential equation in the critical case using the Adomian decomposition method.

Keywords: *weakly nonlinear boundary value problems, Adomian decomposition method.*

Донбаський державний педагогічний університет,
Ін-т прикл. математики і механіки НАН України
chujko-slav@ukr.net, star-o@ukr.net, ax.nikita@gmail.com

Отримано 19.06.23