

УДК 531.36, 531.38

DOI: 10.37069/1683-4720-2023-37-7

©2023. Ю.М. Кононов

ПРО СТІЙКІСТЬ ОБЕРТАННЯ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ ВІЛЬНОЇ СИСТЕМИ ДВОХ ПРУЖНО ЗВ'ЯЗАНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ

Виведені рівняння обертання у середовищі з опором вільної системи двох твердих тіл, з'єднаних пружним сферичним шарніром або шарніром Гука. У припущенні, що центр мас твердих тіл знаходиться на третій головній осі інерції, виписані рівняння збуреного руху розглядуваної механічної системи у вигляді восьми звичайних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами. У випадку двох гіроскопів Лагранжа отримано характеристичне рівняння четвертого порядку. На підставі критерію Ляпунова–Шіпара, записаного в інваріантному вигляді, отримані у вигляді системи трьох нерівностей умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань гіроскопів Лагранжа. Проведені аналітичні дослідження цих умови стійкості. Доведено, що перша нерівність завжди виконана. Із третьої нерівності слідує, що коли гіроскопи мають рівні осеві моменти інерції і обертаються з однаковими кутовими швидкостями в різні сторони або відсутня пружність у шарнірі, то характеристичне рівняння має кратний корінь і питання про стійкість вимагає додаткових досліджень. Виписані умови стійкості відносно кінетичних моментів і показано, що старші коефіцієнти нерівностей додатні звідки випливає, що стійкість завжди буде можлива при досить великих значеннях одного або двох кінетичних моментів. Аналогічні висновки отримані і у випадку шарніра Гука, а також показано, що коли гіроскопи однакові, то характеристичне рівняння розпадається на два рівняння. При відсутності пружності у шарнірі з'являється кратний нульовий корінь і питання про стійкість вимагає додаткових досліджень.

MSC: 70E55.

Ключові слова: обертання вільної системи двох пружно зв'язаних твердих тіл, пружний сферичний шарнір, шарнір Гука, середовище з опором, постійний момент, гіроскопи Лагранжа, рівномірне обертання, асимптотична стійкість.

1. Вступ.

На даний час є велика кількість робіт у яких досліджується динаміка та стійкість руху систем зв'язаних твердих тіл. Досить хороший огляд цих робіт наведено в монографіях [1–4]. Наприклад робота [2] містить 351 посилань. В монографії [1] з єдиних позицій викладено підхід до задач про рух систем твердих тіл. Розглянуто моделі, що допускають різноманітні з'єднання тіл та їх загальні просторові рухи. Однак, задачі про вільний рух систем пов'язаних твердих тіл далекі до свого завершення. Мабуть, одними з перших це були роботи [5–7]. У статті [5] вивчається положення рівноваги двох зв'язаних твердих тіл відносно орбітальної системи координат. Автором визначено всі положення відносної рівноваги та отримано достатні умови стійкості. Модель супутника, представленого двома однаковими несиметричними тілами, пов'язаними невагомим стрижнем, розглядається в статті [6]. У роботі [7] модель супутника представляється системою n твердих тіл і гіростатів, зв'язаними сферичними шарнірами. Проведено чисельне інтегрування рівнянь ру-

ху, що дозволило визначити стійкі відносні положення рівноваги. Наведемо лише роботи, які найближчі до розглядуваної у статті задачі. У загальній постановці задача про рух у середовищі з опором вільної системи двох зв'язаних твердих тіл розглядається в монографії [8]. В ній та у статті [9] наголошується, що в залежності від вибору основного тіла будуть представлені різні види рівняння руху вільної системи твердих тіл. У статті [10] досліджені необхідні умови стійкості рівномірних обертань двох вільних гіроскопів Лагранжа з ідеальною рідиною, та показано, як з рівнянь для невідомої системи гіроскопів слідують рівняння для вільної системи. Робота [11] узагальнює результати статті [10] на випадок n гіроскопів Лагранжа з ідеальною рідиною. Дослідження впливу дисипативного і постійного моментів на стійкість рівномірного обертання двох пружно зв'язаних вільних гіроскопів Лагранжа проведено у роботі [12]. У статті [13] показана можливість стабілізації нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною другим обертним гіроскопом. В роботі [14] розглядається динаміка і орієнтація твердого тіла при вході в атмосферу, динаміка і управління коаксіальними гіростатами супутників та багато інших оригінальних задач космічної механіки. В [15] представлений уніфікований і добре розроблений підхід до динаміки кутових рухів твердих тіл, що зазнають моментів збурення різної фізичної природи. Детально розглядається дія різних моментів збурень, як зовнішніх (гравітаційний, аеродинамічний, сонячний тиск), так і внутрішніх (завдяки в'язкій рідині в резервуарах, пружним і в'язкопружним властивостям тіла). Новий клас обертань динамічно симетричного твердого тіла навколо нерухомої точки з урахуванням нестационарного збурюючого моменту і повільно змінного з часом відновлюючого моменту вивчається у роботі [16]. В статті [17] розглянуто рух навколо центру мас сфероїда з порожниною, заповненою в'язкою рідиною. Момент сил, що діють на тіло з боку в'язкої рідини в порожнині, визначають за методикою, розробленою в роботах Ф.Л. Черноуська. Асимптотичний підхід дозволяє отримати деякі якісні результати та описати нелінійну еволюцію кутового руху за допомогою спрощених усереднених рівнянь. Слід зазначити, що математичний апарат та методи дослідження, які були розроблені в роботах [14–17], знайшли застосування в багатьох задачах динаміки та стійкості руху систем зв'язаних твердих тіл.

У даній статті продовжуються дослідження стійкості руху вільної системи двох твердих, які були розпочаті в роботах [8–13].

2. Постановка задачі. Основні рівняння.

Розглянемо вільний рух двох пружно зв'язаних твердих тіл S_1 і S_2 . Тілами S_1 і S_2 мають спільну точку O_2 . Запишемо теорему про зміну моменту кількості руху і кількості руху для тіла S_i ($i = 1, 2$). Для цього звільнимось від в'язів в точці O_2 . Позначимо через $\mathbf{R}_1$ і $\mathbf{L}_1$ головний вектор і головний момент сил реакції в'язі, що діють на тіло S_1 з боку тіла S_2 . Рівняння руху центру мас та рівняння зміни моменту кількості руху тіла S_i відносно центру мас тіла, точки C_i мають вигляд [8, 10]:

$$m_i \dot{\mathbf{V}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i+1}; \quad (1)$$

$$(\mathbf{J}_i \boldsymbol{\omega}_i)^\bullet + \mathbf{c}_i \times m_i \dot{\mathbf{V}}_i = \mathbf{M}_i + \mathbf{L}_i - \mathbf{L}_{i+1} - \mathbf{s}_i \times \mathbf{R}_{i+1} \quad (i = 1, 2). \quad (2)$$

Тут $\mathbf{J}_i$ – центральний тензор інерції тіла S_i ; $\boldsymbol{\omega}_i$ – кутова швидкість твердого тіла S_i ; $m = m_1 + m_2$ – маса всієї системи, $\mathbf{c}_1 = \overrightarrow{C_1 O_2}$, $\mathbf{c}_2 = \overrightarrow{O_2 C_2}$, $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_3 = 0$, $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_3 = 0$; точкою « $\bullet$ » позначена абсолютна похідна.

Система рівнянь (2), з урахуванням (1), буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}_1 \boldsymbol{\omega}_1)^\bullet &= \mathbf{M}_1 - \mathbf{L}_2 - \mathbf{c}_1 \times (m_2 \mathbf{F}_1 - m_1 \mathbf{F}_2 + m_2 \dot{\mathbf{f}}_2) / m; \\ (\mathbf{J}_2 \boldsymbol{\omega}_2)^\bullet &= \mathbf{M}_2 + \mathbf{L}_2 - [\mathbf{c}_2 \times (m_2 \mathbf{F}_1 - m_1 \mathbf{F}_2) - \mathbf{c}_2 \times \dot{\mathbf{f}}_2] / m, \end{aligned} \quad (3)$$

де

$$\mathbf{f}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 \times m_2 \mathbf{c}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times m_2 \mathbf{c}_2; \quad \mathbf{f}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 \times m_1 \mathbf{c}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times m_1 \mathbf{c}_2.$$

Зв'яжемо з кожним із тіл S_i незмінно базис $\mathbf{e}_1^i \mathbf{e}_2^i \mathbf{e}_3^i$ з вершиною в точці C_i , осі якого направимо по головних осях тензора інерції $\mathbf{J}_i$ і введемо нерухомий базис $\mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}_2^0 \mathbf{e}_3^0$, вектор $\mathbf{e}_3^0$ якого протилежний вектору прискорення вільного падіння. Будемо вважати, що треті головні осі інерції проходять для тіл S_1 і S_2 через точку O_2 , тобто будемо вважати, що центр мас тіл S_i лежить на цих осях.

Нехай тверде тіло S_i знаходиться під дією сили тяжіння, дисипативного моменту $\mathbf{M}_i = \mathbf{D}_i \boldsymbol{\omega}_i$, $\mathbf{D}_i = \text{diag}(D_{i1}, D_{i1} D_{i3})$, $D_{ij} > 0$ ($i = 1, 2$; $j = 1, 3$), що моделює середовище з опором і постійного моменту $\mathbf{M}_{iq} = Q_i \mathbf{c}_i / |\mathbf{c}_i|$, який спрямований вздовж вектора $\mathbf{c}_i$ і підтримує обертання тіла S_i . Тверди тіла S_1 і S_2 пов'язані в точці O_2 пружним відновлювальним сферичним шарніром $\mathbf{L}_2 = -k \mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2 / (|\mathbf{c}_1| |\mathbf{c}_2|)$, $k \geq 0$.

Векторні рівняння (3) в проекціях на осі рухомого базису $\mathbf{e}_1^i \mathbf{e}_2^i \mathbf{e}_3^i$ приймуть вигляд:

$$\begin{aligned} A'_1 \dot{p}_1 + (C_1 - B'_1) r_1 q_1 + \mu [(\dot{p}_2 - r_2 q_2) \alpha_{22}^{12} - (\dot{q}_2 + r_2 p_2) \alpha_{21}^{12} + (p_2^2 + q_2^2) \alpha_{23}^{12}] &= -k \alpha_{32}^{21} - D_{11} p_1; \\ B'_1 \dot{q}_1 - (C_1 - A'_1) r_1 p_1 - \mu [(\dot{p}_2 - r_2 q_2) \alpha_{12}^{12} - (\dot{q}_2 + r_2 p_2) \alpha_{11}^{12} + (p_2^2 + q_2^2) \alpha_{13}^{12}] &= -k \alpha_{31}^{21} - D_{12} q_1; \\ C_1 \dot{r}_1 + (B'_1 - A'_1) p_1 q_1 &= -D_{13} r_1 + Q_1; \\ A'_2 \dot{p}_2 + (C_2 - B'_1) r_2 q_2 + \mu [(\dot{p}_1 - r_1 q_1) \alpha_{22}^{21} - (\dot{q}_1 + r_1 p_1) \alpha_{21}^{21} + (p_1^2 + q_1^2) \alpha_{23}^{21}] &= -k \alpha_{32}^{21} - D_{21} p_2; \\ B'_2 \dot{q}_2 - (C_2 - A'_2) r_2 p_2 - \mu [(\dot{p}_1 - r_1 q_1) \alpha_{12}^{21} - (\dot{q}_1 + r_1 p_1) \alpha_{11}^{21} + (p_1^2 + q_1^2) \alpha_{13}^{21}] &= -k \alpha_{31}^{21} - D_{22} q_2; \\ C_2 \dot{r}_2 + (B'_2 - A'_2) p_2 q_2 &= -D_{23} r_2 + Q_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут p_i, q_i, r_i – проекції вектора кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}_i$ на вісі $\mathbf{e}_1^i \mathbf{e}_2^i \mathbf{e}_3^i$; $A'_1 = A_1 + m_1 m_2 c_1^2 / m$; $B'_1 = B_1 + m_1 m_2 c_1^2 / m$; $A'_2 = A_2 + m_2 m_1 c_2^2 / m$; $B'_2 = B_2 + m_2 m_1 c_2^2 / m$; $\mu = m_1 m_2 c_1 c_2 / m$; $\alpha_{\mu\kappa}^{ij} = \mathbf{e}_\mu^i \cdot \mathbf{e}_\kappa^j$ – напрямні косинуси. Коефіцієнти $\alpha_{\mu\kappa}^{ij}$ можна виразити через $\alpha_{\mu\sigma}^{i0}$ і $\alpha_{\mu\sigma}^{j0}$ наступним чином $\alpha_{\mu\kappa}^{ij} = \sum_{\sigma=1}^3 \alpha_{\mu\sigma}^{i0} \alpha_{\kappa\sigma}^{j0}$ [8].

До системи рівнянь (4) потрібно додати рівняння для напрямних косинусів [8]:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{11}^{i0} &= -q_i \alpha_{31}^{i0} + r_i \alpha_{21}^{i0}; \quad \dot{\alpha}_{21}^{i0} = p_i \alpha_{31}^{i0} - r_i \alpha_{11}^{i0}; \\ \dot{\alpha}_{12}^{i0} &= -q_i \alpha_{32}^{i0} + r_i \alpha_{22}^{i0}; \quad \dot{\alpha}_{22}^{i0} = p_i \alpha_{32}^{i0} - r_i \alpha_{12}^{i0}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_{13}^{i0} &= -q_i \alpha_{33}^{i0} + r_i \alpha_{23}^{i0}; \dot{\alpha}_{23}^{i0} = p_i \alpha_{33}^{i0} - r_i \alpha_{13}^{i0}; \\ \dot{\alpha}_{31}^{i0} &= -p_i \alpha_{21}^{i0} + q_i \alpha_{11}^{i0}; \dot{\alpha}_{32}^{i0} = -p_i \alpha_{22}^{i0} + q_i \alpha_{12}^{i0}; \\ \dot{\alpha}_{33}^{i0} &= -p_i \alpha_{23}^{i0} + q_i \alpha_{13}^{i0}.\end{aligned}\quad (5)$$

Система (4) – (5) допускає розв'язки:

$$\begin{aligned}p_i &= q_i = 0; \quad r_i = \omega_{0i} = Q_i/D_{i3}; \\ \alpha_{11}^{i0} &= \cos \omega_{0i} t; \quad \alpha_{12}^{i0} = \sin \omega_{0i} t; \quad \alpha_{13}^{i0} = 0; \\ \alpha_{21}^{i0} &= -\sin \omega_{0i} t; \quad \alpha_{22}^{i0} = \cos \omega_{0i} t; \quad \alpha_{23}^{i0} = 0; \alpha_{31}^{i0} = 0; \quad \alpha_{32}^{i0} = 0; \quad \alpha_{33}^{i0} = 1,\end{aligned}$$

які відповідають рівномірним обертанням твердих тіл S_i ($i = 1, 2$) з кутовими швидкостями ω_{0i} навколо вертикалі.

Запишемо рівняння (4)–(5) для збуреного руху, зберігаючи для змінних їхні попередні позначення:

$$\begin{aligned}A'_1 \dot{p}_1 + (C_1 - B'_1) \omega_{01} q_1 + \mu [(\dot{p}_2 - \omega_{02} q_2) \alpha_{22}^{12} - (\dot{q}_2 + \omega_{02} p_2) \alpha_{21}^{12}] &= -k \alpha_{23}^{10} - D_{11} p_1; \\ B'_1 \dot{q}_1 - (C_1 - A'_1) \omega_{01} p_1 - \mu [(\dot{p}_2 - \omega_{02} q_2) \alpha_{12}^{12} - (\dot{q}_2 + \omega_{02} p_2) \alpha_{11}^{12}] &= -k \alpha_{13}^{10} - D_{12} q_1; \\ A'_2 \dot{p}_2 + (C_2 - B'_1) \omega_{02} q_2 + \mu [(\dot{p}_1 - \omega_{01} q_1) \alpha_{22}^{21} - (\dot{q}_1 + \omega_{01} p_1) \alpha_{21}^{21}] &= -k \alpha_{23}^{20} - D_{21} p_2; \\ B'_2 \dot{q}_2 - (C_2 - A'_2) \omega_{02} p_2 - \mu [(\dot{p}_1 - \omega_{01} q_1) \alpha_{12}^{21} - (\dot{q}_1 + \omega_{01} p_1) \alpha_{11}^{21}] &= -k \alpha_{13}^{20} - D_{22} q_2; \\ \dot{\alpha}_{13}^{i0} &= \omega_{0i} \alpha_{23}^{i0} - q_i; \quad \dot{\alpha}_{23}^{i0} = -\omega_{0i} \alpha_{13}^{i0} + p_i \quad (i = 1, 2).\end{aligned}$$

Тут $\alpha_{11}^{ik} = \cos \varphi_{ki}$; $\alpha_{12}^{ik} = -\sin \varphi_{ki}$; $\alpha_{21}^{ik} = \sin \varphi_{ki}$; $\alpha_{22}^{ik} = \cos \varphi_{ki}$; $\varphi_{ki} = \varphi_k - \varphi_i$; $\varphi_i = \omega_{0i} t$; ($i, k = 1, 2$).

Слід зазначати, що третє та шосте рівняння у (4) відокремлюються і їх характеристики рівняння мають один дійсний негативний корінь.

Таким чином, отримані вісім звичайних диференціальних рівнянь (6) із періодичними коефіцієнтами описують збурений рух у середовищі з опором системи двох пружно пов'язаних твердих тіл у припущенні, що їх центри мас знаходяться на третій головній осі інерції твердого тіла. Через динамічну ($B'_i \neq A'_i$) та дисипативну ($D_{i1} \neq D_{i2}$) несиметрію дослідження цих рівнянь стає досить складним. У цьому зв'язку проведемо далі аналітичні дослідження для двох гіроскопів Лагранжа ($B'_i = A'_i$) у припущенні, що $D_{i1} = D_{i2}$.

3. Умови стійкості рівномірних обертань двох гіроскопів Лагранжа.

Перейдемо до нових змінних p'_i , q'_i , α_{13}^i , α_{23}^i [8, 11]:

$$\begin{aligned}p'_i &= p_i \sin \varphi_i + q_i \cos \varphi_i; \quad q'_i = p_i \cos \varphi_i - q_i \sin \varphi_i; \\ \alpha_{13}^i &= \alpha_{13}^{0i} \sin \varphi_i + \alpha_{23}^{0i} \cos \varphi_i; \quad \alpha_{23}^i = \alpha_{13}^{0i} \cos \varphi_i - \alpha_{23}^{0i} \sin \varphi_i.\end{aligned}$$

Нехай $\Omega_i = q'_i - ip'_i$, $\gamma_i = \alpha_{13}^i + i\alpha_{23}^i$ ($i = 1, 2$), тоді система рівнянь (6) у нових змінних може бути записана наступним чином:

$$A'_1 \ddot{\gamma}_1 + (i\tilde{C}_1 + D_1 + k) \dot{\gamma}_1 + \mu \ddot{\gamma}_2 = 0;$$

$$A_2' \ddot{\gamma}_2 + (i\tilde{C}_2 + D_2 + k)\dot{\gamma}_2 + \mu\ddot{\gamma}_1 = 0, \quad (7)$$

де $\tilde{C}_i = C_i \omega_{0i}$.

Представивши шукані функції у вигляді $a e^{\lambda t}$, запишемо характеристичне рівняння збуреного руху (7):

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu\lambda^2 \\ \mu\lambda^2 & F_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

або

$$a_4 \lambda^4 + (a_3 + ib_3) \lambda^3 + (a_2 + ib_2) \lambda^2 + (a_1 + ib_1) \lambda + a_0 = 0, \quad (9)$$

де $F_i = A_i' \lambda^2 + (i\tilde{C}_i + D_i) \lambda + k$;

$$\begin{aligned} a_4 &= A_1' A_2' - \mu^2 = (A_1 + c_1^2 m_1)(A_2 + c_2^2 m_2) + A_2 s_1^2 m_2 > 0; \\ a_3 &= A_1' D_2 + A_2' D_1 > 0; \quad b_3 = A_1' \tilde{C}_2 + A_2' \tilde{C}_1; \\ a_2 &= D_1 D_2 - \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 + (A_1' + A_2') k; \quad b_2 = \tilde{C}_1 D_2 + \tilde{C}_2 D_1; \\ a_1 &= (D_1 + D_2) k; \quad b_1 = (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2) k; \\ a_0 &= k^2; \quad b_0 = 0. \end{aligned}$$

Для того, щоб всі нулі рівняння (9) були різні і лежали у відкритій лівій півплощині, згідно критерію Ляпунова–Шіпара, записаного в іннормному вигляді [18], необхідно і достатньо, щоб матриця сьомого порядку, яка складена з коефіцієнтів цього рівняння, була іннормно-позитивною, тобто щоб були позитивно визначені матриці Δ_1 , Δ_3 , Δ_5 і Δ_7 :

$$I_1 = |\Delta_1| = a_3 > 0;$$

$$I_3 = |\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 \\ 0 & a_3 & -b_2 \\ a_3 & -b_2 & -a_1 \end{vmatrix} > 0; \quad (10)$$

$$I_5 = |\Delta_5| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & 0 \\ a_3 & -b_2 & -a_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = k\tilde{I}_5 > 0; \quad (11)$$

$$I_7 = |\Delta_7| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & -b_1 & -a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = k^2 \tilde{I}_7 > 0. \quad (12)$$

Так як $a_3 > 0$, то $I_1 > 0$ і умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа визначається трьома нерівностями (10)–(12).

4. Дослідження умов стійкості (10)–(12).

Із нерівностей (11)–(12) слідує, що коли $k = 0$ маємо $I_5 = 0$ і $I_7 = 0$. В цьому випадку рівняння (9) має кратні кореня і умови асимптотичної стійкості потребують додаткових досліджень.

Запишемо умови стійкості відносно коефіцієнта пружності сферичного шарніру k :

$$\tilde{I}_{31}k + \tilde{I}_{30} > 0; \quad (13)$$

$$\tilde{I}_{52}k^2 + \tilde{I}_{51}k + \tilde{I}_{50} > 0; \quad (14)$$

$$\tilde{I}_{72}k^2 + \tilde{I}_{71}k + \tilde{I}_{70} > 0, \quad (15)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{31} &= [((A'_2)^2 + \mu^2) D_1 + ((A'_1)^2 + \mu^2) D_2] a_4 > 0; \\ \tilde{I}_{30} &= \left[\left(\tilde{C}_1^2 (A'_2)^2 + \tilde{C}_2^2 (A'_1)^2 \right) + a_3^2 \right] + b_2^2 \mu^2 > 0; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{52} &= [((A'_2)^2 + \mu^2) D_1 + ((A'_1)^2 + \mu^2) D_2] [(A'_1 - A'_2)^2 D_1 D_2 + (D_1 + D_2)^2 \mu^2] > 0; \\ \tilde{I}_{72} &= [(A'_1 - A'_2)^2 D_1 D_2 + (D_1 + D_2)^2 \mu^2] > 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Інші коефіцієнти не наведено через їхню громіздкість.

Із (16) випливає, що нерівність (13) і відповідно (10) завжди виконані. Таким чином, умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором вільної системи двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа визначається двома нерівностями (14)–(15) і відповідно (11)–(12).

Умови стійкості відносно кінетичних моментів $\tilde{C}_i$ ($i = 1, 2$) будуть мати вигляд:

$$\left(I_{i54} \tilde{C}_i^4 + I_{i53} \tilde{C}_i^3 + I_{i52} \tilde{C}_i^2 + I_{i51} \tilde{C}_i + I_{i50} \right) k > 0; \quad (18)$$

$$\left(I_{i74} \tilde{C}_i^4 + I_{i73} \tilde{C}_i^3 + I_{i72} \tilde{C}_i^2 + I_{i71} \tilde{C}_i + I_{i70} \right) k^2 > 0. \quad (19)$$

Тут

$$\begin{aligned} I_{154} &= D_2^2 (D_1 (A'_2)^2 + D_2 \mu^2) > 0; \quad I_{174} = D_1 D_2^2 (D_2 (A'_1)^2 + D_1 \mu^2) > 0; \\ I_{254} &= D_1^2 (D_2 (A'_1)^2 + D_1 \mu^2) > 0; \quad I_{274} = D_2 D_1^2 (D_1 (A'_2)^2 + D_2 \mu^2) > 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Із нерівностей (20) слідує, що старші коефіцієнти нерівностей (18)–(19) додатні звідки випливає, що асимптотична стійкість завжди буде можлива при досить великих значеннях одного або двох кінетичних моментів.

У випадку шарнірів Гука, згідно роботи [8], треба покласти $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$. У цьому разі умови стійкості (11)–(12) відносно квадрата кутової швидкості $x = \omega_0^2$ мають вигляд:

$$\tilde{I}_{52}x^2 + \tilde{I}_{51}x + \tilde{I}_{50} > 0, \quad (21)$$

$$\tilde{I}_{72}x^2 + \tilde{I}_{71}x + \tilde{I}_{70} > 0, \quad (22)$$

де

$$I_{52} = (C_1^2 D_2 + C_2^2 D_1) \left[(C_1 D_2 + C_2 D_1)^2 \mu^2 + (C_1 A'_2 - C_2 A'_1)^2 D_1 D_2 \right] > 0; \quad (23)$$

$$I_{72} = D_1 D_2 (C_1 - C_2)^2 \left[(C_1 D_2 + C_2 D_1)^2 \mu^2 + (C_1 A'_2 - C_2 A'_1)^2 D_1 D_2 \right] > 0.$$

Із нерівностей (23) випливає, що старші коефіцієнти нерівностей (21)–(22) додатні при $C_1 \neq C_2$ і асимптотична стійкість завжди буде можлива при досить великій кутовій швидкості.

З характеристичного рівняння (8) слідує, що коли гіроскопи однакові ($A'_2 = A'_1$, $C_2 = C_1$, $m_2 = m_1$, $c_2 = c_1$), обертаються з однаковими кутовими швидкостями ($\omega_{02} = \omega_{01} = \omega_0$) і мають рівні коефіцієнти дисипації ($D_2 = D_1$), то $F_2 = F_1$ і це рівняння розпадається на два рівняння:

$$A_1 \lambda^2 + (i C_1 \omega_0 + D_1) \lambda - k = 0 \text{ і } (A_1 + m_1 c_1^2) \lambda^2 + (i C_1 \omega_0 + D_1) \lambda - k = 0.$$

Слід зазначати, що перше і друге рівняння при $k \neq 0$ описують асимптотично стійкі обертання одного вільного гіроскопа на який діє відновлювальний момент, тільки у другому рівнянні до екваторіального моменту інерції додається ще момент інерції маси другого гіроскопа. Коливання стійкі, тому що для цих рівнянь $I_3 = k D_1^2 > 0$. Як це вже було раніше відмічено, що при відсутності пружності у шарнірі ($k = 0$) з'являються кратні нульові коріння і питання про асимптотичну стійкість вимагає додаткових досліджень.

5. Висновки.

Виведені рівняння обертання у середовища з опором вільної системи двох твердих тіл, з'єднаних пружним сферичним шарніром або шарніром Гука. У припущенні, що центр мас твердих тіл знаходиться на третій головній осі інерції, виписані рівняння збуреного руху механічної системи у вигляді восьми звичайних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами. У випадку двох гіроскопів Лагранжа отримано характеристичне рівняння четвертого порядку. На підставі критерія Льєнара–Шіпара, записаного в іннормному вигляді, отримані умови стійкості рівномірних обертань гіроскопів Лагранжа у вигляді системи трьох нерівностей. Проведені аналітичні дослідження цих умови стійкості. Доведено, що перша нерівність завжди виконана. Із третьої нерівності слідує, що коли гіроскопи мають рівні осеві моменти інерції і обертаються з однаковими кутовими швидкостями в різні сторони або відсутня пружність у шарнірі, то характеристичне рівняння має кратне коріння і питання про стійкість вимагає додаткових досліджень. Виписані умови стійкості відносно кінетичних моментів і показано, що старші коефіцієнти цих двох нерівностей додатні звідки випливає, що стійкість завжди буде можлива при досить великих значеннях одного або двох кінетичних моментів. Аналогічні висновки отримані і у випадку шарніра Гука, а також показано, що коли гіроскопи однакові, то характеристичне рівняння розпадається на два рівняння. Перше і друге рівняння описують стійкі вільні обертання одного гіроскопа на який

діє відновлювальний момент, тільки у одному із рівнянні треба до екваторіального моменту додати масу другого гіроскопа. При відсутності пружності у шарнірі з'являється кратний нульовий корінь і питання про стійкість вимагає додаткових досліджень.

Дослідження виконані в рамках відомчої тематики НАН України № 0117Г002164 і програмно-цільової та конкурсної тематики НАН України № 2-19-П (науково дослідна робота за темою ВБ-15-18-21/479) та були частково підтримана грантом від Фонду Сімонса (Нагорода 1160640, Президентські дискреційні гранти на підтримку України, одержувач Кононов Ю.М.).

Цитована література

1. Болграбская И.А., Лесина М.Е., Чебанов Д.А. Динамика систем связанных твёрдых тел. Серия "Задачи и методы: математика, механика, кибернетика". – ИПММ НАН Украины, Том 9. – К.: Наукова Думка, 2012. – 395 с.
2. Bauchau O.A. Flexible Multibody Dynamics. – Springer. – 2011. – 730 p.
3. Chaudhary H., Saha S.K. Dynamics and Balancing of Multibody Systems. – Springer. – 2009. – 176 p.
4. Wittenburg J. Dynamics of Multibody Systems. – Springer. – 2008. – 223 p.
5. Сапрычев В.А. Положение относительного равновесия двух тел, соединенных сферическим шарниром, на круговой орбите // Космич. исслед. – 1967. – Т. 5, № 3. – С. 360–364.
6. Robe T.R. Stability of two tethered unsymmetrical Earth-Pointing bodies // AIAA Journal. – 1968. – V.6, № 12. – P. 2282–2288.
7. Wittenburg J. Die numerische bestimmung Stabiler Gleichgewichtslagen von Vielkorper-Satelliten-system // Ingh. Arch. – 1970. – V. 39, № 3. – P. 201–208.
8. Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононович Г.А. Устойчивость движения систем связанных твёрдых тел. – К.: Наук. думка, 1991. – 166 с.
9. Савченко А.Я., Болграбская И.А. Устойчивость равномерных вращений свободной связки n гироскопов Лагранжа // Математическа физика и нелинейная механика. – 1984. – Т. 36, № 2. – С. 9–14.
10. Кононов Ю.Н. О движения системы двух твердых тел с полостями, содержащими жидкость // Механика твердого тела. Межвед. сб. науч. тр. – 1997. – Вып. 29. – С. 76–85.
11. Кононов Ю.Н. Об устойчивости движения системы n связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость // Механика твердого тела. Межвед. сб. науч. тр. – 2006. – Вып. 36. – С. 75–82.
12. Кононов Ю.Н. Вплив дисипативного і постійного моментів на стійкість рівномірного обертання двох пружно зв'язаних вільних гіроскопів Лагранжа // Праці ІПММ НАН України. – 2019. – Т. 33. – С. 132–141.
13. Kononov Yu.M., Sviatenco Ya.I. Stabilization of spinning Lagrange gyroscope filled with ideal fluid in a resisting medium // Int. Appl. Mech. – 2023. – V. 59, № 2. – P. 207–217.
14. Aslanov V.S. Rigid Body Dynamics for Space Applications. – Butterworth Heinemann, Oxford. – 2017. – 410 p.
15. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. Evolution of the Motions of a Rigid Body About its Centre of Mass. – Springer International Publishing AG, 2017. – 243 p.
16. Leshchenko D.D., Ershkov S.V., Kozachenko T.A. Evolution of a heavy rigid body rotation under the action of unsteady restoring and perturbation torques // Nonlinear Dyn. – 2021. – P. 1517–1528.
17. Leshchenko D.D., Ershkov S.V., Kozachenko T.A. Rotations of a Rigid Body Close to the Lagrange Case under the Action of Nonstationary Perturbation Torque // J. Appl. Comput. Mech. – 2022. – V. 8, № 3. – P. 1023–1031.
18. Джурин Э. Инноры и устойчивость динамических систем. – М.: Наука. – 1979. – 304 с.

References

1. Bolgrabskaya, I.A., Lesina, M.E., Chebanov, D.A. (2012). *Dinamika sistem svyazannyih tvyordyih tel*. Seriya "Zadachi i metody: matematika, mehanika, kibernetika", V. 9. K.: Nauk. Dumka (in Ukraine).
2. Bauchau, O.A. (2011). *Flexible Multibody Dynamics*. Springer.
3. Chaudhary, H., Saha, S.K. (2009). *Dynamics and Balancing of Multibody Systems*.
4. Wittenburg, J. (2008). *Dynamics of Multibody Systems*. Springer.
5. Saryichev, V.A. (1967). Polozhenie otnositelnogo ravnovesiya dvuh tel, soedinennyih sfericheskim shar-nirom, na krugovoy orbite. *Kosmich. Issled.*, 5(3), 360–364 (in Russia).
6. Robe, T.R. (1968). Stability of two tethered unsymmetrical Earth-Pointing bodies. *AIAA Journal*, 6(12), 2282–2288.
7. Wittenburg, J. (1970). Die numerische bestimmung Stabiler Gleichgewichtslagen von Vielkorper-Satellitensystem. *Ingh. Arch.*, 39(3), 201–208.
8. Savchenko, A.Ya., Bolgrabskaya, I.A., Kononyihin, G.A. (1991). *Ustoychivost dvizheniya sistem svyazannyih tvyordyih tel*. K.: Nauk. dumka (in Ukraine).
9. Savchenko, A.Ya., Bolgrabskaya, I.A. (1984). Ustoychivost ravnomernyih vrascheniy svobodnoy svyaz-ki giroskopov Lagranzha. *Matematicheska fizika i nelineynaya mehanika*, 36(2), 9–14 (in Ukraine).
10. Kononov, Yu.N. (1997). O dvizheniya sistemyi dvuh tverdyyh tel s polostyami, sodержaschimi zhid-kost. *Mehanika tverdogo tela. Mezhved. sb. nauch. tr.*, 29, 76–85 (in Ukraine).
11. Kononov, Yu.N. (2006). Ob ustoychivosti dvizheniya sistemyi svyazannyih tverdyyh tel s polostyami, sodержaschimi zhidkost. *Mehanika tverdogo tela. Mezhved. sb. nauch. tr.*, 36, 75–82 (in Ukraine).
12. Kononov, Yu.N., Sviatenko, Ya.I. (2019). Vplyv dysypatyvnoho i postiinoho momentiv na stiikist rivnomirnoho obertannia dvokh pruzhno zviazanykh vilnykh hiroskopiv Lahranzha. *Pratsi instytutu prykl. matem. i mekh. NANU*, 33, 132–141.
13. Kononov, Yu.M., Sviatenko, Ya.I. (2023). Stabilization of spinning Lagrange gyroscope filled with ideal fluid in a resisting medium. *Int. Appl. Mech.*, 59(2), 207–217.
14. Aslanov, V.S. (2017). *Rigid Body Dynamics for Space Applications*. Butterworth Heinemann, Oxford.
15. Chernousko, F.L., Akulenko, L.D., Leshchenko, D.D. (2017). *Evolution of the Motions of a Rigid Body About its Centre of Mass*. Springer International Publishing AG.
16. Leshchenko, D.D., Ershkov, S.V., Kozachenko, T.A. (2021). Evolution of a heavy rigid body rotation under the action of unsteady restoring and perturbation torques. *Nonlinear Dyn.*, 1517–1528.
17. Leshchenko, D., Ershkov, S.V., Kozachenko, T. (2022). Rotations of a Rigid Body Close to the Lagrange Case under the Action of Nonstationary Perturbation Torque. *J. Appl. Comput. Mech.*, 8(3), 1023–1031.
18. Jury, E.I. (1974). *Inners and stability of dynamic systems*. A Wiley- Interscience Publication John Wiley & Sons.

Yu.M. Kononov

On the stability of rotation in an environment with resistance of a free system of two elastically connected rigid bodies.

The equations of rotation in a medium with resistance of a free system of two rigid bodies connected by an elastic spherical joint or Hooke's joint are obtained. Under the assumption that the center of mass of solid bodies is located on the third axis of inertia, equations of perturbed motion are obtained. These equations are represented as eight ordinary differential equations with periodic coefficients. For two Lagrange gyroscopes, a fourth-order characteristic equation is obtained. Based on the Li?nard-Schipart criterion, written in the form of innors, conditions for the asymptotic stability of uniform

rotations of Lagrange gyroscopes are obtained. These conditions are presented in the form of three inequalities. Analytical studies of stability conditions were carried out. It has been proven that the first inequality is always satisfied. From the third inequality it follows that if the gyroscopes have equal axial moments of inertia and rotate with the same angular velocities in different directions or there is no elasticity in the hinge, then the characteristic equation has a multiple root. In this case, the issue of sustainability requires additional research. The conditions for stability in terms of kinetic moments are written out and it is shown that the leading inequality coefficients are positive, from which it follows that stability will always be possible for sufficiently large values of one or two kinetic moments. Similar conclusions were obtained with the Hooke's hinge, and it was also shown that with identical gyroscopes the characteristic equation splits into two equations. In the absence of elasticity, a multiple zero root appears in the hinge and stability requires additional study.

Keywords: *rotation of a free system of two elastically connected rigid bodies, elastic spherical joint, Hooke's joint, medium with resistance, constant moment, Lagrangian gyroscopes, uniform rotation, asymptotic stability.*

Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Слов'янськ
kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com

Отримано 11.09.23