

УДК 62-50:519.7

DOI: 10.37069/1683-4720-2023-37-12

©2023. В.Ф. Щербак

ОЦІНКА ПАРАМЕТРІВ ЗМІЩЕНОГО ГАРМОНІЙНОГО СИГНАЛУ

Розглянуто використання методів теорії спосереження нелінійних динамічних систем в задачах визначення зміщення, амплітуди, частоти та фази синусоїдального сигналу. Запропоновано двокрокову схему побудови нелінійного спостерігача, який дозволяє отримувати оцінки невідомих параметрів за результатами вимірювання вихідного сигналу в реальному масштабі часу. На першому році запропоновано схему визначення частоти та зміщення вихідного сигналу. Використовується розроблений в аналітичній механіці метод інваріантних співвідношень, який в задачах керування на траєкторіях руху динамічних систем дозволяє синтезувати додаткові зв'язки між відомими і невідомими величинами. Доведено асимптотичну збіжність оцінок шуканих компонент фазового вектора до їх справжнього значення. На другому кроці пропонованої схеми для визначення амплітуди та фази вихідного сигналу використано стандартний градієнтний алгоритм ідентифікації параметрів лінійної регресійної моделі.

MSC: 34C15, 34D20.

Ключові слова: синусоїдний сигнал, нелінійний спостерігач, інваріантні співвідношення

1. Вступ.

Проблема оцінювання невідомих параметрів гармонійного сигналу $y(t) = A_0 + A \sin(\omega t + \phi)$, який діє на механічну систему, знаходить відображення у достатньої кількості публікацій (див. [1]). Причина такого інтересу полягає в використанні відповідних методів визначення зовнішнього навантаження в різних теоретичних та інженерних дисциплінах, наприклад, для механічних систем перетворення кінетичної енергії коливань, в задачах віброізоляції періодичних складових шуму, для компенсації гармонійних збурень, викликаних ефектом запізнення в алгоритмах зворотного зв'язку, тощо. В принципі, метод найменших квадратів, Фур'є аналіз, перетворення Лапласа дають потенційне рішення задач визначення параметрів сигналу. Однак ці методи можуть не підходити, наприклад, для алгоритмів керування з обробкою даних в реальному часі.

Незважаючи на відносну простоту задачі визначення параметрів "чистої синусоїди" підходи до її розв'язання використовують досить складний апарат сучасних методів прикладної математики. Алгоритм нелінійного представлення синусоїдального сигналу з подальшим застосуванням нелінійного спостерігача Луєнбергера запропоновано у статті [2], де на базі загальної теорії нелінійного спосереження автори будують досить складну конструкцію відповідного спостерігача. В роботі [3] після представлення синусоїдального сигналу як лінійно параметризованої форми розроблено кілька адаптивних законів в яких з використовуючи апарату теорії ковзного режиму керування отримано оцінки параметрів синусоїди. Мультисинусоїдальний сигнал досліджено в роботах [4, 5], де відповідний оцінювач побудовано з використанням стандартного градієнтного алгоритму. Задача

ідентифікації невідомої частоти синусоїдального збурення, яке діє на лінійне диференціальне рівняння першого порядку вирішується в роботі [6]. Слід зазначити роботу [7], в якій також представлено підхід, заснований на побудові спостерігача станів але вже для визначення параметрів періодичної сили, яка діє на лінійний осцилятор. На першому етапі оцінюються коефіцієнти скінченного наближення ряду Фур'є, за яким апроксимується зовнішня періодична сила з передбачуваною частотою. На другому етапі за результатами першого етапу пропонується побудувати спостерігач вже для уточнення частоти навантаження.

В пропонуємій роботі проблему отримання асимптотичних оцінок параметрів синусоїдального сигналу розв'язано в два етапи. На першому з них параметри зсуву та частоти сигналу визначаються з використанням методу інваріантних співвідношень [8], який було розроблено в аналітичній механіці та призначено, зокрема, для пошуку частинних розв'язків (залежностей між змінними) в задачах динаміки твердого тіла з нерухомою точкою. Модифікація цього методу до проблем теорії спостереження, яку проведено в роботах [10, 11], дозволила розробити схему синтезу додаткових співвідношень між відомими і невідомими величинами вихідної системи, що виникають в процесі руху її розширеної моделі. Варто зазначити, що більш загальний підхід, ніж метод інваріантних співвідношень, до розв'язку задач спостереження шляхом синтезу інваріантного многовиду в просторі розширеної системи, було запропоновано в роботах [12, 13] як певну модифікацію методу стабілізації нелінійних систем *I&I* (Input and Invariance). На другому етапі решта параметрів сигналу визначається відомим адаптивним методом ідентифікації коефіцієнтів лінійної регресійної моделі.

2. Задача спостереження частини параметрів.

Розглянемо задачу визначення параметрів сигналу виду

$$y(t) = A_0 + A \sin(\omega t + \varphi). \quad (1)$$

Тут зсув A_0 , амплітуда A , частота ω і фаза φ є невідомими сталими, які підлягають визначенню за даними про $y(t)$.

На першому кроці сформуємо задачу оцінки частини цих невідомих, а саме: зміщення A_0 та частоти ω . Зазначимо, що ці параметри відповідають системі диференціальних рівнянь з виходом, який співпадає з вихідним сигналом (1)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = \alpha x_1 + \beta, \\ \dot{\alpha} &= 0, \quad \dot{\beta} = 0, \\ y &= x_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут $y(t) = A_0 + A \sin(\omega t + \varphi)$, $\alpha = -\omega^2$, $\beta = \omega^2 A_0$.

З урахуванням такого представлення, задача визначення зсуву і частоти синусоїдального сигналу може бути розв'язана як задача спостереження невідомих компонент стану $x_2(t), \alpha, \beta$ системи (2) за інформацією про її вихід. Крім виходу відомими функціями часу також будемо вважати ті величини, які можуть бути

отримані з використанням значень $y(t)$. Зокрема, далі відомою величиною буде розв'язок задачі Коші $\zeta(t) = (\chi(t), \xi_1(t), \xi_2(t))^T$ для деякої додаткової системи диференціальних рівнянь

$$\dot{\zeta} = U(\zeta, y), \quad \zeta(0) = \zeta_0 \in R^3. \quad (3)$$

Розмірність цієї системи збігається з числом шуканих невідомих, її права частина $U(\zeta, x_1)$ поки що невизначена, але передбачається, що вона задовольняє достатнім умовам існування розв'язків для $t \in [0, \infty)$.

Ідея методу синтезу інваріантних співвідношень, який далі буде використано для оцінювання зсуву і частоти, полягає в формуванні додаткових зв'язків між "відомими" функціями часу $x_1(t), \zeta(t)$ та невідомими $x_2(t), \alpha, \beta$

$$G(x_1(t), \zeta(t), x_2(t), \alpha, \beta) = 0, \quad G \in R^3, \quad (4)$$

які виконуються тотожно на деяких траєкторіях розширеної системи (2), (3). При цьому $U(\zeta, x_1)$ підбирається таким чином, щоб співвідношення (4) формували функціонально незалежні рівняння для невідомих, тобто в області значень змінних $x_1, \zeta, x_2, \alpha, \beta$

$$\text{rank} \frac{\partial G(x_1, \zeta, x_2, \alpha, \beta)}{\partial (x_2, \alpha, \beta)} = 3.$$

За цим методом далі буде розглянута

Задача 1. Знайти асимптотично точні оцінки компоненти фазового вектору $x_2(t)$ та параметрів α, β системи диференціальних рівнянь (2) за даними про вихід системи – функцію часу $y = x_1(t)$.

3. Визначення структури додаткової системи.

Будемо шукати інваріантні співвідношення (4) на траєкторіях розширеної системи диференціальних рівнянь (2),(3) у вигляді

$$x_2 - \Phi(x_1) - \chi = 0, \quad \alpha - \Psi_1(x_1) - \xi_1 = 0, \quad \beta - \Psi_2(x_1) - \xi_2 = 0. \quad (5)$$

Як і права частина $U(\zeta, x_1)$ додаткової системи (3), функції $\Phi(x_1), \Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$ поки що невизначені, але передбачається, що вони є неперервно диференційованими.

Введемо у розгляд відхилення $\delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ від співвідношень (5), зробивши у вихідних рівняннях (2) заміну шуканих змінних x_2, α, β за формулами

$$\delta = x_2 - \Phi(x_1) - \chi_1, \quad \varepsilon_1 = \alpha - \Psi_1(x_1) - \xi_1, \quad \varepsilon_2 = \beta - \Psi_2(x_1) - \xi_2. \quad (6)$$

Якщо буде встановлено, що при зафіксованих тим чи іншим чином вільних функціях U, Φ, Ψ_1, Ψ_2 на деяких траєкторіях розширеної системи диференціальних рівнянь має місце тотожність $\delta(t) = \varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) \equiv 0$, то в цьому випадку формули (5) стають інваріантними співвідношеннями для системи (2),(3) і визначають на цих траєкторіях значення шуканих невідомих. На інших траєкторіях з'являються ненульові доданки $\delta(t), \varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)$.

З урахуванням заміни (6) вихідні рівняння $\dot{x}_2$ та $\dot{\alpha} = 0, \dot{\beta} = 0$ перетворюються в диференціальні співвідношення (тут $(\cdot)'$ означає похідну $\frac{d(\cdot)}{dx_1}$)

$$\begin{aligned}\dot{\delta} + \dot{\chi} &= -\Phi'(\Phi + \chi + \delta) + (\Psi_1 + \xi_1 + \varepsilon_1)x_1 + \Psi_2 + \xi_2 + \varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\xi}_1 &= -\Psi'_1(\Phi + \chi + \delta), \quad \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\xi}_2 = -\Psi'_2(\Phi + \chi + \delta).\end{aligned}\quad (7)$$

Спочатку визначимо структуру допоміжної системи диференціальних рівнянь (3). Для цього виберемо в правих частинах попередніх рівностей усі доданки, які не залежать від відхилень і покладемо

$$\begin{aligned}\dot{\chi} &= -\Phi'(\Phi + \chi) + (\Psi_1 + \xi_1)x_1 + \Psi_2 + \xi_2, \\ \dot{\xi}_1 &= -\Psi'_1(\Phi + \chi), \quad \dot{\xi}_2 = -\Psi'_2(\Phi + \chi).\end{aligned}\quad (8)$$

За таким вибором маємо, що в разі $\chi(t), \xi_1(t), \xi_2(t)$ задовольняють (8), то ті доданки, які залишилися в співвідношеннях (7) утворюють лінійні однорідні диференціальні рівняння відносно відхилень

$$\dot{\delta} = -\Phi'\delta + \varepsilon_1x_1 + \varepsilon_2, \quad \dot{\varepsilon}_1 = -\Psi'_1\delta, \quad \dot{\varepsilon}_2 = -\Psi'_2\delta. \quad (9)$$

Рівняння (9) допускають тривіальний розв'язок $\delta(t) = \varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) \equiv 0$. А це означає, що нами отримано сім'ю додаткових систем виду (8), залежну від поки що вільних функцій $\Phi(x_1), \Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$ та їхніх похідних, кожна з яких, разом з вихідною системою (2), перетворює на деяких траєкторіях рівності (5) в інваріантні співвідношення. Саме на цих траєкторіях за цими рівностями безпосередньо можуть бути знайдені шукані невідомі. На інших траєкторіях (2), (8) з'являються ненульові відхилення $\delta(t), \varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)$.

4. Стабілізації відхилень.

Оскільки невідомо на яких саме траєкторіях рівності (5) перетворюються в інваріантні співвідношення, то природньо виникає питання про вибір вільних функцій $\Phi(x_1), \Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$ таким чином, щоб доданки $\delta(t), \varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)$ в формулах (6) прямували до нуля, тобто тривіальний розв'язок рівнянь у відхиленнях (9) мав би властивість глобальної асимптотичної стійкості. Відповідь на це питання становить зміст другого етапу пропонованої схеми розв'язку задачі спостереження.

Аналіз стійкості тривіального розв'язку системи (9) проведемо за допомогою принципу інваріантності ЛаСалля [15]. Об'єктом дослідження в цьому випадку є система диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = \alpha x_1 + \beta, \\ \dot{\delta} &= -\Phi'\delta + \varepsilon_1x_1 + \varepsilon_2, \quad \dot{\varepsilon}_1 = -\Psi'_1\delta, \quad \dot{\varepsilon}_2 = -\Psi'_2\delta.\end{aligned}\quad (10)$$

фазовий вектор якої $(x_1, x_2, \delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Наведемо основні кроки відповідної схеми стабілізації відхилень. Розглянемо функцію

$$V = \frac{1}{2}(\delta^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2).$$

та знайдемо її похідну, взяті в силу системи (9)

$$\dot{V} = -\Phi'\delta^2 + (x_1 - \Psi_1')\varepsilon_1\delta + (1 - \Psi_2')\varepsilon_2\delta \quad (11)$$

Виберемо функції, які залишались вільними, з наступної сім'ї функцій

$$\Phi(x_1) = x_1, \quad \Psi_1(x_1) = x_1^2/2, \quad \Psi_2(x_1) = x_1. \quad (12)$$

Твердження 1. *Якщо функції $\Phi(x_1), \Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$ вибрані за формулами (12), то тривіальний розв'язок системи диференціальних рівнянь у відхиленнях (9) є глобально асимптотично стійким.*

Дійсно, за такими функціями похідна від V стає знакосталою $\dot{V} = -\delta^2 \leq 0$. Тобто для системи диференціальних рівнянь (10) функція V стає функцією Ляпунова з негативно напіввизначеною похідною. В цьому випадку нульовий розв'язок системи у відхиленнях є рівномірно стійким: $\delta^2(t) + \varepsilon_1^2(t) + \varepsilon_2^2(t) \leq \delta^2(0) + \varepsilon_1^2(0) + \varepsilon_2^2(0)$.

Фазовий вектор системи: $(\delta(t), \varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), x_1(t), x_2(t)) \in \Omega$. При цьому змінні $x_1(t), x_2(t)$ належать колу S_x , а значення відхилень лежать всередині сфери S_ε

$$S_x = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq B\}, \quad S_\varepsilon = \{(\delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2) : \delta^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \leq \delta^2(0) + \varepsilon_1^2(0) + \varepsilon_2^2(0)\},$$

де $B = A_0^2 + 2|A_0A_1|$. Звідси випливає, що множина $\Omega = S_\varepsilon \times S_x$ є компактною і позитивно інваріантною відносно (10).

Нехай E – множина всіх точок $(x_1, x_2, \delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \Omega$ в яких $\dot{V} = -\delta(t)^2 = 0$. Зрозуміло, що множина $M = \{x_1(t), x_2(t), 0, 0, 0\}$ є інваріантною в E . Якщо при цьому M буде найбільшою інваріантною множиною, то, за теоремою ЛаСалля, всі розв'язки з початковими значеннями в Ω будуть з часом прямувати до M , тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_i(t) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (13)$$

Доведемо, що M є найбільшою інваріантною множиною в E . А саме, припустимо протилежне: $\delta(t) = 0$ і в той же час множина E містить траєкторії з ненульовими відхиленнями $\varepsilon_i(t)$, $i = 1, 2$. Оскільки в M $\delta(t) \equiv \dot{\delta}(t) \equiv 0$, то з виду диференціальних рівнянь (10) випливає, що ці ненульові відхилення є константами: $\varepsilon_i(t) = \varepsilon_i^*$, $i = 1, 2$. Отже наше припущення призводить до існування співвідношення

$$\varepsilon_1^*x_1(t) + \varepsilon_2^* \equiv 0.$$

З урахуванням того, що $x_1(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \phi)$, остання рівність означає, що функції $\{1, \sin \omega t\}$ є лінійно залежними, що неможливо. Отримане протиріччя доводить твердження, що множина M є найбільшою інваріантною множиною в E , а відтак, за теоремою ЛаСалля, виконано умови (13). Твердження пропозиції доведено.

Структуру додаткових рівнянь та вільні функції $\Phi(x_1), \Psi_1(x_1), \Psi_2(x_1)$ визначено формулами (8) та (12) відповідно. Тим самим доведено

Твердження 2. Формули

$$\hat{x}_2(t) = x_1(t) + \chi(t), \quad \hat{\alpha}(t) = \frac{x_1^2(t)}{2} + \xi_1(t), \quad \hat{\beta}(t) = x_1(t) + \xi_2(t),$$

де $\chi(t), \xi_1(t), \xi_2(t)$ будь-який розв'язок задачі Коші для системи диференціальних рівнянь

$$\dot{\chi} = -\chi + \left(\frac{x_1^2}{2} + \xi_1 \right) x_1 + \xi_2, \quad \dot{\xi}_1 = -(x_1 + \chi)x_1, \quad \dot{\xi}_2 = x_1 - \chi \quad (14)$$

формують асимптотичні оцінки невідомої компоненти фазового вектора $x_2(t)$ та параметрів α, β вихідної системи

5. Визначення амплітуди та початкової фази зміщеного гармонійного сигналу.

Далі будемо вважати, що за допомогою викладеного вище методу за деякий час отримано достатньо точні асимптотичні оцінки зміщення A_0 та частоти ω . Невідомими залишились амплітуда A та початкова фаза ϕ гармонійного сигналу. В цьому випадку можемо виразити інформацію про ці невідомі у вигляді

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi) = \theta_1 \sin \omega t + \theta_2 \cos \omega t, \quad (15)$$

де $y(t)$ – відома функція часу, постійні параметри θ_1, θ_2 пов'язані з шуканими невідомими формулами

$$\theta_1 = A \cos \varphi, \quad \theta_2 = A \sin \varphi.$$

Таким чином, від задачі оцінювання амплітуди A та початкової фази ϕ переходимо до задачі ідентифікації параметрів θ_1, θ_2 . Остання задача є типовою задачею визначення коефіцієнтів лінійної регресійної моделі

$$y(t) = w^T(t)\theta, \quad (16)$$

де $y(t) \in R^1, w(t) \in R^n$ – відомі функції часу, $\theta \in R^n$ – вектор невідомих постійних параметрів. Типовий градієнтний алгоритм ідентифікації параметрів такої моделі має вигляд

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \Gamma w(t)[y(t) - w^T(t)\hat{\theta}(t)]. \quad (17)$$

Тут $\hat{\theta}(t) \in R^n$ – оцінка вектора невідомих параметрів $\theta \in R^n$, $\Gamma = \Gamma^T$ – позитивно визначена матриця. З формул (16) та (17) отримуємо диференціальні рівняння відносно помилки $e(t) = \hat{\theta}(t) - \theta$ в оцінюванні параметрів $\theta \in R^n$ наступного виду:

$$\dot{e}(t) = -w(t)w^T(t)e(t). \quad (18)$$

Відомо (див., наприклад, [16]–[18]), що тривіальний розв'язок системи (18) є глобально експоненціально стійким, якщо на регресор $w(t)$ поширюються умови незатухаючого збудженн.

Означення. Матрична функція, що локально інтегрується $w(t) : R \rightarrow R^{p \times q}$ має властивість НЗ – незгасаючого збудження (PE – persistency of excitation), якщо існують числа $\mu > 0$ і $T > 0$ такі, що $\forall t \geq 0$ виконано співвідношення

$$\int_t^{t+T} w(\tau)w^T(\tau)d\tau \geq \mu I,$$

де I – одинична матриця розмірності $(p \times p)$, а знак $\geq$ у випадку матричної нерівності означає, що різниця відповідних матриць є невід’ємно визначеною.

Використаємо викладену схему ідентифікації у нашому завданні.

Задача 2. Знайти асимптотично точні оцінки параметрів θ_1, θ_2 за даними про функцію часу (15)

В цьому випадку $n = 2$, $w = (\sin \omega t, \cos \omega t)^T$, нехай Γ – одинична матриця. Для доведення властивості НЗ оберемо константи в наведеному означенні наступним чином: $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\mu = \frac{\pi}{\omega}$. В результаті маємо $\forall t \geq 0$:

$$\int_t^{t+T} \sin(\omega\sigma) \cdot \cos(\omega\sigma)d\sigma = 0, \quad \int_t^{t+T} \cos^2(\omega\sigma)d\sigma = \int_t^{t+T} \sin^2(\omega\sigma)d\sigma = \frac{\pi}{\omega},$$

звідки випливає, що матриця ww^T стає діагональною і виконано відповідну нерівність

$$\int_t^{t+T} w(\tau)w^T(\tau)d\tau = \text{diag} \left(\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega} \right) \geq \mu I.$$

Підсумовуючи вищевикладене, отримуємо

Твердження 3. Формули

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_1(t) &= \sin \omega t \left(y(t) - \hat{\theta}_1 \sin \omega t - \hat{\theta}_2 \cos \omega t \right), \\ \dot{\hat{\theta}}_2(t) &= \cos \omega t \left(y(t) - \hat{\theta}_1 \sin \omega t - \hat{\theta}_2 \cos \omega t \right) \end{aligned}$$

формують асимптотичні оцінки невідомих параметрів θ_1, θ_2 .

6. Висновки.

Розглянуто задачу ідентифікації параметрів, що характеризують зсув, амплітуду, частоту та фазу синусоїдального сигналу. Запропоновано метод побудови нелінійного спостерігача, який дозволяє отримувати оцінки невідомих за результатами вимірювання вихідного сигналу в реальному масштабі часу. Використовується розроблений в аналітичній механіці метод інваріантних співвідношень [8], який в задачах керування на траєкторіях руху динамічних систем дозволяє синтезувати додаткові зв’язки між відомими і невідомими величинами. Доведено асимптотичну збіжність оцінок параметрів та невідомого компонента фазового вектора до їх справжнього значення. Отримані результати планується вдосконалити, оскільки запропонований метод за своєю суттю обмежений оцінкою однієї синусоїди. У

цьому відношенні майбутні зусилля будуть спрямовані на виявлення можливого взаємозв'язку декількох елементарних осциляторів розглянутого типу для оцінки періодичних/квазіперіодичних сигналів, отриманих шляхом накладання різних гармонік.

Цитована література

1. Ziarani A.K., Karimi-Ghartemani M. On the equivalence of three independently developed phase locked loops // *IEEE Trans. on Aut. Cont.*, AC. – 2005. – V. 50, N 12. – P. 2021–2027.
2. Praly L., Isidori A., Marconi L. A new observer for an unknown harmonic oscillator // *Proceedings of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, Kyoto, Japan. – 2006. – P. 24–28.
3. Na J., Yang J., Wu X., Guo Y. Robust adaptive parameter estimation of sinusoidal signals // *Automatica*. – 2015. – V. 53. – P. 376–384.
4. Hou M. Amplitude and Frequency estimator of a sinusoid // *IEEE Trans. on Aut. Cont.* – 2005. – V. 50, N 6. – P. 855–858.
5. Hou M. Parameter identification of sinusoids // *IEEE Trans. Autom. Control*. – 2012. – V. 57, N 2. – P. 467–472.
6. Беззубов В.А., Бобцов А.А. Алгоритм идентификации параметров неизмеряемого синусоидального возмущения с нестационарной амплитудой // *Мехатроника, автоматизация, управление*. – 2020. – V. 21, N. 8. – P. 464–469.
7. Chauvin J., Petit N. Reconstruction of the Fourier expansion of inputs of linear time-varying systems // *Automatica*. – 2010. – V. 46, N 2. – P. 354–361.
8. Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // *Механика твердого тела*. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
9. Shcherbak V.F. Synthesis of virtual measurements in nonlinear observation problem // *PAMM*. – 2004. – V. 4, Is. 1. – P. 139–140.
10. Щербак В.Ф. Синтез дополнительных соотношений в задаче наблюдения // *Механика твердого тела*. – 2004. – Т. 33. – С. 197–216.
11. Жоголева Н.В., Щербак В.Ф. Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления // *Труды ИПММ НАН Украины*. – 2015. – Т. 29. – С. 69–76.
12. Karagiannis, D., Astolfi, A. Nonlinear observer design using invariant manifolds and applications // *Proc. 44th IEEE Conf. Decision and Control and European Control Conference*. – 2005. – P. 7775–7780.
13. Karagiannis, D., Carnevale, D., Astolfi, A. Invariant manifold based reduced-order observer design for nonlinear systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 2008. – V. 53, N 11. – P. 2602–2614.
14. Ковалев А.М., Щербак В.Ф. Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. – К.: Наук. думка, 1993.
15. Khalil, H.K. *Nonlinear systems*. – 3rd edn. Patience Hall, 2002.
16. Fradkov A.L., Miroshnik I.V., Nikiforov V.O. *Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems*. – Springer, 1999.
17. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. – СПб.: Наука, 1999.
18. Sastry S., Bodson M. *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*. – Dover, 2011.

References

1. Ziarani, A.K., Karimi-Ghartemani, M. (2005). On the equivalence of three independently developed phase locked loops. *IEEE Trans. on Aut. Cont.*, AC, 50(12), 2021–2027.
2. Praly, L., Isidori, A., Marconi, L. (2006). A new observer for an unknown harmonic oscillator. *Proceedings of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and*

- Systems*, 24–28.
3. Na, J., Yang, J., Wu, X., Guo, Y. (2015). Robust adaptive parameter estimation of sinusoidal signals. *Automatica*, 53, 376–384.
4. Hou, M. (2005). Amplitude and Frequency estimator of a sinusoid. *IEEE Trans. on Aut. Cont.*, 50(6), 855–858.
5. Hou, M. (2012). Parameter identification of sinusoids. *IEEE Trans. Autom. Control*, 57(2), 467–472.
6. Bezzubov, V.A., Bobtsov, A.A. (2020). Algoritim identifikatsii parametrov neizmeryayemogo sinusoidal'nogo vozmushcheniya s nestatsionarnoy amplitudoy. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravleniye*, 21(8), 464–469.
7. Chauvin, J., Petit, N. (2010). Reconstruction of the Fourier expansion of inputs of linear time-varying systems. *Automatica*, 46(2), 354–361.
8. Kharlamov, P.V. (1974). Ob invariantnykh sootnosheniyakh sistemy differentsial'nykh uravneniy. *Mekhanika tverdogo tela*, 6, 15–24.
9. Shcherbak, V.F. (2004). Synthesis of virtual measurements in nonlinear observation problem. *PAMM.*, 4(1), 139–140.
10. Shcherbak, V.F. (2004). Sintez dopolnitel'nykh sootnosheniy v zadache nablyudeniya. *Mekhanika tverdogo tela*, 33, 197–216. (in Russian).
11. Zhogoleva, N.V., Shcherbak, V.F. (2015). Sintez dopolnitel'nykh sootnosheniy v obratnykh zadachah upravleniya. *Trudy IPMM NAN Ukrainy*, 29, 69–76. (in Russian).
12. Karagiannis, D., Astolfi, A. (2005). Nonlinear observer design using invariant manifolds and applications. *Proc. 44th IEEE Conf. Decision and Control and European Control Conference*, 7775–7780.
13. Karagiannis, D., Carnevale, D., Astolfi, A. (2008). Invariant manifold based reduced-order observer design for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(11), 2602–2614.
14. Kovalev, A.M., Shcherbak, V.F. (1993). *Upravlyayemost', nablyudayemost', identifikatsionnyye dinamicheskiye sistemy*. Kiev, Nauk. dumka.
15. Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear systems*, 3rd edn. Patience Hall.
16. Fradkov, A.L., Miroshnik, I.V., Nikiforov, V.O. (1999). *Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems*. Springer.
17. Andriyevskiy, B.R., Fradkov, A.L. (1999). *Izbrannyye glavy teorii avtomaticheskogo upravleniya s primerami na yazyke MATLAB*. SPb., Nauka.
18. Sastry, S., Bodson, M. (2011). *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*. Dover.

V.F. Shcherbak

Parameter estimation of biased harmonic signal.

This paper deals with the problem of asymptotically estimating amplitude, frequency and phase of a sinusoidal signal by adopting the theory of invariant relations proposed in analytical mechanics [8] and further investigated in [9], [10] (see also [11]). The problem of frequency, amplitude and phase estimation of a sinusoidal signal has attracted a remarkable research attention in the past and current literature. The reasons of this interest rely on several engineering applications where an effective and robust solution to this problem is crucial. To mention few, it is worth mentioning problems of harmonic disturbance compensation in automatic control, design of phase-locked loop circuits in telecommunication, adaptive filtering in signal processing, etc. In principle, the method of least squares, Fourier analysis, Laplace transform provide a potential solution to the corresponding problems. However, these methods may not be suitable, for example, for control algorithms with real-time data processing. The goal of this paper is to suggest a further contribution to this task by showing how to solve the problem at hand through the observer's theory. The method of invariant relations is used for the asymptotically observation scheme design. This approach is based on dynamical extension of original

system and construct of appropriate invariant relations, from which the unknowns variables can be expressed as a functions of the known quantities on the trajectories of extended system. The final synthesis is carried out from the condition of obtaining asymptotic estimates of unknown parameters. It is shown that an asymptotic estimate of the unknown states can be obtained by rendering attractive an appropriately selected invariant manifold in the extended state space. The asymptotic convergence of the estimates of the sought phase vector components to their true value is proved. The simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed method of solving the state observation problem of the harmonic oscillator. It should be noted that a more general approach, which forms an appropriate method for solving observation problems for nonlinear dynamical systems due to the synthesis of invariant manifold, was proposed as a modification of the I&I method (Input and Invariance) of stabilization of nonlinear systems in [12, 13].

Keywords: *sinusoidal signal, nonlinear observer, invariant relations.*

Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Слов'янськ
scherbakv54@gmail.com

Отримано 21.09.23