

УДК 517.54

DOI: 10.37069/1683-4720-2023-37-11

©2023. С.М. Чуйко, О.С. Чуйко, В.О. Кузьміна

ПОЛОЖЕННЯ РІВНОВАГИ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНИХ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ

Дослідження диференціально-алгебраїчних рівнянь започатковане у роботах К. Вейерштрасса, М.М. Лузіна та Ф.Р. Гантмахера. Роботи S. Campbell, Ю.Є. Бояринцева, В.Ф. Чистякова, А.М. Самойленка, М.О. Перестюка, В.П. Яковця, О.А. Бойчука, А. Pichmann та T. Reis присвячені систематичному дослідженню диференціально-алгебраїчних крайових задач. У той же час, дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач тісно пов'язані з вивченням лінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, започаткованих у роботах А. Пуанкаре, О.М. Ляпунова, М.М. Крилова, М.М. Боголюбова, І.Г. Малкіна, А.Д. Мишкіса, Е.О. Гребенікова, Ю.О. Рябова, Ю.О. Митропольського, І.Т. Кігурадзе, А.М. Самойленка, М.О. Перестюка, та О.А. Бойчука. Дослідження лінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь тісно пов'язане з численними застосуваннями відповідних математичних моделей у теорії нелінійних коливань, механіці, біології, радіотехніці та теорії стійкості руху. Таким чином, актуальна проблема перенесення результатів, отриманих у статтях та монографіях S. Campbell, А.М. Самойленка та О.А. Бойчука на нелінійні інтегрально-диференціальні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної, зокрема, знаходження необхідних та достатніх умов існування розв'язків нелінійних інтегро-диференціальних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної. Нами досліджена задача про знаходження конструктивних умов існування та схему побудови розв'язків нелінійної інтегро-диференціальної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної. Зокрема, досліджена задача про знаходження положень рівноваги нелінійних інтегрально-диференціальних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної. Особливістю таких задач є неможливість використання класичного методу Ньютона. Задля знаходження положень рівноваги нелінійних інтегрально-диференціальних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної у статті використовується узагальнений метод Ньютона – Канторовича.

MSC: 34N05.

Ключові слова: диференціально-алгебраїчні рівняння, інтегрально-диференціальні крайові задачі, метод Ньютона–Канторовича.

Нами досліджена задача про знаходження положень рівноваги нелінійних інтегрально-диференціальних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної [1–3]. Особливістю таких задач є неможливість використання класичного методу Ньютона [4].

1. Постановка задачі.

Досліджуємо задачу про побудову T – періодичного розв'язку [1–3]

$$z(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad z'(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$$

нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + \Phi(t) \int_a^b F(z(s), z'(s), s) ds + f(t), \quad \ell z(\cdot) = \alpha + Jz(\cdot), \quad (1)$$

не розв'язаної відносно похідної. Розв'язок періодичної задачі для рівняння (1) шукаємо в околі T – періодичного розв'язку

$$z_0(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad z'_0(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$$

породжуючої крайової задачі

$$z'_0(t) = A(t)z_0(t) + f(t), \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha.$$

Тут

$$A(t), B(t) \in \mathbb{L}_{m \times n}^2[a; b] := \mathbb{L}^2[a; b] \otimes \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \Phi(t) \in \mathbb{L}_{m \times q}^2[a; b], \quad f(t) \in \mathbb{L}^2[a; b].$$

Матрицю $A(t)$ припускаємо прямокутною, або ж квадратною, але виродженою. Крім того

$$\ell z(\cdot) : \mathbb{D}^2[a; b] \rightarrow \mathbb{R}^p$$

— лінійний обмежений векторний функціонал, визначений на просторі $\mathbb{D}^2[a; b]$ n -вимірних абсолютно неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій; $Jz(\cdot)$ — нелінійний обмежений векторний функціонал, визначений на цьому ж просторі. Нелінійну функцію $F(z, z', t)$ та нелінійний функціонал $Jz(\cdot)$ вважаємо двічі неперервно-диференційовними по z та z' у деякій області $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Крім того, функція $F(z, z', t)$ неперервна по t на відрізку $[a; b]$.

Поставлена задача з одного боку продовжує дослідження нелінійних інтегрально-диференціальних крайових задач [1–3, 5], з іншого боку, поставлена задача продовжує дослідження положень рівноваги нелінійних диференціальних та диференціально-алгебраїчних крайових задач [6, 7].

2. Положення рівноваги нелінійної інтегрально-диференціальної системи.

Положенням рівноваги нелінійної інтегро-диференціальної системи називатимемо вектор-функцію

$$z(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad z'(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$$

яка задовольняє двом умовам [6, 7]:

$$A(t)z'(t) = 0, \quad B(t)z(t) + f(t) + \Phi(t) \int_a^b F(z(s), z'(s), s) ds = 0. \quad (2)$$

У найпростішому випадку, за умови

$$B(t) \equiv B, \quad f(t) \equiv f, \quad \Phi(t) \equiv \Phi - \text{const}, \quad F(z, z', t) \equiv F(z, z')$$

положення рівноваги $z(t) \equiv z - \text{const}$ нелінійної інтегрально-диференціальної системи (1) будемо називати стаціонарними. Стаціонарні положення рівноваги нелінійної інтегрально-диференціальної системи (1) визначає рівняння

$$\varphi(z) := Bz + f + (b - a)\Phi F(z, z') = 0. \quad (3)$$

Функція

$$\varphi(z) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad m \neq n$$

двічі неперервно-диференційовна по z в області Ω . Для побудови ітераційної схеми, збіжної до розв'язку рівняння (3) використаємо узагальнений метод Ньютона [8,9].

Лема. Припустимо, що для рівняння (3) виконані наступні умови

1. Нелінійна вектор-функція $\varphi(z) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, двічі неперервно-диференційовна в околі точки z_0 , має корінь $z^* \in \mathbb{R}^n$.
2. У заданому околі нульового наближення z_0 мають місце нерівності

$$\left\| J_k^+ \right\| \leq \sigma_1(k), \quad \left\| d^2 \varphi(\xi_k; z^* - z_k) \right\| \leq \sigma_2(k) \cdot \|z^* - z_k\|. \quad (4)$$

3. Існує константа

$$\theta := \sup_{k \in N} \left\{ \frac{\sigma_1(k) \sigma_2(k)}{2} \right\}.$$

Тоді за умов

$$PJ_k^* = 0, \quad J_k := \varphi'(z_k) \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (5)$$

та

$$\theta \cdot |z^* - z_0| < 1 \quad (6)$$

для знаходження розв'язку z^* рівняння (3) може бути використана ітераційна схема

$$z_{k+1} = z_k - J_k^+ \varphi(z_k), \quad (7)$$

при цьому швидкість збіжності послідовності $\{z_k\}$ до розв'язку z^* рівняння (3) квадратична. Вектор-функція z^* за умови

$$B(t) \equiv B, \quad f(t) \equiv f, \quad \Phi(t) \equiv \Phi - \text{const}, \quad F(z, z', t) \equiv F(z, z')$$

є положенням рівноваги нелінійної інтегрально-диференціальної системи (1). Тут

$$PJ_k^* : \mathbb{R}^m \rightarrow N(J_k^*)$$

— ортопроектор матриці $J_k^* \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Зауважимо, що умова (5) рівнозначна до вимоги повноти матриці J_k і можлива лише у випадку $m \leq n$.

Приклад. Вимоги леми задовольняє нелінійна інтегрально-диференціальна система

$$A(t) z'(t) = B(t) z(t) + \Phi(t) \int_0^1 F(z(s), z'(s), s) ds, \quad \Phi := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

де

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ \sin t & \cos t & \sin t \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F(z(t), z'(t)) := - \begin{pmatrix} \cos u(t) \\ \cos v(t) \\ \cos w(t) \end{pmatrix}, \quad z(t) := \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}.$$

Вектор-функція $\varphi(z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ визначена в довільній відкритій області $D \subset \mathbb{R}^3$ і двічі неперервно-диференційовна по z в околі $\Omega \subseteq D$. Покладемо

$$z_0 := (0,7 \quad 0,7 \quad 0,7),$$

при цьому

$$\text{rank} [\varphi'(z_0)] = 2, \quad \|\varphi(z_0)\|_\infty \approx 0,0648 \ 422,$$

крім того

$$z_1 \approx \begin{pmatrix} 0,720 \ 285 \\ 0,751 \ 774 \\ 0,731 \ 488 \end{pmatrix}, \quad \|\varphi(z_1)\|_\infty \approx 0,00 \ 100 \ 997.$$

Далі

$$\text{rank} [\varphi'(z_1)] = 2,$$

крім того

$$\left\| [\varphi'(z_1)]^+ \right\|_\infty := \sigma_1(1) \approx 1,29 \ 305,$$

$$\left\| d^2 \varphi(z_1) \right\|_\infty := \sigma_2(1) \approx 0,751 \ 617.$$

при цьому виконано умову (6)

$$\theta_1 \cdot \|z_1 - z_0\|_\infty \approx 0,0251 \ 591 \ll 1,$$

де

$$\theta_1 := \frac{\sigma_1(1)\sigma_2(1)}{2} \approx 0,485 \ 941,$$

тому знаходимо

$$z_2 \approx \begin{pmatrix} 0,720 \ 471 \\ 0,751 \ 495 \\ 0,730 \ 669 \end{pmatrix}, \quad \|\varphi(z_2)\|_\infty \approx \times 10^{-16}$$

Далі

$$\text{rank} [\varphi'(z_2)] = 2,$$

крім того

$$\left\| [\varphi'(z_2)]^+ \right\|_{\infty} := \sigma_1(2) \approx 1,29\,305,$$

$$\left\| d^2\varphi(z_2) \right\|_{\infty} := \sigma_2(2) \approx 0,751\,617.$$

при цьому виконано умову (6)

$$\theta_2 \cdot \|z_2 - z_0\|_{\infty} \approx 0,0251\,591 \ll 1,$$

де

$$\theta_1 := \frac{\sigma_1(1)\sigma_2(1)}{2} \approx 0,485\,941,$$

тому знаходимо

$$z_3 \approx \begin{pmatrix} 0,720\,471 \\ 0,751\,495 \\ 0,730\,669 \end{pmatrix}, \quad \text{rank} [\varphi'(z_3)] = 2,$$

при цьому

$$\|\varphi(z_3)\|_{\infty} \approx 1,11\,022 \times 10^{-16}.$$

Припустимо далі, що для рівняння (3) не виконані умови доведеної леми, а саме: припустимо, що для рівняння (3) не виконано умову (5): $P_{J_k^*} \neq 0$, або не виконано умову

$$B(t) \equiv B, \quad f(t) \equiv f, \quad \Phi(t) \equiv \Phi - \text{const}, \quad F(z, z', t) \equiv F(z, z').$$

Позначимо

$$\Psi(t) \in \mathbb{L}^2[a, b]$$

— $(\rho \times \rho)$ — вимірну невідроджену матрицю. У випадку

$$P_{A_{\rho}(t)}\Phi(t) \in \mathbb{L}^2[a, b]$$

першу із умов (15) задовольняє вектор

$$z(t) = P_{A_{\rho}(t)}x(t), \quad x(t) \in \mathbb{C}^1[a, b],$$

де

$$x(t) = \Psi(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^{\rho}.$$

За умови

$$B_{\rho}(t) := B(t)P_{A_{\rho}(t)}\Psi(t) \equiv B_{\rho},$$

а також

$$f(t) \equiv f, \quad \Phi(t) \equiv \Phi, \quad F(z, z', t) \equiv F(z, z') - \text{const}$$

положення рівноваги

$$z(t) := P_{A_\rho(t)} \Psi(t) y$$

будемо називати нестационарним положенням рівноваги нелінійної інтегрально-диференціальної системи (1). Нестационарні положення рівноваги нелінійної інтегрально-диференціальної системи (1) визначає рівняння

$$\varphi_\rho(y) := B_\rho y + (b - a) \Phi F(P_{A_\rho(t)} \Psi(t) y, (P_{A_\rho(t)} \Psi(t))' y) = 0. \quad (9)$$

Функція

$$\varphi_\rho(y) : \mathbb{R}^\rho \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \rho \neq m$$

двічі неперервно-диференційовна по y . Для побудови ітераційної схеми, збіжної до розв'язку рівняння (9), використаємо метод Ньютона–Канторовича [8, 9].

Лема. Припустимо, що для рівняння (9) виконані наступні умови

1. Нелінійна вектор-функція $\varphi_\rho(y) : \mathbb{R}^\rho \rightarrow \mathbb{R}^m$, двічі неперервно-диференційовна в околі точки y_0 має корінь $y^* \in \mathbb{R}^\rho$.

2. У заданому околі нульового наближення y_0 мають місце нерівності

$$\left\| \mathcal{J}_k^+ \right\| \leq \sigma_1(k), \quad \left\| d^2 \varphi_\rho(\xi_k; \tilde{y} - y_k) \right\| \leq \sigma_2(k) \cdot \|\tilde{y} - y_k\|. \quad (10)$$

3. Існує константа

$$\check{\theta} := \sup_{k \in N} \left\{ \frac{\sigma_1(k) \sigma_2(k)}{2} \right\}.$$

Тоді за умов

$$P_{\mathcal{J}_k^*} = 0, \quad \mathcal{J}_k := \varphi'_\rho(y_k) \in \mathbb{R}^{m \times \rho} \quad (11)$$

та

$$\check{\theta} \cdot |\tilde{y} - y_0| < 1 \quad (12)$$

для знаходження розв'язку y^* рівняння (9) може бути використана ітераційна схема

$$y_{k+1} = y_k - \mathcal{J}_k^+ \varphi_\rho(y_k), \quad (13)$$

при цьому швидкість збіжності послідовності $\{y_k\}$ до розв'язку y^* рівняння (9) квадратична. За умови

$$B_\rho(t) := B(t) P_{A_\rho(t)} \Psi(t) \equiv B_\rho,$$

а також

$$f(t) \equiv f, \quad \Phi(t) \equiv \Phi, \quad F(z, z', t) \equiv F(z, z') - \text{const}$$

вектор y^* визначає положення рівноваги

$$z(t) = P_{A_\rho(t)} \Psi(t) y^*$$

нелінійної інтегрально-диференціальної системи (1). Тут

$$P_{\mathcal{J}_k^*} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(\mathcal{J}_k^*)$$

— ортопроектор матриці $\mathcal{J}_k^* \in \mathbb{R}^{m \times \rho}$.

Відзначимо, що умова (11) рівнозначна до вимоги повноти матриці $\mathcal{J}_k$ і можлива лише у випадку $m \leq \rho$.

ПРИКЛАД. Вимоги леми задовольняє нелінійна інтегрально-диференціальна система

$$A(t) z'(t) = B(t) z(t) + f(t) + \Phi(t) \int_0^1 F(z(s), z'(s), s) ds, \quad \Phi := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

де

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} \sin t & \cos t & \sin t \\ \cos t & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad f(t) := - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$F(z(t), z'(t)) := V(t) z(t) z^*(t) z(t), \quad V(t) := \begin{pmatrix} \sin t & \cos t & \sin t \\ \cos t & -\sin t & \cos t \\ \sin t & \cos t & \sin t \end{pmatrix}.$$

Для рівняння (14) не виконується умова

$$B(t) \equiv B - \text{const}, \quad Z(z, z', t) \equiv Z(z, z').$$

Для матриці

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

вектор-функція

$$\varphi_\rho(y) = \begin{pmatrix} u(1 + u^2 + v^2) - 3 \\ v(1 + u^2 + v^2) - 3 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

визначена в довільній відкритій області $D \subset \mathbb{R}^2$ і двічі неперервно-диференційовна по

$$y := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

в околі $\Omega \subseteq D$. Покладемо

$$y_0 := (0,98 \quad 1,01)^*,$$

при цьому

$$\text{rank} [\varphi'_\rho(y_0)] = 2, \quad \|\varphi_\rho(z_1)\|_\infty \approx 0,000\,898\,028,$$

крім того

$$y_1 \approx \begin{pmatrix} 1,00\,018 \\ 0,999\,989 \end{pmatrix}.$$

Далі

$$\text{rank} [\varphi'_\rho(y_1)] = 2,$$

крім того

$$\left\| [\varphi'_\rho(y_1)]^+ \right\|_\infty := \sigma_1(1) \approx 0,333\,313,$$

$$\left\| d^2\varphi_\rho(y_1) \right\|_\infty := \sigma_2(1) \approx 12,0014.$$

при цьому виконано умову (12)

$$\check{\theta}_1 \cdot \|y_1 - y_0\|_\infty \approx 0,0403702 \ll 1,$$

де

$$\check{\theta}_1 := \frac{\sigma_1(1)\sigma_2(1)}{2} \approx 2,00\,012.$$

Оскільки умова (12) для першого кроку ітераційної схеми (13) виконана, знаходимо

$$y_2 \approx \begin{pmatrix} 1,000\,000\,020\,361\,2347 \\ 0,999\,999\,997\,895\,1472 \end{pmatrix}.$$

Далі

$$\text{rank} [\varphi'_\rho(y_2)] = 2,$$

крім того

$$\left\| [\varphi'_\rho(y_2)]^+ \right\|_\infty := \sigma_1(2) \approx 0,333\,333,$$

$$\left\| d^2\varphi_\rho(y_2) \right\|_\infty := \sigma_2(2) \approx 12,0000.$$

при цьому виконана умова (12)

$$\check{\theta}_2 \cdot \|z_2 - z_0\|_\infty \approx 0,04 \ll 1,$$

де

$$\check{\theta}_2 := \frac{\sigma_1(2)\sigma_2(2)}{2} \approx 2,00\,000.$$

Для другого кроку ітераційної схеми (13) нев'язка отриманого наближення

$$\|\varphi_\rho(z_2)\|_\infty \approx 9,75\,965 \times 10^{-8}$$

достатньо велика, тому знаходимо

$$y_3 \approx \begin{pmatrix} 1,0000\,000\,000\,000\,002 \\ 0,999\,999\,999\,999\,9999 \end{pmatrix}.$$

Далі

$$\text{rank} [\varphi'_\rho(y_3)] = 2,$$

крім того

$$\left\| [\varphi'_\rho(y_3)]^+ \right\|_\infty := \sigma_1(3) \approx 0,333\,333,$$

$$\left\| d^2\varphi_\rho(y_3) \right\|_\infty := \sigma_2(3) \approx 12,0000.$$

при цьому виконана умова (12)

$$\check{\theta}_3 \cdot \|z_3 - z_0\|_\infty \approx 0,04 \ll 1,$$

де

$$\check{\theta}_3 := \frac{\sigma_1(3)\sigma_2(2)}{2} \approx 2,00\,000.$$

Для третього кроку ітераційної схеми (13) нев'язка отриманого наближення

$$\|\varphi_\rho(y_3)\|_\infty \approx 1,11\,022 \times 10^{-15},$$

тому природно обмежитися цим наближенням. Знайдений вектор y_3 визначає наближення до положення рівноваги нелінійної інтегрально-диференціальної системи (14). При цьому нелінійна інтегрально-диференціальна система (14) має точне положення рівноваги

$$z(t) = P_{A_\rho(t)}\Phi(t)y_3 \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t - \cos t \\ -\sin t - \cos t \end{pmatrix}.$$

яке визначає вектор

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

при цьому

$$\|y_1 - y\|_\infty \approx 0,000\,183\,891, \quad \|y_2 - y\|_\infty \approx 2,03\,612 \times 10^{-8},$$

$$\|y_3 - y\|_\infty \approx 2,22\,045 \times 10^{-16},$$

3. Положення рівноваги нелінійних інтегрально-диференціальних крайових задач.

Досліджуємо задачу про побудову розв'язків

$$z(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad z'(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$$

нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (1), не розв'язаної відносно похідної. Будемо називати положенням рівноваги нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (1), не розв'язаної відносно похідної вектор-функцію

$$z(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad z'(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$$

яка задовольняє трьом умовам:

$$A(t)z' = 0, \quad B(t)z(t) + f(t) + \Phi(t) \int_a^b F(z(s), z'(s), s) ds = 0, \quad \ell z(\cdot) = \alpha + Jz(\cdot). \quad (15)$$

У найпростішому випадку, за умови

$$B(t) \equiv B, \quad f(t) \equiv f, \quad \Phi(t) \equiv \Phi, \quad F(z, z', t) \equiv F(z, z') - \text{const}$$

положення рівноваги $z(t) \equiv z - \text{const}$ нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (1) будемо називати стаціонарними. Позначимо вектор-функцію

$$\varphi(z) := \begin{pmatrix} Bz + f + (b-a)\Phi F(z, z') \\ \ell z(\cdot) - \alpha - Jz(\cdot) \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+p}.$$

Задача про побудову положення рівноваги

$$z(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad z'(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$$

нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (1), не розв'язаної відносно похідної приводить до задачі про знаходження констант $z(t) \equiv z^*$, які є коренями рівняння

$$\varphi(z) = 0. \quad (16)$$

Для знаходження розв'язку рівняння (16) може бути використаний узагальнений метод Ньютона [8, 9].

Теорема. Припустимо, що для рівняння (16) виконані наступні умови

1. Нелінійна вектор-функція $\varphi(z) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+p}$, двічі неперервно-диференційована в околі точки z_0 , має корінь $z^* \in \mathbb{R}^n$.
2. У заданому околі нульового наближення z_0 мають місце нерівності

$$\left\| J_k^+ \right\| \leq \sigma_1(k), \quad \left\| d^2 \varphi(\xi_k; z^* - z_k) \right\| \leq \sigma_2(k) \cdot \|z^* - z_k\|. \quad (17)$$

3. Існує константа

$$\theta := \sup_{k \in N} \left\{ \frac{\sigma_1(k)\sigma_2(k)}{2} \right\}.$$

Тоді за умов

$$PJ_k^* = 0, \quad J_k := \varphi'(z_k) \in \mathbb{R}^{(m+p) \times n} \quad (18)$$

та

$$\theta \cdot |z^* - z_0| < 1 \quad (19)$$

для знаходження розв'язку z^* рівняння (16) може бути використана ітераційна схема

$$z_{k+1} = z_k - J_k^+ \varphi(z_k), \quad (20)$$

при цьому швидкість збіжності послідовності $\{z_k\}$ до розв'язку z^* рівняння (16) квадратична. Вектор-функція z^* за умови

$$B(t) \equiv B, \quad f(t) \equiv f, \quad \Phi(t) \equiv \Phi - \text{const}, \quad F(z, z', t) \equiv F(z, z')$$

є положенням рівноваги нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (1), не розв'язаної відносно похідної. Тут

$$PJ_k^* : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(J_k^*)$$

— ортопроектор матриці $J_k^* \in \mathbb{R}^{n \times (m+p)}$.

У частковому випадку $n = m + p$ для розв'язання рівняння (16) може бути використаний традиційний метод Ньютона-Канторовича [4, с. 680, 682]. Позначимо вектор-функцію $\varphi(z) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, визначену у відкритій області D . Досліджуємо задачу про знаходження розв'язку $z \in D \subset \mathbb{R}^n$ нелінійного рівняння

$$\varphi(z) = 0. \quad (21)$$

Функцію $f(z)$ вважаємо двічі неперервно-диференційовною по z в області D . Для побудови послідовності $\{z_k\}$, збіжної до розв'язку $\tilde{z} \in \mathbb{R}^n$ скористаємось методом Ньютона [4]. Нехай знайдено наближення $z_k(\varepsilon)$, достатньо близьке до точного розв'язку $\tilde{z}$ рівняння (21). Для знаходження наступного наближення z_{k+1} до точного розв'язку покладемо

$$z_{k+1} = z_k - [\varphi'(z_k)]^{-1} \varphi(z_k). \quad (22)$$

Припустимо, що в околі $\Omega \subseteq D \subset \mathbb{R}^n$ точного розв'язку $\tilde{z} \in \Omega$ мають місце нерівності

$$\left\| [\varphi'(z_0)]^{-1} \right\| \leq \gamma_1, \quad \left\| \varphi(z_0) \right\| \leq \gamma_2, \quad \left\| \varphi''(z_k) \right\| \leq \gamma_3(k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Умови збіжності ітераційної схеми (22) визначає наступне твердження.

Лема. Припустимо, що вектор-функція $\varphi(z) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ визначена у відкритій області $D \subset \mathbb{R}^n$ і двічі неперервно-диференційовна по z в околі $\Omega \subseteq D \subset \mathbb{R}^n$. Припустимо також, що $\det [\varphi'(z_0)] \neq 0$ та існує константа

$$\theta = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ 2 \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3(k) \right\} < 1.$$

Тоді рівняння (21) має єдиний розв'язок $z^* \in \Omega$, до якого збігається ітераційна схема (22). Припустимо, що вектор-функція $\varphi(z)$, двічі неперервно-диференційовна в околі точки z_0 , має корінь $z^* \in \mathbb{R}^n$. Припустимо, також що в малому околі точки z_0 мають місце нерівності

$$\left\| [\varphi'(z_0)]^{-1} \right\| \leq \gamma_1, \quad \left\| \varphi(z_0) \right\| \leq \gamma_2, \quad \left\| \varphi''(z_k) \right\| \leq \gamma_3(k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

та існує константа

$$\theta = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ 2 \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3(k) \right\} < 1.$$

Тоді рівняння (16) у малому околі точки z_0 має єдиний розв'язок, до якого збігається ітераційна схема

$$z_{k+1} = z_k - J_k^{-1} \varphi(z_k). \quad (23)$$

ПРИКЛАД. Вимоги леми задовольняє нелінійна інтегрально-диференціальна крайова задача

$$A(t) z'(t) = B(t) z(t) + f(t) + \Phi(t) \int_0^1 F(z(s), z'(s), s) ds, \quad \ell z(\cdot) = Jz(\cdot), \quad (24)$$

де

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z(t) := \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix},$$

крім того

$$F(z) := \begin{pmatrix} \sin v(t) + \cos w(t) \\ \sin w(t) + \cos u(t) \end{pmatrix}, \quad \ell z(\cdot) := w(0), \quad Jz(\cdot) := -\sin u(0) - \cos v(1).$$

Вектор-функція

$$\varphi(z) = \begin{pmatrix} v + \sin w + \cos u \\ u + \sin v + \cos w \\ w + \sin u + \cos v \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

визначає стаціонарні положення рівноваги $z(t) \equiv z - \text{const}$ нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (24). Вектор-функція $\varphi(z)$ визначена в довільній відкритій області $D \subset \mathbb{R}^3$ і двічі неперервно-диференційовна по y в околі $\Omega \subseteq D$. Покладемо

$$z_0 := - (0,456 \quad 0,456 \quad 0,456),$$

при цьому

$$\det [\varphi'(z_0)] \approx -0,623\,017 \neq 0,$$

крім того

$$\left\| [\varphi'(z_0)]^{-1} \right\|_{\infty} \leq \gamma_1 \approx 2,68\,734, \quad \left\| \varphi(z_0) \right\|_{\infty} \leq \gamma_2 \approx 0,00146\,076.$$

Перший диференціал Фреше даної вектор-функції

$$d\varphi(z, dz) := \varphi'(z) dz = \begin{pmatrix} dv - \sin u \, du + \cos w \, dw \\ du + \cos v \, dv - \sin w \, dw \\ \cos u \, du - \sin v \, dv + dw \end{pmatrix}$$

визначає матриця Якобі

$$J(z) = \begin{pmatrix} -\sin u & 1 & \cos w \\ 1 & \cos v & -\sin w \\ \cos u & -\sin v & 1 \end{pmatrix}.$$

Диференціал Фреше другого порядку даної вектор-функції

$$d^2\varphi(z, dz) = - \begin{pmatrix} \sin w \, dw^2 + \cos u \, du^2 \\ \sin v \, dv^2 + \cos w \, dw^2 \\ \sin u \, du^2 + \cos v \, dv^2 \end{pmatrix}$$

має норму

$$\|d^2\varphi(z, dz)\|_{\infty} \leq \gamma_3 := 2,$$

тому

$$\theta \approx 0,0157\,023 < 1.$$

Отже, нелінійна інтегрально-диференціальна крайова задача (24) у малому околі точки z_0 має єдине стаціонарне положення рівноваги, до якого збігається ітераційна схема (23), при цьому

$$z_1 \approx \begin{pmatrix} -0,456\,624\,742\,720\,777 \\ -0,456\,624\,742\,720\,777 \\ -0,456\,624\,742\,720\,777 \end{pmatrix},$$

$$z_2 \approx \begin{pmatrix} -0,456\,624\,704\,569 \\ -0,456\,624\,704\,569 \\ -0,456\,624\,704\,569 \end{pmatrix},$$

$$z_3 \approx \begin{pmatrix} -0,456\,624\,704\,567\,6308 \\ -0,456\,624\,704\,567\,6308 \\ -0,456\,624\,704\,567\,6308 \end{pmatrix}.$$

Для оцінки точності знайдених наближень z_k до розв'язку нелінійної інтегрально-диференціальної крайової задачі (24) визначимо нев'язки

$$\Delta_k := \left\| \varphi(z_k) \right\|_{\infty}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Зокрема

$$\Delta_1 \approx 8,921\,990 \times 10^{-8}, \quad \Delta_2 \approx 3,33\,067 \times 10^{-16}, \quad \Delta_3 \approx 1,11\,022 \times 10^{-16}.$$

Цитована література

1. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems; 2-th edition. – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. – 298 p.
2. *Samoilenko A.M., Boichuk A.A., Krivosheya S.A.* Boundary value problems for systems of integral-differential equations with Degenerate Kernel // Ukrainian Mathematical Journal. – 1996. – V. 48, № 11. – P. 1785–1789.
3. *Chuiiko S.M., Chuiiko O.V., Kuzmina V.O.* Nonlinear integrodifferential boundary-value problems unsolvable with respect to the derivative // Journal of Mathematical Sciences. – 2023. – V. 270, № 2. – P. 385–395.
4. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
5. *Boichuk A.A., Holovats'ka I.A.* Boundary-value problems for systems of integrodifferential equations // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – V. 203, № 3. – P. 306–321.
6. *Чуйко С.М., Курильченко И.Ю.* О положении равновесия автономной периодической задачи // Динамические системы. – 2007. – V. 23. – С. 31–37.
7. *Чуйко С.М., Чистяков В.Ф.* О положениях равновесия вырожденной дифференциально-алгебраической системы // Міжнародна наукова конференція “Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування”, Слов'янськ, 21–24 травня 2014 р. – Тези доп. – С. 79.
8. *Chuiiko S.M.* To the generalization of the Newton-Kantorovich theorem // Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. mathematics, applied Mathematics and mechanics. – 2017. – V. 85, № 1. – P. 62–68.
9. *Бойчук О.А., Чуйко С.М.* Конструктивні методи аналізу крайових задач теорії нелінійних коливань. – Київ, Наукова думка. – 2023. – 232 с.

References

1. Boichuk, A.A., Samoilenko, A.M. (2016). *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*. 2-th edition, Berlin, Boston, De Gruyter.
2. Samoilenko, A.M., Boichuk, A.A., Krivosheya, S.A. (1996). Boundary value problems for systems of integro-differential equations with degenerate Kernel. *Ukrainian Mathematical Journal*, 48(11), 1785–1789.
3. Chuiko, S.M., Chuiko, O.V., Kuzmina, V.O. (2023). Nonlinear integrodifferential boundary-value problems unsolvable with respect to the derivative. *Journal of Mathematical Sciences*, 270(2), 385–395.
4. Kantorovich, L.V., Akilov, G.P. (1977). *Functional analysis*. Moscow, Nauka (in Russian).
5. Boichuk, A.A., Holovats'ka, I.A. (2014). Boundary-value problems for systems of integrodifferential equations. *Journal of Mathematical Sciences*, 203(3), 306–321.
6. Chuiko, S.M., Kurilchenko, I.Yu. (2007). Equilibrium positions of autonomous periodical boundary value problem. *Dynamical systems*, 23, 31–37.
7. Chuiko, S.M., Chisyakov, V.F. (2014). Equilibrium positions of degenerate differential-algebraic system. *International conf. "Boundary value problems, theory fuctions and applications", Slaviansk, May 21–24, 2014*. Abst., p. 79.
8. Chuiko, S.M. (2017). To the generalization of the Newton-Kantorovich theorem. *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. mathematics, applied Mathematics and mechanics.*, 85(1), 62–68.
9. Boichuk, A.A., Chuiko, S.M. (2013). *Constructive methods of analysis of boundary value problems of the theory of nonlinear oscillations*. Kyiv, Naukova dumka, 232 p. (in Ukrainian).

S.M. Chuiko, O.S. Chuiko, V.O. Kuzmina

Equilibrium positions of nonlinear integral-differential boundary value problems unsolved with respect to the derivative.

The study of the differential-algebraic boundary value problems was established in the papers of K. Weierstrass, M.M. Lusin and F.R. Gantmacher. Works of S. Campbell, Yu.E. Boyarintsev, V.F. Chistyakov, A.M. Samoilenko, M.O. Perestyuk, V.P. Yakovets, O.A. Boichuk, A. Ilchmann and T. Reis are devoted to the systematic study of differential-algebraic boundary value problems. At the same time, the study of differential-algebraic boundary-value problems is closely related to the study of linear boundary-value problems for ordinary differential equations, initiated in the works of A. Poincare, A.M. Lyapunov, M.M. Krylov, M.M. Bogolyubov, I.G. Malkin, A.D. Myshkis, E.A. Grebenikov, Yu.A. Ryabov, Yu.A. Mitropolsky, I.T. Kiguradze, A.M. Samoilenko, M.O. Perestyuk and O.A. Boichuk. The study of the linear differential-algebraic boundary value problems is connected with numerous applications of corresponding mathematical models in the theory of nonlinear oscillations, mechanics, biology, radio engineering, the theory of the motion stability. Thus, the actual problem is the transfer of the results obtained in the articles and monographs of S. Campbell, A.M. Samoilenko and O.A. Boichuk on the nonlinear boundary value problems for the integral-differential boundary value problem unsolved with respect to the derivative, in particular, finding the necessary and sufficient conditions of the existence of the desired solutions of the nonlinear integral-differential boundary value problem not unsolved with respect to the derivative. In this article we found the conditions of the existence and

constructive scheme for finding the solutions of the nonlinear integral-differential boundary value problem unsolved with respect to the derivative in the form of equilibrium positions. The case of a nonlinear equation whose dimension does not coincide with the dimension of the unknown has been researched.

Keywords: *differential-algebraic equations, nonlinear integral-differential boundary value problem, Newton-Kantorovich method.*

Донбаський держ. пед. ун-т, 84112, Україна, Донецька обл,
Слов'янськ,
Ін-т прикл. математики і механіки НАН України, Слов'янськ
chujko-slav@ukr.net

Отримано 12.10.2023