

УДК 62-50, 519.7

DOI: 10.37069/1683-4720-2024-38-2

©2024. Н.В. Жоголева, В.Ф. Щербак

МЕТОД ІНВАРІАНТНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ В ЗАДАЧАХ СПОСТЕРЕЖЕННЯ

Розглянуто задачу отримання асимптотичних оцінок невідомих компонент математичної моделі, яка сформована системою звичайних диференціальних рівнянь. Для її розв'язку використано метод Харламова побудови інваріантних співвідношень Пуанкаре–Леві-Чівіта, який модифіковано для використання в обернених задачах теорії керування динамічними системами. Метод дозволяє синтезувати кінцеві співвідношення, які визначають шукані невідомі як функції від відомих величин. За допомогою зазначеного підходу вирішено задачу отримання асимптотичних оцінок стану нелінійного осцилятора та параметрів його зовнішнього гармонійного навантаження.

MSC: 34C15, 34D20.

Ключові слова: спостереження нелінійних систем, інваріантні співвідношення, осцилятор, визначення зовнішнього навантаження.

Сучасні об'єкти автоматичного керування є складними, нелінійними багатовимірними системами. Однією з основних проблем при побудові математичних моделей таких систем є нестача “априорної” інформації про стан об'єкта та його параметри. Тому важливим етапом їх аналізу є перевірка адекватності моделі, яка може бути здійснена за допомогою обернених задач, які полягають у визначенні стану об'єкта та його параметрів за наявними даними про його рух. У роботі пропонується спосіб отримання асимптотичних оцінок невідомих компонентів математичної моделі за результатами вимірювання вихідних сигналів у реальному масштабі часу. Використовується розроблений в аналітичній механіці метод інваріантних співвідношень [1]. Модифікація цього методу до проблем теорії спостереження дозволила розробити схему синтезу зв'язків між відомими і невідомими величинами вихідної системи, що виникають в процесі руху її розширеної моделі [2] і розглядаються як додаткові вимірювання.

1. Додаткові співвідношення між змінними.

Термін інваріантне співвідношення вперше з'явився у А. Пуанкаре. Їм зазначено, що, як правило, основними об'єктами, що вивчаються у зв'язку із системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1)$$

є її розв'язок, а також її інтеграли. “Але нам залишається торкнутися деяких рівнянь пов'язаних із цією системою і про які можна сказати, що вони займають проміжне положення між розв'язками та інтегралами. Я тепер визначу ці рівняння та назву їх інваріантними співвідношеннями.

Нехай φ є довільною функцією $x_1, x_2, \dots, x_n$, тоді $\frac{d\varphi_j}{dt} = \frac{d\varphi_j}{dx_i} X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Розглянемо тепер систему рівнянь

$$\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (2)$$

і припустимо, що ці рівняння спричиняють як наслідок співвідношення $\frac{d\varphi_j}{dx_i} X_i = 0$, звідки витікає, що $\frac{d\varphi_j}{dt} = 0$.

Отже, якщо рівняння (2) задовольняються деякого значення t , вони будуть задовольнятися всім значень t ; ось чому ми назвемо систему (1) системою інваріантних співвідношень; і легко зрозуміти, яке значення може мати знання такої системи.” [1, с. 44-45.]

Т. Леві-Чівіта [4], хоча і не згадує про Пуанкаре, але фактично відтворює його визначення, правда тільки для одного інваріантного співвідношення, яке є у “Небесній механіці”. Визначення. (Т. Леві-Чівіти). Співвідношення (2) називається інваріантним співвідношенням (ІВ) по відношенню до системи (1), якщо з умови $\varphi_j(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)) = 0$ витікає для всіх $t > 0$, $\varphi_j(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = 0$.

Розвиток цього підходу для рівнянь динаміки твердого тіла призвело до створення П.В. Харламовим конструктивного методу інваріантних співвідношень. Проблеми побудови точних розв’язків задач динаміки твердого тіла призводять до наступної конструкції: співвідношення (2) називається інваріантним співвідношенням по відношенню до (1), якщо не є пустим багатовид розв’язків системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ L_x \varphi(x) &= \sum \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} X_j(x) = \varphi_1(x) = 0, \\ &\dots \\ L_x \varphi_k(x) &= \sum \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} X_j(x) = \varphi_{k+1}(x) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Висока ефективність запропонованої конструкції продемонстровано П.В. Харламовим та його учнями при побудові, з урахуванням динамічних рівнянь Харламова, нових класів точних розв’язків задач динаміки твердого тіла (відомі до цього точні нечисленні рішення було отримано різними авторами з інтервалами десятки років). Зазначимо, що на базі представлення виходу динамічних систем у вигляді (3) була розвинена теорія спостереження нелінійних систем. Метод був поширений на задачі визначення умов розв’язності обернених задач теорії керування, а саме – задач відновлення компонент математичної моделі керованого об’єкта для систем “вхід – стан – вихід” [5]. Зокрема, один із перших критеріїв спостережливості нелінійних динамічних систем був розроблений з використанням методу інваріантних співвідношень Харламова [6].

2. Інваріантні співвідношення, як додаткові компоненти виходу системи.

Розглянемо динамічну систему, яка промодельована системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = f(x, a), \quad x = x_0, \quad x \in R^n, \quad a \in R^l, \quad (4)$$

на траєкторіях якої відомі значення виходу – деякої функції часу

$$y(t) = G(x(t)), \quad y \in R^k. \quad (5)$$

Передбачається, що x – вектор стану, постійний вектор a – параметри системи. Вихід (5) заданий функцією G , яка формалізує вимірювання, що проводяться в процесі руху об'єкта. Під задачею спостереження для систем такого виду розумітимемо задачу визначення значень частини компонент математичної моделі об'єкта: стану x та(або) вектора постійних параметрів a за інформацією про вихід $y(t)$ [5].

Далі будемо використовувати наступну форму запису системи (4),(5). Припустимо, що за допомогою невивірженої заміни змінних $(y^T, z^T)^T = F(x)$ система приведена до виду, при якому вимірюються перші k координат фазового вектора, тобто. $y(t) = (y_1, \dots, y_k)^T$. Інші $m = n - k$ компонент вектора стану невідомі, позначимо їх через $z = (z_1, \dots, z_m)^T$. Крім того, для простоти будемо вважати, що в результаті цієї заміни праві частини отриманих рівнянь лінійні щодо невідомих: змінних z та параметрів a :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f_1(y) + g_1(y)z + h_1(y)a, \\ \dot{z} &= f_2(y) + g_2(y)z + h_2(y)a, \\ \dot{a} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

де $g_1(y), g_2(y), h_1(y), h_2(y)$ - матриці розмірностей $k \times m, m \times m, k \times l$ і $m \times l$ відповідно. Остання вимога забезпечує лінійну форму рівнянь для відхилень одержуваних далі оцінок від дійсних значень шуканих величин, що значно спрощує побудову алгоритмів розв'язку задачі спостереження. В принципі, ця умова не є обов'язковою і в загальному випадку дозволяє будувати більш складні алгоритми оцінок невідомих за наведеною далі схемою.

Наша задача полягає у визначенні вектора $z(t)$ та параметрів a як функцій від відомих величин. Такими величинами є вихідні дані $y(t)$, а також ті величини, які можна отримати з вихідних даних. Зокрема, виходячи з кількості невідомих, введемо до розгляду вектор $\chi = (\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_m)^T$, який визначаємо як розв'язок задачі Коші для деякої додаткової системи диференціальних рівнянь:

$$\dot{\chi}(t) = U(t, \chi(t), y(t)), \quad \chi(0) \in R^{2n+2}. \quad (7)$$

Ідея використання методу інваріантних співвідношень у задачах спостереження полягає у керованому синтезі додаткових зв'язків $H(t, \chi, y, z, a) = 0$, які виникають між відомими значеннями $y(t), \chi(t)$ і невідомими $z(t), a$ на деяких траєкторіях

розширеної системи диференціальних рівнянь (6), (7). У цьому випадку вибір відповідної функції $U(t, \chi(t), y(t))$ має забезпечити виконання таких умов:

(i) співвідношення $H(t, \chi, y, z, a) = 0$ формують незалежну систему рівнянь щодо невідомих задачі, тобто $\text{rank} \frac{\partial H(t, \chi, y, z, a)}{\partial (z, a)} = m + l$ в області значень змінних $\{t, \chi, y, z\}, t \in R^+$;

(ii) інваріантний вид $\{(t, \chi, y, z, a) \in R^{2n+l} : H(t, \chi, y, z, a) = 0\}$, що відповідає цим додатковим рівностям, має властивість глобального притягання для будь-яких розв'язків розширеної системи. Іншими словами, на будь-яких траєкторіях диференціальних рівнянь (6), (7)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|H(t, \chi(t), y(t), z(t), a)\| = 0.$$

Уявимо ці невідомі у вигляді

$$a = \alpha(t) + \Psi(y(t)), \quad z(t) = p(t) + \Phi(y(t)), \quad (8)$$

де змінні $\alpha(t), p(t)$ є рішеннями допоміжних диференціальних рівнянь

$$\dot{\alpha} = U_1(\alpha, p, y(t)), \quad \dot{p} = U_2(\alpha, p, y(t)). \quad (9)$$

На функції $\Psi(y(t)), \Phi(y(t)), U_1(\alpha, p, y(t)), U_2(\alpha, p, y(t))$ поки що не накладаємо жодних обмежень, крім вимоги безперервної диференційності за своїми аргументами. Зазначимо, що якщо ці функції вже обрані в процесі побудови інваріантних співвідношень, то праві частини рівностей (8), при вирішенні задачі Коші для диференціальних рівнянь (9), стають відомими функціями часу.

Твердження 1. Для будь-яких функцій $\Psi(y), \Phi(y)$, що диференціюються, існують керування $U_1(\alpha, p, y(t)), U_2(\alpha, p, y(t))$ такі, що рівності (8) виконуються тотожно на деяких рішеннях система диференціальних рівнянь (6), (7).

Доведення. Введемо змінні η, ε , які характеризують нев'язку у формулах (8) на рішеннях (6), (8).

$$a = \alpha(t) + \Psi(y(t)) + \eta, \quad z = p(t) + \Phi(y(t)) + \varepsilon, \quad (10)$$

Зробимо в рівняннях (6) заміну змінних. Перейдемо за формулами (9) від змінних a, x_2 до змінних η, ε відповідно. Диференціюючи (9) через системи (6)(8), отримуємо диференціальні рівняння для відхилень

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= -u_1 - \Psi'_{x_1}[f_1 + g_1(p + \Phi + \varepsilon) + h_1(\alpha + \Psi + \eta)], \\ \dot{\varepsilon} &= -u_2 + f_2 - \Phi'_{x_1}f_1 + (g_2 - \Phi'_{x_1}g_1)(p + \Phi + \varepsilon) + (h_2 - \Phi'_{x_1}h_1)(\alpha + \Psi + \eta). \end{aligned} \quad (11)$$

Щоб рівності (8) виконували тотожно на деяких рішеннях (9), достатньо показати, що система диференціальних рівнянь (10) допускає тривіальний розв'язок $\eta(t) \equiv \varepsilon(t) \equiv 0$. З цією метою виберемо праві частини (9) за формулами

$$\begin{aligned} U_1(\alpha, p, x_1(t)) &= -\Psi'_{x_1}[f_1 + g_1(p + \Phi) + h_1(\alpha + \Psi)], \\ U_2(\alpha, p, x_1(t)) &= f_2 - \Phi'_{x_1}f_1 + (g_2 - \Phi'_{x_1}g_1)(p + \Phi) + (h_2 - \Phi'_{x_1}h_1)(\alpha + \Psi). \end{aligned} \quad (12)$$

В результаті система диференціальних рівнянь для відхилень η, ε стає однорідною

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -\Psi'_{x_1}(g_1\varepsilon + \eta), \\ \dot{\varepsilon} &= (g_2 - \Phi'_{x_1}g_1)\varepsilon + (h_2 - \Phi'_{x_1}h_1)\eta,\end{aligned}\tag{13}$$

отже допускає тривіальний розв'язок. Твердження доведене.

Нехай початкові значення $\alpha(0), p(0)$ у задачі Коші для диференціальних рівнянь (9) задовольняють (8). Зокрема, це означає, що початкові значення відхилень $\eta(0) = \varepsilon(0) = 0$. У цьому випадку рівності (7) утворюють систему додаткових співвідношень, за допомогою яких на траєкторіях (8), безпосередньо може бути знайдено невідомі компоненти математичної моделі $a, x_2(t)$. Однак, для виконання такої умови необхідно знати значення $a, x_2(0)$, які є невідомими.

Щоб рівності (8) можна було використовувати для оцінки параметрів a та швидкості коливань $x_2(t)$ на будь-якому розв'язку системи (9), потрібно з безлічі функцій $\Psi(x_1), \Phi(x_1)$, які поки що залишаються вільними, вибрати такі, при яких тривіальний розв'язок (12) мав би властивість глобальної асимптотичної стійкості в аналізованій області.

Задача визначення умов асимптотичної стійкості розв'язків неавтономних систем диференціальних рівнянь, у тому числі й за частиною змінних, характеризується різноманітністю підходів та методів її вирішення. Стійкість і асимптотична стійкість щодо змінних є досить тонкими властивостями динамічних систем і визначаються великою кількістю факторів (див., наприклад, О.С. Озиранер, В.В. Румянцев [7], О.О. Ігнат'єв [8], О.М. Ковальов [9]). Тому, при розв'язанні задачі спостереження зазначеним методом, передбачається, що завдання забезпечення часткової стабілізації системи диференціальних рівнянь буде вирішуватися тим чи іншим способом окремо кожної конкретної динамічної системи в залежності від аналітичного виду $f(x, a), G(x)$.

3. Визначення параметрів зовнішньої гармонійної сили.

Проблема оцінювання частоти, амплітуди та фази гармонійної сили, яка діє на механічну систему знаходить відображення у достатній кількості публікацій як у минулі так і в сучасні часи. Причина такого інтересу полягає в використанні відповідних методик в різних теоретичних та інженерних дисциплінах, наприклад, у обертових механічних процесах, для механічних систем перетворення кінетичної енергії коливань, в задачах віброізоляції періодичних складових шуму через обертові механізми, для компенсації гармонійних збурень в алгоритмах автоматичного керування, у адаптивній фільтрації при обробці сигналів тощо. В принципі, метод найменших квадратів, Фур'є аналіз, перетворення Лапласа дають потенційний розв'язок відповідних задач. Однак ці методи можуть не підходити, наприклад, для алгоритмів керування з обробкою даних в реальному часі.

В якості моделі механічної системи, на яку діє зовнішня сила, будемо розглядати рівняння вимушеного руху осцилятора Лієнара – яке задане диференціальним

рівнянням другого порядку, що моделює коливання матеріальної точки

$$\ddot{x}(t) + f(x(t))\dot{x}(t) + g(x(t)) = u(t). \quad (14)$$

Тут $x(t)$ – відхилення точки від початку координат в момент t , $\dot{x}(t)$ – відповідна швидкість відхилення, множник $f(x(t))$ характеризує закон дисипації, а функція $g(x(t))$ потенціальні сили.

Зауваження. Багато питань щодо стійкості, обмеженості коливань, існування періодичних розв'язків у рівнянні (14), наявності граничних циклів тощо є предметом досліджень в останні десятиріччя. Не розглядаючи ті чи інші якісні властивості рівняння Лієнара, далі нам буде достатньо припущення, що це рівняння з даними параметрами моделює процес перманентних коливань реального об'єкту, отже його розв'язок – функції $x(t), \dot{x}(t)$ коректно визначені на $[0, \infty)$ та є обмеженими функціями часу.

Будемо вважати, що зовнішня гармонійна сила, яка діє на нелінійний осцилятор, задається формулою

$$u(t) = a_1 + a_2 \cos \omega t + a_3 \sin \omega t.$$

Передбачається, що частота сили ω та параметри моделі осцилятора є відомими. Потрібно знайти швидкість коливань та коефіцієнти a_i , $i = \overline{1, 3}$ за даними про переміщення осцилятора $x(t)$.

Перепишемо вихідне рівняння (14) у формі системи в просторі станів, зробивши попередньо заміну змінних Лієнара: $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \dot{x}(t) + F(x(t))$, де $F(x(t)) = \int_0^x f(\sigma) d\sigma$. В результаті маємо систему

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) - F(x_1(t)), \quad \dot{x}_2(t) = -g(x_1(t)) + u(t). \quad (15)$$

Далі будемо вважати, що значення змінної $x_1(t)$ системи (15) вимірюються в процесі коливань осцилятора, тобто переміщення осцилятора є відомою функцією часу. Заміна Лієнара залежить від невідомої швидкості $\dot{x}(t)$, яку можемо знайти за формулою $\dot{x}(t) = x_2(t) - F(x(t))$ після визначення $x_2(t)$.

Таким чином задача спостереження для системи (15) полягатиме у визначенні частини фазового вектору $x_2(t)$ та сталих коефіцієнтів a_i , $i = \overline{1, 3}$ за інформацією про рух осцилятора. Такою інформацією є переміщення осцилятора $x_1(t)$, а також значення додаткових змінних $\xi(t) = (\chi(t), \xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))^T$, які будуть отримані з використанням значень виходу як розв'язок задачі Коші для поки що невизначеної додаткової системи диференціальних рівнянь

$$\dot{\xi} = U(t, \xi, x_1(t)), \quad \xi(0) = \xi_0 \in R^4. \quad (16)$$

Розмірність цієї системи збігається з числом шуканих невідомих, на її праву частину $U(t, \xi, x_1)$ поки що накладено єдине обмеження, а саме: ці функції повинні задовольняти достатнім умовам теореми існування розв'язків для $t \in [0, \infty)$.

Ідея керованого синтезу інваріантних співвідношень [2], що далі буде використано для розв'язку задачі спостереження, полягає в формуванні додаткових зв'язків між "відомими" величинами $x_1(t), \xi(t)$ та невідомими вихідної системи: $x_2(t)$ і сталими $a_i, i = \overline{1,3}$, які виникають на деяких траєкторіях розширеної системи диференціальних рівнянь (15), (16). Далі за цим методом буде розглянута

Задача. Знайти асимптотично точні оцінки компоненти фазового вектора $x_2(t)$ та коефіцієнтів силового навантаження a_1, a_2, a_3 за даними про вихід $x_1(t)$ системи диференціальних рівнянь (15).

4. Побудова інваріантних співвідношень.

Будемо шукати додаткові співвідношення на траєкторіях розширеної системи диференціальних рівнянь (15), (16) у вигляді

$$x_2 = \Phi(t, x_1) + \chi, \quad a_i = \Psi_i(t, x_1) + \xi_i, \quad i = \overline{1,3}. \quad (17)$$

Як і права частина $U(t, \xi, x_1)$ системи диференціальних рівнянь (16), функції $\Phi(t, x_1), \Psi_i(t, x_1), i = \overline{1,3}$ поки що невизначені, але передбачається, що вони є неперервно диференційованими функціями своїх аргументів. Введемо у розгляд відхилення $e = (\delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)^T$ від співвідношень (17), зробивши у вихідних рівняннях заміну невідомих за формулами

$$\delta = x_2 - \Phi(t, x_1) - \chi, \quad \varepsilon_i = a_i - \Psi_i(t, x_1) - \xi_i, \quad i = \overline{1,3}. \quad (18)$$

Якщо буде встановлено, що при зафіксованих тим чи іншим чином функціях $U(t, \xi, x_1), \Phi(t, x_1), \Psi_i(t, x_1)$ на деяких траєкторіях розширеної системи диференціальних рівнянь (15), (16) має місце тотожність $\|e(t)\| \equiv 0$, то саме на цих траєкторіях і для таких функцій рівності (17) стають інваріантними співвідношеннями для цієї системи, а відтак безпосередньо визначають значення шуканих невідомих $x_2(t), a_i, i = \overline{1,3}$. На інших траєкторіях з'являються ненульові доданки $\delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

З урахуванням заміни (18) вихідні рівняння $\dot{x}_2$ та $\dot{a}_i = 0$ перетворюються в диференціальні співвідношення (тут $(\cdot)'_q$ означає частинну похідну $\frac{\partial(\cdot)}{\partial q}$)

$$\dot{\chi} + \dot{\delta} = -g(x_1) + \hat{u} - \Phi'_t - \Phi'_{x_1} \hat{v}, \quad \dot{\xi}_i + \dot{\varepsilon}_i = -\Psi'_{i_t} - \Psi'_{i_{x_1}} \hat{v}, \quad i = \overline{1,3}, \quad (19)$$

де $\hat{u} = \Psi_1 + \xi_1 + \varepsilon_1 + (\Psi_2 + \xi_2 + \varepsilon_2) \cos \omega t + (\Psi_3 + \xi_3 + \varepsilon_3) \sin \omega t$; $\hat{v} = \Phi - F + \chi + \delta$.

На першому етапі запропонованої схеми визначимо структуру допоміжної системи диференціальних рівнянь відносно $\chi(t), \xi_i(t), i = \overline{1,3}$. Для цього виберемо з попередніх рівностей усі незалежні від відхилень члени і далі будемо вважати, що

$$\dot{\chi} = -g(x_1) + \tilde{u} - \Phi'_t - \Phi'_{x_1} \tilde{v}, \quad \dot{\xi}_i = -\Psi'_{i_t} - \Psi'_{i_{x_1}} \tilde{v}, \quad i = \overline{1,3}, \quad (20)$$

де $\tilde{u} = \Psi_1 + \xi_1 + (\Psi_2 + \xi_2) \cos \omega t + (\Psi_3 + \xi_3) \sin \omega t$, $\tilde{v} = \Phi - F + \chi$.

За таким вибором маємо, що в разі $\chi(t), \xi_i(t), i = \overline{1,3}$ задовольняють (20), то доданки, які залишилися в співвідношеннях (19) утворюють лінійні однорідні рівняння відносно відхилень

$$\dot{\delta} = -\Phi'_{x_1} \delta + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos \omega t + \varepsilon_3 \sin \omega t, \quad \dot{\varepsilon}_i = -\Psi'_{i_{x_1}} \delta, \quad i = \overline{1,3}, \quad (21)$$

які допускають тривіальний розв'язок $\delta(t) = \varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = \varepsilon_3(t) \equiv 0$.

Таким чином отримано сім'ю додаткових систем (20), залежну від поки що вільних функцій $\Phi(t, x_1), \Psi_i(t, x_1), i = \overline{1, 3}$ та їхніх похідних, кожна з яких, разом з вихідною системою (15), перетворюють на деяких своїх траєкторіях рівності (17) в інваріантні співвідношення, за якими безпосередньо можуть бути знайдені шукані невідомі $x_2(t), a_1, a_2, a_3$.

5. Стабілізації відхилень.

Оскільки невідомо саме на яких траєкторіях системи (15),(20) рівності (17) стають інваріантними, то природньо виникає питання про вибір вільних функцій $\Phi(t, x_1), \Psi_i(t, x_1), i = \overline{1, 3}$ таким чином, щоб відхилення від цих рівностей – доданки $\delta(t), \varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t)$ прямували до нуля, тобто тривіальний розв'язок диференціальних рівнянь (21) мав би властивість глобальної асимптотичної стійкості. В цьому випадку формули (17) формуватимуть якщо не точні, то принаймні асимптотично точні оцінки шуканих невідомих. Саме тому стабілізація нульового розв'язку рівнянь у відхиленнях становить мету другого етапу запропонованої методики.

Існує декілька підходів до розв'язання проблеми стабілізації неавтономних систем диференціальних рівнянь. Тому, в загальному випадку, дослідження на цьому етапі передбачають, що вибір вільних функцій і відповідного методу здійснюється для кожної конкретної динамічної системи окремо, в залежності від аналітичного виду $f(x_1), g(x_1), u(t)$. Для нашої задачі скористаємося одним із існуючих методів стабілізації лінійних неавтономних систем, а саме: методом стабілізації, який розроблено в задачах адаптивної ідентифікації та керування.

Позначимо $v(x_1, t) = \Phi'_{x_1}(t, x_1), u_i(x_1, t) = \Psi'_{i x_1}(t, x_1), i = \overline{1, 3}$ і будемо розглядати ці частинні похідні в рівняннях (21) як керування. Для синтезу цих керувань з умов глобальної асимптотичної стійкості тривіального розв'язку рівнянь у відхиленнях введемо у розгляд знаковизначену функцію

$$V = \frac{1}{2} e^T e = \frac{1}{2} \left(\delta^2 + \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i^2 \right)$$

та запишемо її похідну в силу системи (21)

$$\dot{V} = -\delta[v\delta + (1 - u_1)\varepsilon_1 + (\cos \omega t - u_2)\varepsilon_2 + (\sin \omega t - u_3)\varepsilon_3].$$

Нехай $v = 1, u_1 = 1, u_2 = \cos \omega t, u_3 = \sin \omega t$. За таких керувань похідна $\dot{V} = -\delta^2 \leq 0$. Тобто для рівнянь у відхиленнях функція V стає функцією Ляпунова з негативно напіввизначеною похідною. В цьому випадку нульовий розв'язок системи (21) є рівномірно стійким, $\delta(t)^2 + \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i(t)^2 \leq \delta(t_0)^2 + \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i(t_0)^2$, крім того $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = 0$.

При цьому функції, які поки залишались вільними, з точністю до адитивних констант, приймають вигляд:

$$\Phi(t, x_1) = x_1, \Psi_1(t, x_1) = x_1, \Psi_2(t, x_1) = x_1 \cos \omega t, \Psi_3(t, x_1) = x_1 \sin \omega t. \quad (22)$$

В підсумку отримуємо, що рівняння у відхиленнях стають системою однорідних лінійних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & W^T \\ -W & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (23)$$

де $W(t) = (1, \cos \omega t, \sin \omega t)^T$.

Для дослідження властивості асимптотичної стійкості її тривіального розв'язку розглянемо теорему ЛаСалля [10] для неавтономних систем диференціальних рівнянь $\dot{x} = f(t, x)$ з періодичною правою частиною: $f(t, x) = f(t + T, x)$.

Теорема. [10] Нехай $V(t, x)$ – дійснозначна функція з неперервними першими частинними похідними для всіх (t, x) . Припустимо існує $T > 0$, що

a) $V(t, x) = V(t + T, x) \geq 0$ для всіх (t, x) ;

b) $\dot{V}(t, x) = \partial V / \partial t + \partial V / \partial x \cdot f(t, x) \leq 0$ для всіх (t, x) .

Нехай E – множина всіх (t_0, x_0) , така, що $\dot{V}(t_0, x_0) = 0$. Нехай M – об'єднання по всіх (t_0, x_0) , всіх траєкторій $x(t, t_0, x_0)$ з властивістю, що $(t, x(t, t_0, x_0))$ знаходиться в E для всіх t . Тоді всі обмежені розв'язки $x(t, t_0, x_0)$ прямують до M при $t \rightarrow \infty$.

Використовуючи теорему ЛаСалля, множина E у цьому випадку відповідає многовиду $\delta = 0$ і всі розв'язки (23) прямують до M при $t \rightarrow \infty$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\varepsilon}(t) = - \lim_{t \rightarrow \infty} W(t) \delta(t) = 0.$$

Так як $\varepsilon(t), W(t)$ обмежені, то точка $(0, \varepsilon) \in E$ є особливою точкою системи диференціальних рівнянь (23): $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \varepsilon^* - \text{const}$.

Розглядаючи траєкторії системи вздовж $\dot{V} = 0$ або $\delta = 0$ з рівнянь (23) маємо $W^T \varepsilon^* \equiv 0$, або в координатній формі

$$\varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* \cos \omega t + \varepsilon_3^* \sin \omega t \equiv 0. \quad (24)$$

Оскільки компоненти вектора $W(t) : \{1, \cos \omega t, \sin \omega t\}$ лінійно незалежні функції, то з (24) витікає, що $\varepsilon(t) \equiv 0$.

Система (23) має періодичну праву частину, $W(t) = W(t + T)$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Отже, ми можемо застосувати теорему ЛаСалля. Оскільки $\delta \equiv 0 \Rightarrow \varepsilon = 0$ і множина M містить тільки початок координат, то тривіальний розв'язок системи (23) є рівномірно асимптотично стійким.

6. Остаточний вигляд спостерігача.

Запишемо остаточний вид додаткової системи (20), підставивши значення функцій $\Phi(t, x_1), \Psi_i(t, x_1), i = \overline{1, 3}$. Маємо

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= -g(x_1) + \tilde{u} - \tilde{v}, \quad \dot{\xi}_1 = -\tilde{v}, \\ \dot{\xi}_2 &= x_1 \omega \sin \omega t - \tilde{v} \cos \omega t, \quad \dot{\xi}_3 = -x_1 \omega \cos \omega t - \tilde{v} \sin \omega t, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\tilde{u} = x_1 + \xi_1 + (x_1 \cos \omega t + \xi_2) \cos \omega t + (x_1 \sin \omega t + \xi_3) \sin \omega t, \quad \tilde{v} = (1 - \alpha_1)x_1 + \chi.$$

Таким чином, всі ступені свободи запропонованої методики зафіксовано. В результаті маємо:

- 1) відхилення $\delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ в формулах (18) асимптотично прямують до нуля;
- 2) функції $\Phi(t, x_1), \Psi_i(t, x_1), i = \overline{1, 3}$ визначено формулами (22);
- 3) доданки $\chi(t), \xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)$ знаходимо, як розв'язок задачі Коші з довільними початковими умовами для системи (25).

Все це дозволяє безпосередньо отримати асимптотичні оцінки шуканих невідомих за формулами (18). Тим самим доведено

Твердження 2. *Формули*

$$\hat{x}_2 = x_1(t) + \chi(t), \quad \hat{a}_1 = x_1(t) + \xi_1(t), \quad \hat{a}_2 = x_1(t) \cos \omega t + \xi_2(t), \quad \hat{a}_3 = x_1(t) \sin \omega t + \xi_3(t),$$

де функції $\chi(t), \xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)$ задовольняють системі диференціальних рівнянь (25), формують асимптотичні оцінки змінної $x_2(t)$ та параметрів a_1, a_2, a_3 вихідної системи диференціальних рівнянь (15).

7. Висновки.

Робота базується на використанні в задачі спостереження ідеї методу інваріантних співвідношень [1], який було розроблено в аналітичній механіці та призначено, зокрема, для пошуку частинних розв'язків (залежностей між змінними) в задачах динаміки твердого тіла з нерухомою точкою. Модифікація цього методу до проблем теорії спостереження дозволила розробити схему синтезу додаткових зв'язків між відомими і невідомими величинами вихідної системи, що виникають в процесі руху її розширеної моделі [2]. Варто зазначити, що більш загальний підхід, ніж метод інваріантних співвідношень, який формує метод розв'язку задач спостереження для нелінійних динамічних систем завдяки синтезу інваріантного многови-ду в просторі розширеної системи, було запропоновано в роботах [11, 12] як певну модифікацію методу стабілізації нелінійних систем *I&I* (Input and Invariance). В якості прикладу застосування загального підходу розглянуто задачу спостереження швидкості руху та ідентифікації сталих параметрів, які визначають дію гармонійної зовнішньої сили з відомою частотою на нелінійну автоколивальну систему загального виду (осцилятор Лієнара). За вказаним методом запропонована схема побудови нелінійного спостерігача, яка дозволила отримати оцінки невідомих за результатами вимірювання вихідного сигналу (переміщення осцилятора) в реальному масштабі часу. Доведено асимптотичну збіжність отриманих оцінок швидкості коливань та параметрів зовнішньої гармонійної сили до їх справжніх значень.

Acknowledgment

This work was supported by a grant from the Simons Foundation (Award 1160640, Presidential Discretionary-Ukraine Support Grants, N.V. Zhogoleva and V.F. Shcherbak)

Цитована література

1. Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6.

2. Жоголева Н.В., Щербак В.Ф. Синтез дополнительных соотношений в обратных задачах управления // Труды ИПММ НАН Украины. – 2015. – Т. 29. – С. 69–76.
3. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избр. тр.: В 3 т. – М.: Наука, 1971. – Т. 1. – 771 с.
4. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. – М.: Изд-во иностр.лит., 1951. – Т. II, ч. 2. – 555 с.
5. Ковалев А.М., Щербак В.Ф. Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. – К.: Наук. думка, 1993.
6. Харламов П.В., Горр Г.В., Докшевич А.И. и др. Некоторые вопросы нелинейной теории наблюдения динамических систем // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1977. – № 3. – С. 244–247.
7. Озиранир А.С., Румянцев В.В. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987. – 253 с.
8. Игнат'ев А.О. Об эквивалентности устойчивости относительно части переменных // Прикладная математика и механика. – 1998. – Т. 63, Вып. 5. – С.871–875.
9. Ковалев А.М. Частичная устойчивость и стабилизация динамических систем // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, N 2. – С. 186–193.
10. LaSalle P. Asymptotic stability criteria // Proc. Symposium Applied Mathematics, vol. 13 (Hydrodynamics Instability). – Amer. Math. Soc. – 1962. – P. 299–307.
11. Karagiannis D., Astolfi A. Nonlinear observer design using invariant manifolds and applications // Proc. 44th IEEE Conf. Decision and Control and European Control Conference. – Seville, Spain, 2005. – P. 7775–7780.
12. Karagiannis D., Carnevale D., Astolfi A. Invariant manifold based reduced-order observer design for nonlinear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2008. – V. 53(11). – P. 2602–2614.

References

1. Kharlamov, P.V. (1974). Ob invariantnykh sootnosheniyakh sistemy differentsial'nykh uravneniy. *Mekhanika tverdogo tela*, 6, 15–24 (in Russian).
2. Zhogoleva, N.V., Shcherbak, V.F. (2015). Sintez dopolnitel'nykh sootnosheniy v obratnykh zadachakh upravleniya. *Trudy IPMM NAN Ukrainy*, 29, 69–76 (in Russian).
3. Puankare, A. (1971). *Novyye metody nebesnoy mekhaniki*. Izbrannoye. tr.: v 3-kh tomakh. M.: Nauka, T. 1 (in Russian).
4. Levi-Chivita, T., Amal'di, U. (1951). *Kurs teoreticheskoy mekhaniki. T. II, ch. 2*. M.: Izdatel'stvo zarubezhnoy lit. (in Russian).
5. Kovalev, A.M., Shcherbak, V.F. (1993). *Upravlyayemost', nablyudayemost', identifikatsionnaya dinamicheskikh sistem*. K.: Nauk. dumka (in Russian).
6. Kharlamov, P.V., Gorro, G.V., Dokshevich, A.I. i dr. (1977). Nekotoryye voprosy nelineynoy teorii nablyudeniya dinamicheskikh sistem. *Dokl. Akademii nauk Ukrain'skoy SSR. Ser. A*, 3, 244–247 (in Russian).
7. Oziraner, A.S., Rumyantsev, V.V. (1987). *Ustoychivost' i stabilizatsiya dvizheniya po otnosheniyu k chasti peremennnykh*. M.: Nauka (in Russian).
8. Ignat'yev, A.O. (1998). Ob ekvivalentnosti ustoychivosti po nekotorym peremennym. *Priladnaya matematika i mekhanika*, 63(5) (in Russian).
9. Kovalev, A.M. (1995). Chastichnaya ustoychivost' i stabilizatsiya dinamicheskikh sistem. *Ukr. mat. zhurnal*, 47(2), 186–193 (in Russian).
10. LaSalle, P. (1962). Asymptotic stability criteria. Proc. Symposium Applied Mathematics, vol. 13 (Hydrodynamics Instability). *Amer. Math. Soc.*, 299–307.
11. Karagiannis, D., Astolfi, A. (2005). Nonlinear observer design using invariant manifolds and applications. *Proc. 44th IEEE Conf. Decision and Control and European Control Conference, Seville, Spain*, 7775–7780.
12. Karagiannis, D., Carnevale, D., Astolfi, A. (2008). Invariant manifold based reduced-order observer design for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(11), 2602–2614.

N.V. Zhogoleva, V.F. Shcherbak

Method of invariant relations in observation problems.

Modern objects of automatic control are complex, non-linear multidimensional systems. One of the main problems in building mathematical models of such systems is the lack of “a priori” information about the state of the object and its parameters. Therefore, an important stage of their analysis is checking the adequacy of the model, which can be carried out with the help of inverse problems, which consist in determining the state of the object and its parameters. The paper proposes a method for obtaining asymptotic estimates of unknown components of a mathematical model based on the results of measuring output signals in real time. The method of invariant relations developed in analytical mechanics is used. To solve control theory problems related to determining the state and parameters of dynamic systems, a new method for synthesizing invariant relations is proposed, which are considered as additional algebraic equations for unknown components of the mathematical model. Based on the developed general approach, the problem of estimating the amplitude, and phase of a harmonic force acting on a mechanical system was considered. The problem have been studied over a long period of time, including recently. The reason for this is the possibility of using relevant methods in various theoretical and engineering fields, for example, in mechanical systems of conversion of kinetic energy of oscillations, in rotary mechanical processes, for vibration isolation of periodic components of noise through rotating mechanisms, for compensation of harmonic perturbations in automatic control algorithms, etc. The method of least squares, Fourier analysis, and the Laplace transform can be employed to solve relevant problems. However, these methods cannot be directly applied in control algorithms with real-time data processing. From the point of view of control theory, there is the problem of identification, which is to determine the unknown parameters of the system based on information about its output, i.e., known information about motion. The possibility of solving the identification problem (the property of identifiability) significantly depends on the analytical structure of the right-hand sides of the dynamic equations and available information [3]. To solve the identification problem, we used the method of invariant relations, which was developed in analytical mechanics to find partial solutions (relationships between variables) of problems of the dynamics of a rigid body with a fixed point. The modification of this method to apply to observation problems made it possible to establish additional relationships between the known and unknown quantities of the original system that arise during the motion of its extended model. Our purpose here is to extend the method of synthesis of invariant relations to the problem of identifying the parameters of nonlinear oscillators.

Keywords: *observation of nonlinear systems, invariant relations, oscillator, determination of external load.*

Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Слов'янськ
zhogoleva.nadia@gmail.com,
scherbakvf@ukr.net

Отримано 17.05.24