

УДК 531.36, 531.38

DOI: 10.37069/1683-4720-2024-38-3

©2024. Ю.М. Кононов

ПРО СТІЙКІСТЬ ОБЕРТАННЯ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ ВІЛЬНОЇ СИСТЕМИ ДВОХ ГІРОСКОПІВ ЛАГРАНЖА ПОВ'ЯЗАНИХ ПРУЖНИМ ШАРНІРОМ ГУКА

На підставі відомих рівнянь П.В. Харламова про рух системи зв'язаних твердих тіл виведені рівняння обертання в середовищі з опором вільної системи двох гіроскопів Лагранжа, з'єднаних пружним шарніром Гука. Виписано характеристичне рівняння четвертого порядку з одним нульовим коренем. На основі критерію Ленарда-Шіпара, записаного у інваріантній формі, отримані у вигляді системи двох нерівностей необхідні умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання гіроскопів Лагранжа. Проведено їх аналітичні дослідження. Показано, що необхідні умови асимптотичної стійкості завжди будуть виконані при збільшенні коефіцієнта пружності шарніру або кутової швидкості обертання. Проведено порівняння впливу пружного сферичного шарніру і шарніру Гука на умови стійкості. Показана неможливість моделювання пружного шарніра Гука пружним сферичним шарніром.

MSC: 75E55.

Ключові слова: вільна система двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа, пружний шарнір Гука, середовище з опором, рівномірне обертання, асимптотична стійкість.

1. Вступ.

На даний час є велика кількість робіт у яких досліджується динаміка та стійкість руху систем зв'язаних твердих тіл. Досить хороший огляд цих робіт наведено в монографіях [1–4]. Наприклад робота [2] міститься 351 посилань. В монографії [1] з єдиних позицій викладено підхід до задач про рух систем твердих тіл. Розглянуто моделі, що допускають різноманітні з'єднання тіл та їх загальні просторові рухи. Однак, задачі про вільний рух систем пов'язаних твердих тіл далекі до свого завершення. Мабуть, одними з перших це були роботи [5–7]. У статті [5] вивчається положення рівноваги двох зв'язаних твердих тіл відносно орбітальної системи координат. Автором визначено всі положення відносної рівноваги та отримано достатні умови стійкості. Модель супутника, представленого двома однаковими несиметричними тілами, пов'язаними невагомим стрижнем, розглядається в статті [6]. У роботі [7] модель супутника представляється системою твердих тіл і гіростатів, зв'язаними сферичними шарнірами. Проведено чисельне інтегрування рівнянь руху, що дозволило визначити стійкі відносні положення рівноваги. Наведемо лише роботи, які найближчі до розглядуваної у статті задачі. У загальній постановці задача про рух у середовищі з опором вільної системи двох зв'язаних твердих тіл розглядається в монографії [8]. В ній та у статті [9] наголошується, що в залежності від вибору основного тіла будуть представлені різні види рівняння руху вільної системи твердих тіл. У статті [10] досліджені необ-

хідні умови стійкості рівномірних обертань двох вільних гіроскопів Лагранжа з ідеальною рідиною, та показано, як з рівнянь для невідомої системи гіроскопів слідує рівняння для вільної системи. Робота [11] узагальнює результати статті [10] на випадок гіроскопів Лагранжа з ідеальною рідиною. Дослідження впливу дисипативного і постійного моментів на стійкість рівномірного обертання двох пружно зв'язаних вільних гіроскопів Лагранжа проведено у роботі [12]. У статті [13] показана можливість стабілізації нестійкого обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа другим гіроскопом, який обертається, а у статті [14] ця задача узагальнена на стабілізації нестійкого обертання гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною. У роботі [15] виведені рівняння обертання у середовищі з опором вільної системи двох твердих тіл, з'єднаних пружним відновлювальним сферичним шарніром. У припущенні, що центр мас твердих тіл знаходиться на третій головній осі інерції, виписані рівняння збуреного руху розглядуваної механічної системи у вигляді восьми звичайних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами. У випадку двох гіроскопів Лагранжа отримано характеристичне рівняння четвертого порядку. На підставі критерію Льєнара–Шіпара, записаного в інформному вигляді, виписані у вигляді системи трьох нерівностей умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань гіроскопів Лагранжа. Проведені аналітичні дослідження цих умови стійкості. Доведено, що перша нерівність завжди виконана. Із третьої нерівності слідує, що коли гіроскопи мають рівні осеві моменти інерції і обертаються з однаковими кутовими швидкостями в різні сторони або відсутня пружність у шарнірі, то характеристичне рівняння має кратний корінь і питання про стійкість вимагає додаткових досліджень. Виписані умови стійкості відносно кінетичних моментів і показано, що старші коефіцієнти нерівностей додатні звідки випливає, що стійкість завжди буде можлива при досить великих значеннях одного або двох кінетичних моментів. Показано, що коли гіроскопи однакові, то характеристичне рівняння розпадається на два рівняння. При відсутності пружності у шарнірі з'являється кратний нульовий корінь і питання про асимптотичну стійкість вимагає додаткових досліджень. Проведено моделювання пружного шарніра Гука за допомогою пружного сферичного шарніра. В статті [16] розглядається динаміка і орієнтація твердого тіла при вході в атмосферу, динаміка і управління коаксіальними гіростатами супутників та багато інших оригінальних задач космічної механіки. В роботі [17] представлений уніфікований і добре розроблений підхід до динаміки кутових рухів твердих тіл, що зазнають моментів збурення різної фізичної природи. Детально розглядається дія різних моментів збурень, як зовнішніх (гравітаційний, аеродинамічний, сонячний тиск), так і внутрішніх (завдяки в'язкій рідині в резервуарах, пружним і в'язкопружним властивостям тіла). Новий клас обертань динамічно симетричного твердого тіла навколо нерухомої точки з урахуванням нестационарного збурюючого моменту і повільно змінного з часом відновлюючого моменту вивчається у статті [18]. В роботі [19] розглянуто рух навколо центру мас сфероїда з порожниною, заповненою в'язкою рідиною. Момент сил, що діють на тіло з боку в'язкої рідини в порожнині, визначають за методикою, розробленою в роботах Ф.Л. Чорноуська. Асимптотичний

підхід дозволяє отримати деякі якісні результати та описати нелінійну еволюцію кутового руху за допомогою спрощених усереднених рівнянь. Слід зазначити, що математичний апарат та методи дослідження, які були розроблені в роботах [16 – 19], знайшли застосування в багатьох задачах динаміки та стійкості руху систем зв'язаних твердих тіл.

У даній статті продовжуються дослідження стійкості руху вільної системи двох твердих, які були розпочаті в роботах [8–12]. Робота узагальнює результати робіт [8, 9] на випадок дії дисипативних та постійних моментів і статтю [15] на випадок пружного шарніру Гука.

2. Постановка задачі.

Розглянемо вільний рух двох пружно зв'язаних твердих тіл S_1 і S_2 . Тіла S_1 і S_2 мають спільну точку O_2 . Запишемо теорему про зміну кількості руху і моменту кількості руху для тіла S_i ($i = 1, 2$). Для цього звільнимось від в'язів у точці O_2 . Позначимо через $-\mathbf{R}_2$ і $-\mathbf{L}_2$ головний вектор і головний момент сил реакції в'язі, що діють на тіло S_1 з боку тіла S_2 . Рівняння руху центру мас та рівняння зміни моменту кількості руху тіла S_i відносно центру мас точки C_i мають вигляд [7–9, 15]:

$$m_i \dot{\mathbf{V}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i+1}, \quad (1)$$

$$(\mathbf{J}_i \boldsymbol{\omega}_i)' = \mathbf{M}_i + \mathbf{L}_i - \mathbf{L}_{i+1} + \mathbf{c}_i \times (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i+1}) \quad (i = 1, 2). \quad (2)$$

Тут $\mathbf{J}_i$ – центральний тензор інерції тіла S_i ; $\boldsymbol{\omega}_i$ – кутова швидкість твердого тіла S_i ; $\mathbf{F}_i$ і $\mathbf{M}_i$ – відповідно головний вектор зовнішніх сил і головний момент, які діють на тіло S_i ; $m = m_1 + m_2$ – маса всієї системи, $\mathbf{c}_1 = \overrightarrow{C_1 O_2}$, $\mathbf{c}_2 = \overrightarrow{O_2 C_2}$, точкою « $\bullet$ » позначена абсолютна похідна.

Система рівнянь (2), з урахуванням (1), буде мати вигляд [7–9, 12]:

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}_1 \boldsymbol{\omega}_1)' &= \mathbf{M}_1 - \mathbf{L}_2 + \mathbf{c}_1 \times (m_2 \mathbf{F}_1 - m_1 \mathbf{F}_2 + m_1 m_2 \dot{\mathbf{f}}_2) / m, \\ (\mathbf{J}_2 \boldsymbol{\omega}_2)' &= \mathbf{M}_2 + \mathbf{L}_2 - \mathbf{c}_2 \times (m_2 \mathbf{F}_1 - m_1 \mathbf{F}_2 + m_1 m_2 \dot{\mathbf{f}}_2) / m, \end{aligned} \quad (3)$$

де $\dot{\mathbf{f}}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{c}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{c}_2$.

Зв'яжемо з кожним із тіл S_i незмінно базис $\mathbf{e}_1^i \mathbf{e}_2^i \mathbf{e}_3^i$ з вершиною в точці C_i , осі якого направимо по головних осях тензора інерції $\mathbf{J}_i$ і введемо нерухомий базис $\mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}_2^0 \mathbf{e}_3^0$, вектор $\mathbf{e}_3^0$ якого протилежний вектору прискорення вільного падіння. Будемо вважати, що еліпсоїд інерції твердих тіл є трьохосний, треті головні осі інерції проходять через точку O_2 , тобто будемо вважати, що центр мас твердих тіл S_1 і S_2 лежить на цих осях.

Нехай тверде тіло S_i знаходиться під дією сили тяжіння, дисипативного моменту $\mathbf{M}_i = \mathbf{D}_i \boldsymbol{\omega}_i$, $\mathbf{D}_i = \text{diag}(D_{i1}, D_{i2}, D_{i3})$, $D_{ij} > 0$ ($i = 1, 2; j = \overline{1, 3}$), що моделює середовище з опором і під дією постійного моменту $\mathbf{M}_{iq} = Q_i \mathbf{c}_i / |\mathbf{c}_i|$, який спрямований вздовж вектора $\mathbf{c}_i$ і підтримує обертання тіла S_i ($i = 1, 2$). Тверді тіла S_1 і

S_2 пов'язані в точці O_2 пружним відновлювальним шарніром Гука L_2 . Шарніром Гука називають невагому хрестовину з ортогональними осями, навколо яких відбувається відносно обертання тіл. Таке з'єднання допускає два ступені свободи, а момент сил реакцій зв'язку перпендикулярний площині шарніра [7, 8].

Векторні рівняння (3) в кутах Крилова α_i , β_i , γ_i відносно нерухомий базис $e_1^0 e_2^0 e_3^0$ приймуть вигляд [7 – 9, 13]:

$$\begin{aligned} A'_i(\ddot{\beta}_i + \dot{\alpha}_i^2 \sin \beta_i \cos \beta_i) + C_i r_i \dot{\alpha}_i \cos \beta_i + \mu \beta_{ki} = \\ = (-1)^i (\beta_1 - \beta_2) k + u_i(\beta_1, \beta_2) - D_{i1} \dot{\beta}_i, \\ A'_i(\ddot{\alpha}_i \cos \beta_i - 2\dot{\alpha}_i \dot{\beta}_i \sin \beta_i) - C_i r_i \dot{\beta}_i + \mu \alpha_{ki} = \\ = (-1)^i (\alpha_1 - \alpha_2) k + v_i(\alpha_1, \alpha_2) - D_{i1} \dot{\alpha}_i \cos \beta_i, \end{aligned} \quad (4)$$

$$C_i \dot{r}_i = -r_i D_{i3} + Q_i \quad (i = 1, 2). \quad (5)$$

Тут $r_i = \dot{\gamma}_i - \dot{\alpha}_i \sin \beta_i$, $A'_1 = A_1 + \nu c_1^2$, $\nu = m_1 m_2 / m$, $\mu = \nu c_1 c_2$, $k \geq 0$, $u_i(\beta_1, \beta_2)$ і $v_i(\alpha_1, \alpha_2)$ – це функції вищого порядку малості щодо β_i і α_i ,

$$\begin{aligned} \beta_{ki} = \ddot{\beta}_k (\cos \beta_k \cos \beta_i + \sin \beta_k \sin \beta_i \cos(\alpha_k - \alpha_i)) - \\ - (\ddot{\alpha}_k \cos \beta_k \sin \beta_i - 2\dot{\alpha}_k \dot{\beta}_k \sin \beta_k \sin \beta_i) \sin(\alpha_i - \alpha_k) + \\ + (\dot{\alpha}_k^2 + \dot{\beta}_k^2) \cos \beta_k \sin \beta_i \cos(\alpha_i - \alpha_k) - \beta_k^2 \sin \beta_k \cos \beta_i, \\ \alpha_{ki} = (\ddot{\alpha}_k \cos \beta_k - 2\dot{\alpha}_k \dot{\beta}_k \sin \beta_k) \cos(\alpha_k - \alpha_i) + \\ + \ddot{\beta}_k \sin \beta_k \sin(\alpha_k - \alpha_i) (\ddot{\beta}_k \sin \beta_k + (\dot{\alpha}_k^2 + \dot{\beta}_k^2) \cos \beta_k), \quad k = 3 - i, \end{aligned}$$

$\alpha_{\mu\kappa}^{ij} = e_\mu^i \cdot e_\kappa^j$ – напрямні косинуси. Коефіцієнти $\alpha_{\mu\kappa}^{ij}$ можна виразити через $\alpha_{\mu\sigma}^{i0}$ і $\alpha_{\mu\sigma}^{j0}$ наступним чином [8]:

$$\alpha_{\mu\kappa}^{ij} = \sum_{\sigma=1}^3 \alpha_{\mu\sigma}^{i0} \alpha_{\kappa\sigma}^{j0}. \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^{i0} = \cos \alpha_i \cos \gamma_i + \sin \alpha_i \sin \beta_i \sin \gamma_i, \quad \alpha_{21}^{i0} = \cos \beta_i \sin \gamma_i, \\ \alpha_{31}^{i0} = -\sin \alpha_i \cos \gamma_i + \cos \alpha_i \sin \beta_i \sin \gamma_i, \quad \alpha_{12}^{i0} = -\cos \alpha_i \sin \gamma_i + \sin \alpha_i \sin \beta_i \cos \gamma_i, \\ \alpha_{22}^{i0} = \cos \beta_i \cos \gamma_i, \quad \alpha_{13}^{i0} = \sin \alpha_i \cos \beta_i, \quad \alpha_{32}^{i0} = \sin \alpha_i \sin \gamma_i + \cos \alpha_i \sin \beta_i \cos \gamma_i, \\ \alpha_{13}^{i0} = \sin \alpha_i \cos \beta_i, \quad \alpha_{23}^{i0} = -\sin \beta_i, \quad \alpha_{33}^{i0} = \cos \alpha_i \cos \beta_i. \end{aligned} \quad (7)$$

Коефіцієнти α_{32}^{21} , α_{31}^{21} , α_{32}^{12} , α_{31}^{32} , α_{32}^{12} , що входять в рівняння (4), визначаються з виразів (6)–(7).

Система рівнянь (4)–(7) допускає розв'язки:

$$\alpha_i = \beta_i = 0, \quad \gamma_i = 1, \quad r_i = \omega_0 = Q_i / D_{i3}, \quad (8)$$

які відповідають рівномірному обертанню твердих тіл S_i навколо вертикалі з кутовою швидкістю ω_0 , де $Q_1 D_{23} = Q_2 D_{13}$ або $D_{13} = D_{23} = D_3$, $Q_1 = Q_2 = Q$.

Нехай в збуреному русі $r_i = \omega_0 + \delta_i$, де δ_i є величина першого порядку малості порівняно з ω_0 . В цьому випадку рівняння (5) відокремлюється від інших рівнянь і їх характеристичні рівняння мають один дійсний негативний корінь. Слід зазнати, що лінеаризоване рівняння (5) відділяється від рівнянь (4) та має один нульовий і один від'ємний корінь. Нульовий корінь пов'язаний з наявністю геометричного інтеграла $\gamma^2 = 1$, тому стійкість рішень (7) залежить тільки від коренів характеристичного рівняння, що відповідає системі (4).

Запишемо рівняння (4) для збуреного руху, зберігаючи їхні попередні позначення:

$$\begin{aligned} A'_1 \ddot{\beta}_1 + \tilde{C}_1 \dot{\alpha}_1 + D_1 \dot{\beta}_1 + \mu \ddot{\beta}_2 + k(\beta_1 - \beta_2) &= 0, \\ A'_1 \ddot{\alpha}_1 - \tilde{C}_1 \dot{\beta}_1 + D_1 \dot{\alpha}_1 + \mu \ddot{\alpha}_2 + k(\alpha_1 - \alpha_2) &= 0, \\ A'_2 \ddot{\beta}_2 + \tilde{C}_2 \dot{\alpha}_2 + D_2 \dot{\beta}_2 + \mu \ddot{\beta}_1 - k(\beta_1 - \beta_2) &= 0, \\ A'_2 \ddot{\alpha}_2 - \tilde{C}_2 \dot{\beta}_2 + D_2 \dot{\alpha}_2 + \mu \ddot{\alpha}_1 - k(\alpha_1 - \alpha_2) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Тут $\tilde{C}_i = C_i \omega_0$.

3. Умови стійкості рівномірних обертань двох гіроскопів Лагранжа.

Нехай $u_i = \beta_i - i\alpha_i$, тоді рівняння (9) приймуть вигляд:

$$\begin{aligned} A'_1 \ddot{u}_1 + (i\tilde{C}_1 + D_1) \dot{u}_1 + \mu \ddot{u}_2 + k(u_1 - u_2) &= 0, \\ A'_2 \ddot{u}_2 + (i\tilde{C}_2 + D_2) \dot{u}_2 + \mu \ddot{u}_1 - k(u_1 - u_2) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Представивши шукані функції у вигляді $ae^{\lambda t}$, отримаємо характеристичне рівняння збуреного руху (10):

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu\lambda^2 - k \\ \mu\lambda^2 - k & F_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

або

$$[a_4 \lambda^3 + (a_3 + ib_3) \lambda^2 + (a_2 + ib_2) \lambda + a_1 + ib_1] \lambda = 0, \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} F_i &= A'_i \lambda^2 + (i\tilde{C}_i + D_i) \lambda + k, \quad a_4 = A'_1 A'_2 - \mu^2 > 0, \quad a_3 = A'_1 D_2 + A'_2 D_1 > 0, \\ b_4 &= 0, \quad b_3 = \tilde{C}_1 A'_2 + \tilde{C}_2 A'_1, \quad a_2 = (A'_1 + A'_2 + 2\mu) k - \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 + D_1 D_2, \\ b_2 &= \tilde{C}_1 D_2 + \tilde{C}_2 D_1, \quad a_1 = (D_1 + D_2) k, \quad b_1 = (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2) k. \end{aligned} \quad (13)$$

Із (13) слідує, що коли пружність у шарнірі відсутня ($k = 0$), то $a_1 = b_1 = 0$ і рівняння (12) вже має двократний нульовий корінь.

Наявність нульового кореня в рівнянні (12) відповідає обертанню системи двох твердих як єдиного твердого тіла. Далі будемо розглядати це рівняння без нульового кореня, а саме:

$$a_4 \lambda^3 + (a_3 + ib_3) \lambda^2 + (a_1 + ib_1) \lambda + a_1 + ib_1 = 0. \quad (14)$$

Для того, щоб всі нулі рівняння (14) лежали у відкритій лівій півплощині, згідно критерію Ляпунова–Шіпара, записаного в інваріантному вигляді [20], необхідно і достатньо, щоб матриця п'ятого порядку, складена з коефіцієнтів цього многочлена, була інваріантнопозитивною, тобто були позитивно визначені матриці Δ_1 , Δ_3 і Δ_5 :

$$I_1 = |\Delta_1| = a_3 > 0, \quad (15)$$

$$I_3 = |\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 \\ 0 & a_3 & -b_2 \\ a_3 & -b_2 & -a_1 \end{vmatrix} > 0, \quad (16)$$

$$I_5 = |\Delta_5| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & 0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & 0 \\ a_3 & -b_2 & -a_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0. \quad (17)$$

Через наявність нульового кореня маємо тільки необхідні умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання в середовищі з опором двох вільних гіроскопів Лагранжа. Так як $I_1 > 0$, то ці умови складаються з двох нерівностей (16)–(17). З нерівності (15) видно, що при частковій дисипації ($D_1 = D_2 = 0$, $D_{i3} \neq 0$) асимптотична стійкість неможлива.

Умови стійкості відносно коефіцієнта пружності шарніру k запишуться наступним чином:

$$I_{31}k + I_{30} > 0, \quad (I_{53}k^2 + I_{52}k + I_{51})k > 0. \quad (18)$$

Тут

$$\begin{aligned} I_{31} &= a_3 f_3 > 0, \quad I_{53} = (D_1 + D_2) f_3^2 > 0, \\ f_3 &= (A'_1 + \mu)^2 D_2 + (A'_2 + \mu)^2 D_1 > 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Із (19) маємо, що старші коефіцієнти нерівностей (18) додатні, звідки випливає, що необхідні умови асимптотичної стійкості завжди будуть виконані при досить великих значеннях коефіцієнта пружності шарніру.

Умови стійкості відносно кутової швидкості отримують вигляд:

$$I_{31}x + I_{30} > 0, (I_{52}x^2 + I_{51}x + I_{50})k > 0, (x = \omega^2), \quad (20)$$

де

$$\begin{aligned} I_{31} &= a_3^2 \mu^2 + (C_1 A'_2 - C_2 A'_1) D_1 D_2, \quad I_{30} = a_3 (f_3 k + a_3 D_1 D_2) > 0, \\ I_{52} &= (C_1^2 D_2 + C_2^2 D_1) \left\{ (C_1^2 D_2^2 + C_2^2 D_1^2) \mu^2 + \right. \\ &\quad \left. + [(C_1 A'_2 - C_2 A'_1)^2 + 2C_1 C_2 \mu^2] D_1 D_2 \right\}, \\ I_{51} &= I_{51k} k + I_{50k}, \quad I_{50} = (D_1 + D_2) (f_3 k + a_3 D_1 D_2)^2 > 0, \\ f_3 &= (A'_1 + \mu)^2 D_2 + (A'_2 + \mu)^2 D_1 > 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Інші коефіцієнти не наведені із за їх громіздкість.

Старші коефіцієнти I_{31} і I_{52} буде додатним, коли або $\mu \neq 0$ або $C_1 A'_2 \neq C_2 A'_1$. В цьому випадку необхідні умови стійкості (20) будуть завжди виконані при збільшенні кутової швидкості.

З характеристичного рівняння (11) слідує, що коли гіроскопи однакові ($A'_2 = A'_1$, $C_2 = C_1$, $m_2 = m_1$, $c_2 = c_1$) і мають рівні коефіцієнти дисипації ($D_2 = D_1$), то $F_2 = F_1$ і це рівняння розпадається на два рівняння:

$$A_1 \lambda^2 + (i\tilde{C}_1 + D_1) \lambda + 2k = 0, \quad i(A_1 + m_1 c_1^2) \lambda + i\tilde{C}_1 + D_1 = 0. \quad (22)$$

Перше рівняння при $k \neq 0$ описують стійкі обертання одного вільного гіроскопа на який діє подвійний відновлювальний момент. Коливання стійкі, тому що для цього рівняння $I_3 = k D_1^2 > 0$, а корінь другого рівняння лежить у лівій півплощині.

При відсутності дисипативних ($D_i = 0$) і постійних ($Q_i = 0$, $i = 1, 2$) моментів характеристичні рівняння (11) і (22) співпадають з аналогічними рівняннями робіт [8, 9].

Як це вже було відзначено в вступі у статті [15] були проведення дослідження пружного сферичного шарніру на умови стійкості і можливість моделювання пружного шарніру Гука сферичним шарніром за умовою $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$. Проведемо порівняння впливу пружного шарніра Гука і пружного сферичного шарніру на умови стійкості. Характеристичне рівняння, яке було отримано у роботі [15], на відміну від рівняння (11) має вигляд:

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu \lambda^2 \\ \mu \lambda^2 & F_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (23)$$

При відсутності пружності у шарнірах ($k = 0$) характеристичні рівняння (11) і (23) співпадають. Це також було відмічено в роботах [8, 9]. Але при наявності пружності у шарнірах ($k \neq 0$), на відміну від рівняння (12), рівняння (23) не має

нульового кореня і отримані умови асимптотичної стійкості у статті [15] є не тільки необхідними, а й достатніми. Основні висновки по даній роботі і роботі [15] співпадають. Таким чином, при наявності пружності в шарнірах моделювання шарніру Гука сферичним шарніром неможливе.

4. Висновки.

Виведені рівняння обертання в середовищі з опором вільної системи двох гіроскопів Лагранжа, з'єднаних пружним шарніром Гука. Проведено дослідження асимптотичної стійкості рівномірних обертань цих гіроскопів. Виписано характеристичне рівняння четвертого порядку з одним нульовим коренем. Показано, що коли гіроскопи однакові і мають рівні коефіцієнти дисипації, то це рівняння розпадається на два рівняння. На основі критерію Ленарда-Шіпара записаного у інваріантній формі отримані у вигляді системи двох нерівностей необхідні умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання гіроскопів Лагранжа. Проведено їх аналітичні дослідження. Показано, що необхідні умови асимптотичної стійкості завжди будуть виконані при збільшенні коефіцієнта пружності шарніру або кутової швидкості обертання. Проведено порівняння впливу пружного сферичного шарніру і шарніру Гука на умови стійкості. Показана неможливість моделювання пружного шарніра Гука пружним сферичним шарніром. При відсутності дисипативних і постійних моментів отримані результати співпадають з відомими.

Acknowledgment

Дослідження виконані в рамках конкурсної тематики НАН України № 2-19-П (науково дослідна робота за темою ВБ-15-18-21/479) та були частково підтримана грантом від Фонду Сімонса (Нагорода 1160640, Президентські дискреційні гранти на підтримку України, одержувач Кононов Ю.М.).

Цитована література

1. Болграбская И.А., Лесина М.Е., Чебанов Д.А. Динамика систем связанных твёрдых тел. Серия "Задачи и методы: математика, механика, кибернетика". – ИПММ НАН Украины, Том 9. – К.: Наукова Думка, 2012. – 395 с.
2. Bauchau O.A. Flexible Multibody Dynamics. – Springer. – 2011. – 730 p.
3. Chaudhary H., Saha S.K. Dynamics and Balancing of Multibody Systems. – Springer. – 2009. – 176 p.
4. Wittenburg J. Dynamics of Multibody Systems. – Springer. – 2008. – 223 p.
5. Сарычев В.А. Положение относительного равновесия двух тел, соединенных сферическим шарниром, на круговой орбите // Космич. исслед. – 1967. – Т. 5, № 3. – С. 360–364.
6. Robe T.R. Stability of two tethered unsymmetrical Earth-Pointing bodies // AIAA Journal. – 1968. – V.6, № 12. – P. 2282–2288.
7. Wittenburg J. Die numerische bestimmung Stabiler Gleichgewichtslagen von Vielkorper-Satelliten-system // Ingh.- Arch. – 1970. – V. 39, № 3. – P. 201–208.
8. Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононович Г.А. Устойчивость движения систем связанных твёрдых тел. – К.: Наук. думка, 1991. – 166 с.
9. Савченко А.Я., Болграбская И.А. Устойчивость равномерных вращений свободной связки n гироскопов Лагранжа // Математическая физика и нелинейная механика. – 1984. – Т. 36, № 2. – С. 9–14.

10. Кононов Ю.Н. О движения системы двух твердых тел с полостями, содержащими жидкость // *Механика твердого тела. Межвед. сб. науч. тр.* – 1997. – Вып. 29. – С. 76–85.
11. Кононов Ю.Н. Об устойчивости движения системы n связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость // *Механика твердого тела. Межвед. сб. науч. тр.* – 2006. – Вып. 36. – С. 75–82.
12. Кононов Ю.Н., Святенко Я.И. Вплив дисипативного і постійного моментів на стійкість рівномірного обертання двох пружно зв'язаних вільних гіроскопів Лагранжа // *Праці інституту прикл. матем. і мех. НАНУ.* – 2019. – Т. 33. – С. 132–141.
13. Kononov Yu.M., Sviatenko Ya.I. Stabilization of Unstable Spinning of a Lagrange Gyroscope in a Resisting Medium by Another Spinning Gyroscope // *Int. Appl. Mech.* – 2022. – Т. 58, № 5. – P. 605–612.
14. Kononov Yu.M., Sviatenko Ya.I. Stabilization of spinning Lagrange gyroscope filled with ideal fluid in a resisting medium // *Int. Appl. Mech.* – 2023. – V. 59, № 2. – P. 207–217.
15. Кононов Ю.М. Про стійкість обертання вільної системи двох пружно зв'язаних твердих тіл // *Праці інституту прикл. матем. і мех. НАНУ.* – 2023. – V. 37, № 2. – С. 75–84.
16. Aslanov V.S. *Rigid Body Dynamics for Space Applications.* – Butterworth Heinemann, Oxford. – 2017. – 410 p.
17. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. Evolution of the Motions of a Rigid Body About its Centre of Mass. – Springer International Publishing AG, 2017. – 243 p.
18. Leshchenko D.D., Ershkov S.V., Kozachenko T.A. Evolution of a heavy rigid body rotation under the action of unsteady restoring and perturbation torques // *Nonlinear Dyn.* – 2021. – P. 1517–1528. DOI: 10.1007/s11071-020-06195-0.
19. Leshchenko D.D., Ershkov S.V., Kozachenko T.A. Rotations of a Rigid Body Close to the Lagrange Case under the Action of Nonstationary Perturbation Torque // *J. Appl. Comput. Mech.* – 2022. – Т. 8, N 3. – P. 1023–1031.
20. Дзюри Э. Инновы и устойчивость динамических систем. – М.: Наука. – 1979. – 304 с.

References

1. Bolgrabskaya, I.A., Lesina, M.E., Chebanov, D.A. (2012). *Dinamika sistem svyazannykh tvyordykh tel.* Seriya “Zadachi i metody: matematika, mehanika, kibernetika”. V. 9. K.: Nauk. Dumka (in Russian).
2. Bauchau, O.A. (2011). *Flexible Multibody Dynamics.* Springer.
3. Chaudhary, H., Saha, S.K. (2009). *Dynamics and Balancing of Multibody Systems.*
4. Wittenburg, J. (2008). *Dynamics of Multibody Systems.* Springer.
5. Saryichev, V.A. (1967). Polozhenie otnositelnogo ravnovesiya dvuh tel, soedinennykh sfericheskimi sharnirom, na krugovoy orbite. *Kosmich. Issled.*, 5(3), 360–364 (in Russian).
6. Robe, T.R. (1968). Stability of two tethered unsymmetrical Earth-Pointing bodies. *AIAA Journal*, 6(12), 2282–2288.
7. Wittenburg, J. (1970). Die numerische bestimmung Stabiler Gleichgewichtslagen von Vielkorper-Satellitensystem. *Ingh.-Arch.*, 39(3), 201–208.
8. Savchenko, A.Ya., Bolgrabskaya, I.A., Kononyihin, G.A. (1991). *Ustoychivost dvizheniya sistem svyazannykh tvyordykh tel.* K.: Nauk. dumka (in Russian).
9. Savchenko, A.Ya., Bolgrabskaya, I.A. (1984). Ustoychivost ravnomernykh vrascheniy svobodnoy svyazki giroskopov Lagranzha. *Matematicheskaya fizika i nelineynaya mehanika*, 36(2), 9–14 (in Russian).
10. Kononov, Yu.N. (1997). O dvizheniya sistemiy dvuh tverdykh tel s polostyami, soderzhaschimi zhidkost. *Mehanika tverdogo tela. Mezhd. sb. nauch. tr.*, 29, 76–85 (in Russian).
11. Kononov, Yu.N. (2006). Ob ustoychivosti dvizheniya sistemiy svyazannykh tverdykh tel s polostyami, soderzhaschimi zhidkost. *Mehanika tverdogo tela. Mezhd. sb. nauch. tr.*, 36, 75–82 (in Russian).
12. Kononov, Yu.N., Sviatenko, Ya.I. (2019). Vplyv dysypatyvnoho i postiiinoho momentiv na stiiikist rivnomirnoho obertannia dvokh pruzhno zviazanykh vilnykh hiroskopiv Lahranzha. *Pratsi instytutu prykl. matem. i mekh. NANU*, 33, 132–141 (in Ukrainian).

13. Kononov, Yu.M., Sviatenko, Ya.I. (2022). Stabilization of Unstable Spinning of a Lagrange Gyroscope in a Resisting Medium by Another Spinning Gyroscope. *Int. Appl. Mech.*, 58(5), 605–612.
14. Kononov, Yu.M., Sviatenko, Ya.I. (2023). Stabilization of spinning Lagrange gyroscope filled with ideal fluid in a resisting medium. *Int. Appl. Mech.*, 59(2), 207–217.
15. Kononov, Yu.M. (2023). Pro stiikist obertannia vilnoi systemy dvokh pruzhno zviazanykh tverdykh til. *Pratsi instytutu prykl. matem. i mekh. NANU*, 33(2), 75–84 (in Ukrainian).
16. Aslanov, V.S. (2017). *Rigid Body Dynamics for Space Applications*. Butterworth Heinemann, Oxford.
17. Chernousko, F.L., Akulenko, L.D., Leshchenko, D.D. (2017). *Evolution of the Motions of a Rigid Body About its Centre of Mass*. Springer International Publishing AG.
18. Leshchenko, D.D., Ershkov, S.V., Kozachenko, T.A. (2021). Evolution of a heavy rigid body rotation under the action of unsteady restoring and perturbation torques. *Nonlinear Dyn.*, 1517–1528. DOI: 10.1007/s11071-020-06195-0.
19. Leshchenko, D., Ershkov, S.V., Kozachenko, T. (2022). Rotations of a Rigid Body Close to the Lagrange Case under the Action of Nonstationary Perturbation Torque. *J. Appl. Comput. Mech.*, 8(3), 1023–1031.
20. Jury E.I. (1974). *Inners and stability of dynamic systems*. A Wiley – Interscience Publication John Wiley and Sons.

Yu.M. Kononov

On the stability of rotation in an environment with resistance of a free system of two rigid bodies connected by an elastic Hook joint.

Based on the known equations of P.V. Kharlamov on the motion of a system of connected rigid bodies obtained the equation of rotation in a medium with the resistance of a free system of two Lagrangian gyroscopes connected by an elastic Hook hinge. The characteristic equation of the fourth order with one zero root is written. On the basis of the Lennard-Schypar criterion in the innor form, the necessary conditions for the asymptotic stability of uniform rotation of Lagrangian gyroscopes in the form of a system of two inequalities are obtained. Analytical studies of them have been carried out. It is shown that the necessary conditions of asymptotic stability will always be fulfilled when the coefficient of elasticity of the hinge or the angular speed of rotation increases. A comparison of the influence of the elastic spherical joint and Hooke's joint on stability conditions was carried out. The impossibility of modeling Hooke's elastic joint with an elastic spherical joint is shown.

Keywords: free system of two elastically coupled Lagrangian gyroscopes, elastic Hook hinge, medium with resistance, uniform rotation, asymptotic stability.

Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Слов'янськ
kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com

Отримано 20.06.24