

УДК 531.36, 531.38

DOI: 10.37069/1683-4720-2024-38-4

©2024. Ю.М. Кононов, О.В. Несмєлова, Я.І. Святенко

ПРО СТІЙКІСТЬ ОБЕРТАННЯ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ ГІРОСКОПА ЛАГРАНЖА НА ПІДВІСІ З УРАХУВАННЯМ ПРУЖНОСТІ СФЕРИЧНИХ ШАРНІРІВ

На підставі відомих рівнянь П.В. Харламова, розглянуто задачу про стійкість рівномірних обертань у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа на підвісі з урахуванням пружності сферичних шарнірів, масових та інерційних характеристик підвісу і постійних моментів в інерційній та неінерційній системах відліку. Отримані умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань та проведені аналітичні дослідження впливу пружності шарнірів, масових та інерційних характеристик підвісу на умови стійкості. Розглянуто випадки відсутності одного або другого постійного моменту та випадок виродження підвісу у струну. У разі відсутності постійного моменту в інерційній системі відліку показано, що при зростанні пружності в шарнірах завжди буде можлива асимптотична стійкість при будь-якій кутовій швидкості і при любых параметрів механічної системи. Отримані умови порівнюються з умовами стійкості за відсутності дисипації.

MSC: 70E55.

Ключові слова: середовище з опором, гіроскоп Лагранжа, підвіс, сферичні відновлювальні шарніри, постійні моменти у інерційній системі відліку і у неінерційній, рівномірне обертання, асимптотична стійкість.

1. Вступ.

Задача про обертання твердого тіла на підвісі є подальшим узагальненням класичної задачі про обертання твердого тіла навколо нерухомої точки. Струнний підвіс використовується для експериментального визначення напрямку головних осей інерції складних механічних конструкцій, для балансування турбін та важких центрифуг та у багатьох інших близьких задач [1–3]. В даний час є досить велика кількість публікацій про різні аспекти обертання твердого тіла на підвісі [1–7]. У роботі [5] наведено дуже хороший огляд літератури з цієї задачі до 90-х років минулого століття, а в монографії [6] – до середини нашого століття. Стаття [7] присвячена дослідженню впливу дисипативного та постійного в інерційній системі відліку моментів на стійкість рівномірного обертання осесиметричного твердого тіла, підвішеного на струні. У даній роботі узагальнюються результати цієї статті на випадок пружності сферичних шарнірів, масових і інерційних характеристик підвісу та дію постійного моменту в інерційній системі відліку. На підставі відомих рівнянь П.В. Харламова [8] виведені рівняння обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа на підвісі та отримані умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань. На основі критерія Льєнара–Шипара, записаного в інваріантному вигляді, отримані умови асимптотичної стійкості у вигляді системи трьох нерівностей відповідно квадрата кутової швидкості і коефіцієнтів пружності шарнірів та проведено їх аналітичні дослідження.

2. Постановка задачі. Основні рівняння.

Нехай тверде тіло S_1 (підвіс) має нерухому точку O_1 в який на нього діє пружний відновлювальний сферичний шарнір $\mathbf{L}_1 = k_1 \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{s}/|\mathbf{s}|$, $k_1 \geq 0$. Динамічно симетричні тверді тіла S_1 і S_2 пов'язані в точці O_2 пружним відновлювальним сферичним шарніром $\mathbf{L}_2 = k_2 \mathbf{s} \times \mathbf{c}_2/(|\mathbf{s}||\mathbf{c}_2|)$, $k_2 \geq 0$. Тверде тіло S_i ($i = 1, 2$) знаходиться під дією сили тяжіння, дисипативного моменту $\mathbf{M}_i = D_i \boldsymbol{\omega}_i$, $\mathbf{D}_i = \text{diag}(D_{i1}, D_{i1}, D_{i3})$, ($D_{ij} > 0$; $i = 1, 2$; $j = 1, 3$), що моделює середовище з опором, а також під дією постійного моменту в неінерційній системі відліку $\mathbf{M}_{iq} = Q_i \mathbf{e}_3^2$, який спрямований вздовж осі симетрії тіла та під дією постійного моменту в інерційній системі відліку $\mathbf{M}_{ip} = P_i \boldsymbol{\nu}$ ($\boldsymbol{\nu} = -\mathbf{g}/|\mathbf{g}|$). Ці моменти підтримують обертання тіл S_i . Тут $\boldsymbol{\omega}_i$ – кутова швидкість твердого тіла S_i , $\mathbf{s} = \overrightarrow{O_1 O_2}$, $\mathbf{c}_i = \overrightarrow{O_i C_i}$, C_i – центр мас тіла S_i , $\mathbf{g}$ – вектор прискорення вільного падіння (рис. 1).

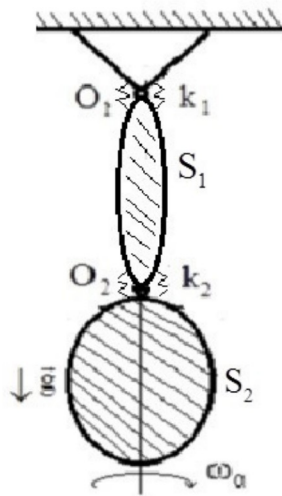


Рис. 1. Гіроскоп Лагранжа на підвісі

Рівняння обертання в середовищі з опором двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа матимуть вигляд [6–10]:

$$\begin{aligned} (J_1 \cdot \omega_1)^{\bullet} + m_2 \mathbf{s} \times (\omega_1 \times \mathbf{s} + \omega_2 \times \mathbf{c}_2)^{\bullet} &= (m_1 \mathbf{c}_1 + m_2 \mathbf{s}) \times \mathbf{g} + \mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2 - D_1 \omega_1 + \\ &+ \mathbf{M}_{1q} + \mathbf{M}_{1p}, \\ (J_2 \cdot \omega_2)^{\bullet} + m_2 \mathbf{c}_2 \times (\omega_1 \times \mathbf{s} + \omega_2 \times \mathbf{c}_2)^{\bullet} &= m_2 \mathbf{c}_2 \times \mathbf{g} + \mathbf{L}_2 - D_2 \omega_2 + \mathbf{M}_{2q} + \mathbf{M}_{2p}. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут $J_i = \text{diag}(A_i, A_i, C_i)$ – тензор інерції твердого тіла S_i відносно точки O_i ; m_i – його маса; точкою « $\bullet$ » позначена абсолютна похідна.

Зв'яжемо з кожним із тіл S_i незмінно базис $e_1^i e_2^i e_3^i$ з вершиною в точці O_i , осі якого направимо по головних осях тензора інерції J_i і введемо нерухомий базис $e_1^0 e_2^0 e_3^0$, вектор e_3^0 якого збігається з векторами ν . Нехай $s = se_3^1$ ($s \geq 0$), $c_i = c_i e_3^i$

($c_i \geq 0$). Векторні рівняння (1) в кутах Кривола α_i , β_i , γ_i відносно інерціальної системи $e_1^0 e_2^0 e_3^0$ запишуться наступним чином [6, 9, 10]:

$$\begin{aligned} A'_i(\ddot{\beta}_i + \dot{\alpha}_i^2 \sin \beta_i \cos \beta_i) + C_i r_i \dot{\alpha}_i \cos \beta_i + \mu \beta_{ki} = \\ = -\tilde{a}_i g \sin \beta_i \cos \alpha_i + k_i(\alpha_{32}^{i-1,i} \cos \gamma_i + \alpha_{31}^{i-1,i} \sin \gamma_i) + \\ + k_{i+1}(\alpha_{32}^{i+1,i} \cos \gamma_i + \alpha_{31}^{i+1,i} \sin \gamma_i) - D_{i1} \dot{\beta}_i - \alpha_{31}^{0i} P_i, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} A'_i(\ddot{\alpha}_i \cos \beta_i - 2\dot{\alpha}_i \dot{\beta}_i \sin \beta_i) - C_i r_i \dot{\beta}_i + \mu \alpha_{ki} = \\ = -\tilde{a}_i g \sin \alpha_i + k_i(\alpha_{32}^{i-1,i} \sin \gamma_i + \alpha_{31}^{i-1,i} \cos \gamma_i) + \\ + k_{i+1}(\alpha_{32}^{i+1,i} \sin \gamma_i + \alpha_{31}^{i+1,i} \cos \gamma_i) - D_{i1} \dot{\alpha}_i \cos \beta_i - \alpha_{31}^{0i} P_i, \end{aligned} \quad (3)$$

$$C_i \dot{r}_i = -D_{i3} r_i + Q_i - \alpha_{33}^{i0} P_i, \quad (i = 1, 2), \quad (4)$$

де $A'_1 = A_1 + s^2 m_2$, $A'_2 = A_2$, $\mu = s \tilde{a}_2$, $\tilde{a}_1 = m_1 c_1 + m_2 s$, $\tilde{a}_2 = m_2 c_2$, $r_i = \dot{\gamma}_i - \dot{\alpha}_i \sin \beta_i$, $k_3 = 0$, p_i , q_i , r_i – проекції вектора кутової швидкості ω_i твердого тіла S_i на осі $e_1^i e_2^i e_3^i$, $\alpha_{\mu\kappa}^{ij} = e_\mu^i \cdot e_\kappa^j$, $e_\mu^i = \sum_{\kappa=1}^3 \alpha_{\mu\kappa}^{i0} e_\kappa^0$, $\alpha_{\mu\kappa}^{ij} = \sum_{\sigma=1}^3 \alpha_{\mu\sigma}^{i0} \alpha_{\kappa\sigma}^{j0}$,

$$\begin{aligned} \beta_{ki} = \ddot{\beta}_k (\cos \beta_k \cos \beta_i + \sin \beta_k \sin \beta_i \cos(\alpha_k - \alpha_i)) - \\ - \left(\ddot{\alpha}_k \cos \beta_k \sin \beta_i - 2\dot{\alpha}_k \dot{\beta}_k \sin \beta_k \sin \beta_i \right) \sin(\alpha_i - \alpha_k) + \\ + (\dot{\alpha}_k^2 + \dot{\beta}_k^2) \cos \beta_k \sin \beta_i \cos(\alpha_i - \alpha_k) - \beta_k^2 \sin \beta_k \cos \beta_i, \\ \alpha_{ki} = \left(\ddot{\alpha}_k \cos \beta_k - 2\dot{\alpha}_k \dot{\beta}_k \sin \beta_k \right) \cos(\alpha_k - \alpha_i) + \\ + \ddot{\beta}_k \sin \beta_k \sin(\alpha_k - \alpha_i) \left(\ddot{\beta}_k \sin \beta_k + (\dot{\alpha}_k^2 + \dot{\beta}_k^2) \cos \beta_k \right), \quad k = 3 - i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^{i0} = \cos \alpha_i \cos \gamma_i + \sin \alpha_i \sin \beta_i \sin \gamma_i, \quad \alpha_{21}^{i0} = \cos \beta_i \sin \gamma_i, \\ \alpha_{31}^{i0} = -\sin \alpha_i \cos \gamma_i + \cos \alpha_i \sin \beta_i \sin \gamma_i, \quad \alpha_{12}^{i0} = -\cos \alpha_i \sin \gamma_i + \sin \alpha_i \sin \beta_i \cos \gamma_i, \\ \alpha_{22}^{i0} = \cos \beta_i \cos \gamma_i, \quad \alpha_{13}^{i0} = \sin \alpha_i \cos \beta_i, \quad \alpha_{32}^{i0} = \sin \alpha_i \sin \gamma_i + \cos \alpha_i \sin \beta_i \cos \gamma_i, \\ \alpha_{13}^{i0} = \sin \alpha_i \cos \beta_i, \quad \alpha_{23}^{i0} = -\sin \beta_i, \quad \alpha_{33}^{i0} = \cos \alpha_i \cos \beta_i. \end{aligned} \quad (5)$$

Коефіцієнти α_{32}^{21} , α_{31}^{21} , α_{32}^{12} , α_{31}^{12} , α_{32}^{12} , що входять в рівняння (2), визначаються з виразів (5).

3. Умови стійкості рівномірного обертання гіроскопа Лагранжа на підвісі.

Система (2)–(4) допускає розв'язки

$$\alpha_i = \beta_i = 0, \quad \gamma_i = \omega_{0i} t, \quad r_i = \omega_{0i} = (P_i + Q_i)/D_{i3}, \quad (6)$$

які відповідають рівномірним обертанням твердих тіл S_i з кутовими швидкостями ω_{0i} навколо вертикалі.

Нехай в збуреному русі $\omega_i = \omega_{0i} + \Omega_i$, де $|\Omega_i|$ є величина першого порядку малості порівняно з $|\omega_{0i}|$.

Далі будемо вважати, що $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega = (P + Q)/D_3$ і $Q_1 = Q_2 = Q$, $P_1 = P_2 = P$, $D_{13} = D_{23} = D_3$.

Зберігаючи для змінних їх колишні позначення, запишемо лінеаризовані рівняння збуреного руху:

$$\begin{aligned} A'_i \ddot{\beta}_i + \tilde{C}_i \dot{\alpha}_i + \mu \ddot{\beta}_j &= -D_i \dot{\beta}_i - (\tilde{a}_i g + k_i + k_{i+1}) \beta_i - P \alpha_i, \\ A'_i \ddot{\alpha}_i - \tilde{C}_i \dot{\beta}_i + \mu \ddot{\alpha}_j &= -D_i \dot{\alpha}_i - (\tilde{a}_i g + k_i + k_{i+1}) \alpha_i - P \beta_i, \quad (i = 1, 2; j = 3 - i). \end{aligned} \quad (7)$$

Слід зазначити, що лінеаризоване рівняння (4) відділяється від рівнянь (7) та має один нульовий і один від'ємний корінь. Нульовий корінь пов'язаний з наявністю геометричного інтеграла $\nu^2 = 1$, тому стійкість рішень (6) залежить тільки від коренів характеристичного рівняння, що відповідає системі (7) [7, 9].

Нехай $u_i = \beta_i - i \alpha_i$, тоді рівняння (7) приймуть вигляд:

$$A'_i \ddot{u}_i + (i C_i \omega + D_i) \dot{u}_i + \mu \ddot{u}_j = (\tilde{a}_i g - k_i - k_{i+1} - i P) u_i, \quad (i = 1, 2; j = 3 - i) \quad (8)$$

Представивши шукані функції у вигляді $a e^{\lambda t}$, запишемо характеристичне рівняння збуреного руху (8) у вигляді:

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu \lambda^2 \\ \mu \lambda^2 & F_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

або

$$a_4 \lambda^4 + (a_3 + i b_3) \lambda^3 + \dots + (a_1 + i b_1) \lambda + a_0 + i b_0 = 0. \quad (10)$$

Тут

$$\begin{aligned} F_i &= A'_i \lambda^2 + (i \tilde{C}_i + D_i) \lambda + \tilde{a}_i g + k_i + k_{i+1} + i P, \\ a_4 &= A'_1 A'_2 - \mu^2 = (A_1 + c_1^2 m_1)(A_2 + c_2^2 m_2) + A_2 s_1^2 m_2 > 0, \\ a_3 &= A'_1 D_2 + A'_2 D_1 > 0, \quad b_0 = [k_1 + 2k_2 + (\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2) g] P, \\ b_3 &= A'_1 \tilde{C}_2 + A'_2 \tilde{C}_1, \quad a_2 = D_1 D_2 - \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 + (k_1 + k_2 + \tilde{a}_1 g) A'_2 + (k_2 + \tilde{a}_2 g) A'_1, \\ b_2 &= \tilde{C}_1 D_2 + \tilde{C}_2 D_1 + (A'_1 + A'_2) P, \quad a_0 = (k_1 + k_2 + \tilde{a}_1 g)(k_2 + \tilde{a}_2 g) - P^2, \\ a_1 &= (k_1 + k_2 + \tilde{a}_1 g) D_2 + (k_2 + \tilde{a}_2 g) D_1 - (C_1 + C_2) P, \\ b_1 &= (k_1 + k_2 + \tilde{a}_1 g) \tilde{C}_2 + (k_2 + \tilde{a}_2 g) \tilde{C}_1 + (D_1 + D_2) P, \\ a_0 &= (k_1 + k_2 + \tilde{a}_1 g)(k_2 + \tilde{a}_2 g) - P^2, \\ b_0 &= [k_1 + 2k_2 + (\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2) g] P, \end{aligned} \quad (11)$$

З рівняння (9) випливає, що коли центр мас другого тіла збігається з точкою O_2 ($c_2 = 0$, $a_2 = 0$, $\mu = 0$), то в цьому випадку це рівняння розпадається на два рівняння і відсутній взаємовплив першого тіла на друге.

Для того, щоб всі нулі рівняння (10) були різні і лежали у відкритій лівій півплощині, згідно критерію Ляпунова–Шіпара, записаного в іннормному вигляді [11], необхідно і достатньо, щоб матриця сьомого порядку, яка складена з коефіцієнтів цього рівняння, була іннормно-позитивною, тобто щоб були позитивно визначені матриці Δ_1 , Δ_3 , Δ_5 і Δ_7 :

$$I_1 = |\Delta_1| = a_3 > 0,$$

$$I_3 = |\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 \\ 0 & a_3 & -b_2 \\ a_3 & -b_2 & -a_1 \end{vmatrix} > 0, \quad (12)$$

$$I_5 = |\Delta_5| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & 0 \\ a_3 & -b_2 & -a_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad (13)$$

$$I_7 = |\Delta_7| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 & 0 \\ a_3 & -b_1 & -a_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0. \quad (14)$$

Так як $a_3 > 0$, то $I_1 > 0$ і умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа визначається трьома нерівностями (12)–(14). При частковій дисипації ($D_1 = D_2 = 0$, $D_3 \neq 0$) асимптотична стійкість неможлива, так як в цьому випадку $a_3 = 0$.

4. Дослідження умов стійкості (12)–(14).

Умови асимптотичної стійкості можуть бути представлені у вигляді системи трьох нерівностей відносно кутової швидкості ω ($P = \omega D_3 - Q$) або коефіцієнтів пружності шарнірів k_i ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} I_{32}\omega^2 + I_{31}\omega + I_{30} &> 0, \quad I_{56}\omega^6 + I_{55}\omega^5 + \dots + I_{51}\omega + I_{50} > 0, \\ I_{78}\omega^8 + I_{77}\omega^7 + \dots + I_{71}\omega + I_{70} &> 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{31}k_1 + \tilde{I}_{30} &> 0, \quad \tilde{I}_{53}k_1^3 + \tilde{I}_{52}k_1^2 + \tilde{I}_{51}k_1 + \tilde{I}_{50} > 0, \\ \tilde{I}_{75}k_1^5 + \tilde{I}_{74}k_1^4 + \dots + \tilde{I}_{71}k_1 + \tilde{I}_{70} &> 0. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \widehat{I}_{31}k_2 + \widehat{I}_{30} &> 0, \quad \widehat{I}_{53}k_2^3 + \widehat{I}_{52}k_2^2 + \widehat{I}_{51}k_2 + \widehat{I}_{50} > 0, \\ \widehat{I}_{76}k_2^6 + \widehat{I}_{75}k_2^5 + \dots + \widehat{I}_{71}k_2 + \widehat{I}_{70} &> 0. \end{aligned} \quad (17)$$

4.1. *Випадок відсутності постійного моменту у неінерційній системі відліку* ($P = 0$). У цьому разі $\omega = Q/D_3$, у коефіцієнтах (11) треба покласти $P = 0$. Вид умов стійкості (16)–(17) не змінюються, а умови (15) запишуться наступним чином:

$$I_{31}x + I_{30} > 0, \quad I_{52}x^2 + I_{51}x + I_{50} > 0, \quad I_{72}x^2 + I_{71}x + I_{70} > 0 \quad (x = \omega^2). \quad (18)$$

Проведемо дослідження умов стійкості (16) відносно коефіцієнта пружності k_1 . Із нерівностей (16) випливає, що старші коефіцієнти $\tilde{I}_{31}$, $\tilde{I}_{53}$ і $\tilde{I}_{75}$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{31} &= (A_2' D_1 + A_1' D_2)(A_2'^2 D_1 + \mu^2 D_2) > 0, \quad \tilde{I}_{53} = D_2(A_2'^2 D_1 + \mu^2 D_2) > 0, \\ \tilde{I}_{75} &= D_2^2(A_2'^2 D_1 + \mu^2 D_2)^2 (k_2 + \tilde{a}_2 g). \end{aligned} \quad (19)$$

Із (19) слідує, що коефіцієнт $\tilde{I}_{75}$ буде додатним при $k_2 + \tilde{a}_2 g > 0$. Таким чином, коли точка підвісу O_2 знаходиться не нижче центру мас тіла S_2 ($c_2 \geq 0$) або нижче ($c_2 < 0$) і $k_2 > -\tilde{a}_2 g$, то для довільних значень механічних параметрів системи при збільшенні коефіцієнта пружності k_1 буде можлива асимптотична стійкість.

Умови стійкості (17) відносно коефіцієнта пружності k_2 мають додатні старші коефіцієнти $\widehat{I}_{31}$, $\widehat{I}_{53}$ і $\widehat{I}_{75}$:

$$\begin{aligned} \widehat{I}_{31} &= (A_2' D_1 + A_1' D_2) \left[(A_2'^2 + \mu^2) D_1 + (A_1'^2 + \mu^2) D_2 \right] > 0, \\ \widehat{I}_{53} &= \left[(A_2'^2 + \mu^2) D_1 + (A_1'^2 + \mu^2) D_2 \right] \left[(A_1' - A_2')^2 D_1 D_2 + \mu^2 (D_1 + D_2)^2 \right] > 0, \\ \widehat{I}_{76} &= \left[(A_1' - A_2')^2 D_1 D_2 + \mu^2 (D_1 + D_2)^2 \right]^2 > 0. \end{aligned}$$

Таким чином, для довільних значень механічних параметрів системи при збільшенні коефіцієнта пружності k_2 теж буде можлива асимптотична стійкість.

4.2. *Випадок відсутності постійного моменту у інерційній системі відліку* ($Q = 0$). У цьому разі $\omega = P/D_3$, вид умов стійкості (16) не змінюється, а умови (15) отримують вигляд:

$$\begin{aligned} I_{31}x + I_{30} &> 0, \quad I_{53}x^3 + I_{52}x^2 + I_{51}x + I_{50} > 0, \\ I_{74}x^4 + I_{73}x^3 + \dots + I_{71}x + I_{70} &> 0 \quad (x = \omega^2). \end{aligned} \quad (20)$$

Для перевірки отриманих результатів розглянемо випадок виродження підвісу в безмасову і безінерційну струну ($A_1 = C_1 = 0, m_1 = 0$) при $P_1 = 0, P_2 = P, D_1 = 0$ і $k_1 = k_2 = 0$. В цьому разі $F_1 = A_1' \lambda^2 + \tilde{a}_i g, F_2 = A_2' \lambda^2 + (i\tilde{C}_2 + D_2)\lambda + \tilde{a}_2 g + iP$ ($\omega_{01} = 0, \omega_{02} = P/D_3$) і умови стійкості (20) отримують вигляд:

$$I_3 = m_2^3 s^5 f_3 > 0, \quad I_5 = m_2^6 s^7 c_2^4 g^4 f_3 > 0, \quad I_7 = m_2^9 s^9 c_2^4 g^4 f_7 > 0, \quad (21)$$

де

$$\begin{aligned} f_3 &= (D_2 C_2 - D_3 \tilde{A}_2) s D_3 \omega^2 + c_2 (s + c_2) D_2^2 m_2 g, \\ f_7 &= - (D_2 C_2 - D_3 \tilde{A}_2) s D_3^3 \omega^4 + \left[(D_2 C_2 - D_3 \tilde{A}_2) - c_2 (s + c_2) m_2 D_3 \right] D_2^2 D_3 g + \\ &+ D_2^4 m_2 c_2 g^2. \end{aligned}$$

Умови стійкості (21) у безрозмірних змінних статті [7] будуть мати вигляд:

$$I\xi < ma(a+b), \quad (22)$$

$$I\xi^2 - [I + ma(a+b)]\xi + mab > 0. \quad (23)$$

Тут $\xi = b(\omega D_3)^2 / D_1^2 g$; $m = m_2$; $b = s$; $a = c_2$; $I = \tilde{A}_2 - C_2 D_2 / D_3$.

Умова стійкості (23) збігається з аналогічною умовою статті [7], але у цій статті відсутня умова (22) і тому вивід у статті, що при $I > 0$ і достатньо великих значень кутової швидкості обертання буде стійким невірне.

5. Випадок відсутності дисипативних і постійних моментів.

Розглянемо випадок відсутності дисипативних ($D_i = 0$, $i = 1, 2$) і постійних моментів ($P = Q = 0$). У цьому випадку система рівнянь (2) – (4) допускає розв'язки (6), де $r_i = \omega = \text{const}$, а характеристичне рівняння (10) при $a_2 = a_4 = b_3 = b_1 = 0$ отримує вигляд:

$$a_4 \lambda^4 + ib_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + ib_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (24)$$

Коефіцієнти рівняння (24) визначаються за формулами (11), в яких потрібно прийняти $D_1 = D_2 = 0$ і $P = 0$.

Стійкість консервативних систем визначається тим, що корені рівняння (24) повинні знаходитися на уявній осі. Для цього в рівнянні (24) покладемо $\lambda = i\sigma$ і воно матиме вигляд:

$$a_4 \sigma^4 + b_3 \sigma^3 - a_2 \sigma^2 - b_1 \sigma + a_0 = 0. \quad (25)$$

Для того, щоб всі нулі рівняння (25) були різні і лежали на дійсній осі, згідно критерію Ляпунова–Шіпара, записаного в іннормному вигляді [11], необхідно і достатньо, щоб матриця сьомого порядку, яка складена з коефіцієнтів цього рівняння, була іннормно-позитивною, тобто щоб були позитивно визначені матриці Δ_1 , Δ_3 , Δ_5 і Δ_7 :

$$I_1 = |\Delta_1| = 4a_4 > 0,$$

$$I_3 = |\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_4 & b_3 & -a_2 \\ 0 & 4a_4 & 3b_3 \\ 4a_4 & 3b_3 & -2\tilde{a}_2 \end{vmatrix} > 0, \quad (26)$$

$$I_5 = |\Delta_5| = \begin{vmatrix} a_4 & b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & b_3 & -a_2 & -b_1 \\ 0 & 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 \\ 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & 0 \\ 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad (27)$$

$$I_7 = |\Delta_7| = \begin{vmatrix} a_4 & b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0. \quad (28)$$

Необхідні умови стійкості будуть представлені у вигляді системи трьох нерівностей відносно кутової швидкості ω і коефіцієнтів пружності шарнірів k_i ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} I_{32}\omega^2 + I_{31}\omega + I_{30} &> 0, \quad I_{56}\omega^6 + I_{55}\omega^5 + \dots + I_{51}\omega + I_{50} > 0, \\ I_{78}\omega^8 + I_{77}\omega^7 + \dots + I_{71}\omega + I_{70} &> 0. \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{31}k_1 + \tilde{I}_{30} &> 0, \quad \tilde{I}_{53}k_1^3 + \tilde{I}_{52}k_1^2 + \tilde{I}_{51}k_1 + \tilde{I}_{50} > 0, \\ \tilde{I}_{75}k_1^5 + \tilde{I}_{74}k_1^4 + \dots + \tilde{I}_{71}k_1 + \tilde{I}_{70} &> 0. \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \widehat{I}_{31}k_2 + \widehat{I}_{30} &> 0, \quad \widehat{I}_{53}k_2^3 + \widehat{I}_{52}k_2^2 + \widehat{I}_{51}k_2 + \widehat{I}_{50} > 0, \\ \widehat{I}_{76}k_2^6 + \widehat{I}_{75}k_2^5 + \dots + \widehat{I}_{71}k_2 + \widehat{I}_{70} &> 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Проведемо дослідження умов стійкості (30). Для коефіцієнта пружності k_1 старші коефіцієнти $\tilde{I}_{31}$, $\tilde{I}_{53}$ і $\tilde{I}_{75}$ отримують вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{31} &= 8a_5^2 A_2' > 0, \quad \tilde{I}_{53} = \tilde{I}_{31} (A_2')^2 > 0, \\ \tilde{I}_{75} &= \frac{1}{2} \tilde{I}_{31} (A_2')^2 h_7, \quad h_7 = (k_2 + \tilde{a}_2 g) + C_2^2 \omega^2. \end{aligned} \quad (32)$$

Із (32) слідує, що вираз h_7 буде додатним при $k_2 > -\tilde{a}_2 g$ і в цьому разі буде додатним коефіцієнт $\tilde{I}_{75}$. Таким чином, при досить великих значень коефіцієнтів пружності k_1 при $k_2 > -\tilde{a}_2 g$ будуть виконані нерівності (30).

Для коефіцієнта пружності k_2 коефіцієнти $\widehat{I}_{31}$, $\widehat{I}_{53}$ і $\widehat{I}_{75}$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} \widehat{I}_{31} &= 8a_4^2 (A_1' + A_2') > 0, \quad \widehat{I}_{53} = \widehat{I}_{31} (A_2')^3 > 0, \\ \widehat{I}_{76} &= 16a_4^2 h_5^2 > 0, \quad h_5 = (A_1' + A_2')^2 + 4\mu^2 > 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Із (33) слідує, що при досить великих значень коефіцієнтів пружності k_2 будуть виконані нерівності (31).

Таким чином, значення коефіцієнтів пружності шарнірів на умови стійкості дуже велике. Їх збільшенням завжди можна досягти виконання нерівностей (30)–(31) при $C_i > 0$ і $A_i > 0$ незалежно від значень інших механічних параметрів системи. В цьому випадку буде можлива стійкість рівномірного обертання гіроскопа Лагранжа на підвісі.

6. Висновки.

Розглянуто задачу про стійкість рівномірних обертань у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа на підвісі з урахуванням пружності сферичних шарнірів, масових та інерційних характеристик підвісу і постійних моментів в інерційній та неінерційній системах відліку. На підставі критерія Ляпунова–Шипара, записаного в інваріантному вигляді, отримані умови асимптотичної стійкості у вигляді системи трьох нерівностей відносно кутової швидкості і коефіцієнтів пружності шарнірів. Відносно кутової швидкості ці нерівності мають 8, 6 і 2 ступень, а відповідно коефіцієнтів пружності шарнірів – 5, 3, і 1 ступень. Проведені аналітичні дослідження впливу пружності шарнірів, масових та інерційних характеристик підвісу на умови стійкості. Розглянуто випадки відсутності одного або другого постійного моменту. Для перевірки отриманих результатів розглянуто випадок виродження підвісу в безмасову і безінерційну струну. Основна умова стійкості збіглася з аналогічною умовою статті [7], але у цій статті була відсутня додаткова друга умова. У разі відсутності постійного моменту в інерційній системі відліку показано, що при зростанні пружності в шарнірах завжди буде можлива асимптотична стійкість при будь-якій кутовій швидкості і при будь-яких параметрах механічної системи. Отримані умови порівнюються з умовами стійкості за відсутності дисипації.

Acknowledgment

Автори частково підтримані грантом від Фонду Сімонса (Нагорода 1160640, Президентські дискреційні гранти на підтримку України, одержувачі Кононов Ю.М., Несмелова О.В. і Святенко Я.І.), автори Несмелова О.В. і Святенко Я.І. – грантом Науково-дослідної роботи молодих учених НАН України 2023-2024 № 01/03-2023, а автор Кононов Ю.М. – конкурсною тематикою НАН України № 2-19-П (науково дослідна робота за темою ВБ-15-18-21/479).

Цитована література

1. *Стороженко В.О.* Стационарные движения в задаче определения главных осей инерции неоднородных твердых тел. – К.: Ін-т математики НАН України, 2007. – С. 229–343.
2. *Стороженко В.О.* Об устойчивости вращения тела подвешенного посредством системы последовательно соединенных стержней // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1985. – Т. 1. – С. 45–52.
3. *Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е.* Вращение твердого тела на струне и смежные задачи. – М.: Наука, 1991. – С. 330.
4. *Рубановский В.Н.* Об устойчивости вертикального вращения твердого тела, подвешенного на стержне // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. – М.: ВЦ АН

- СССР, 1985. – С. 40–53.
5. Болграбская И.А., Савченко А.Я. Устойчивость стационарных движений систем связанных твердых тел // *Механика твердого тела*. Межвед. сб. науч. тр. – 1989. – Вып. 21. – С. 62–73.
6. Болграбская И.А., Лесина М.Е., Чебанов Д.А. Динамика систем связанных твердых тел. Серия “Задачи и методы: математика, механика, кибернетика”. – ИПММ НАН Украины, Т. 9. – К.: Наукова Думка, 2012. – 395 с.
7. Карпетян А.В., Лагутина И.С. Об устойчивости равномерных вращений волчка, подвешенного на струне, с учетом диссипативного и постоянного моментов // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. – 2000. – № 1. – С. 53–57.
8. Харламов П.В. Об уравнениях движения системы твердых тел // *Механика твердого тела*. Межвед. сб. науч. тр. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
9. Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыгин Г.А. Устойчивость движения систем связанных твердых тел. – К.: Наук. думка, 1991. – 166 с.
10. Kononov Yu.M., Sviatenko Ya.I. Stabilization of Unstable Spinning of a Lagrange Gyroscope in a Resisting Medium by Another Spinning Gyroscope // *Int. Appl. Mech.* – 2022. –Т. 58, № 6. – P. 605–612.
11. Джурю Э. Инноры и устойчивость динамических систем. – М.: Наука, 1979. – 304 с.

References

1. Storozhenko, V.O. (2007). *Statsyonarnie dvyzheniya v zadache opredeleniya glavnykh osei ynerstyy neodnorodnykh tverdykh tel*. K.: In-t matematyky NAN Ukrainy, P. 229–343 (in Russian).
2. Storozhenko V.O. (1985). Ob ustoichyvosty vrashcheniya tela podveshennogo posredstvom systemi posledovatelno soedynennykh sterzhnei. *Yzv. AN SSSR. Mekhanyka tverdoho tela*, 1, 45–52 (in Russian).
3. Yshlynskyi, A.Iu., Storozhenko, V.A., Temchenko, M.E. (1991). *Vrashchenye tverdoho tela na strune y smezhnie zadachy*, 330 (in Russian).
4. Rubanovskyi, V.N. (1985). Ob ustoichyvosty vertykalnogo vrashcheniya tverdoho tela, podveshennogo na sterzhne. *Zadachy yssledovaniya ustoichyvosty y stablyzatsyy dvyzheniya*, 40–53 (in Russian).
5. Bolhrabskaia, Y.A., Savchenko, A.Ia. (1989). Ustoichyvost statsyonapnykh dvyzheniy system svyazannykh tverdykh tel. *Mekhanyka tverdoho tela. Mezhdved. sb. nauch. tr.*, 21, 62–73 (in Russian).
6. Bolhrabskaia, Y.A., Lesyna, M.E., Chebanov, D.A. (2012). *Dynamyka system svyazannykh tverdykh tel*. Seryia “Zadachy y metodi: matematyka, mekhanyka, kybernetyka”. IPMM NAN Ukrainy, T. 9. K.: Naukova Dumka, 395 p. (in Russian).
7. Karapetian, A.V., Lahutyna, Y.S. (2000). Ob ustoichyvosty ravnomernykh vrashcheniy volchka, podveshennogo na strune, s uchetom dysypatyvnogo i postoiannogo momentov. *Izv. RAN. Mekhanyka tverdoho tela*, 1, 53–57 (in Russian).
8. Kharlamov, P.V. (1972). Ob uravneniyakh dvyzheniya systemi tverdykh tel. *Mekhanyka tverdoho tela*, 4, 52–73 (in Russian).
9. Savchenko, A.Ia., Bolhrabskaia, Y.A., Kononikhyn, H.A. (1991). *Ustoichyvost dvyzheniya system svyazannykh tverdykh tel*. K.: Nauk. dumka, 166 p. (in Russian).
10. Kononov, Yu.M., Sviatenko, Ya.I. (2022). Stabilization of Unstable Spinning of a Lagrange Gyroscope in a Resisting Medium by Another Spinning Gyroscope. *Int. Appl. Mech.*, 58(6), 605–612.
11. Dzhury, E. (1979). *Innori y ustoichyvost dynamicheskikh system*. M.: Nauka, 304 p. (in Russian).

Yu.M. Kononov, O.V. Nesmelova, Ya.I. Svyatenko

On the stability of rotation in an environment with resistance of a suspended Lagrange gyroscope taking into account the elasticity of spherical joints.

Based on the known equations of P.V. Kharlamov, the problem of stability of uniform rotations in a

medium with resistance of a Lagrangian gyroscope on a suspension is considered, taking into account the elasticity of spherical joints, mass and inertial characteristics of the suspension and constant moments in inertial and non-inertial reference systems. The conditions of asymptotic stability of uniform rotations were obtained and analytical studies of the influence of the elasticity of hinges, mass and inertial characteristics of the suspension on the conditions of stability were carried out. The cases of the absence of one or the second constant moment and the case of the revival of the suspension in the string are considered. In the absence of a constant moment in the inertial frame of reference, it is shown that as the elasticity in the joints increases, asymptotic stability will always be possible at any angular velocity and at any parameters of the mechanical system. The obtained conditions are compared with stability conditions in the absence of dissipation.

Keywords: *medium with resistance, Lagrangian gyroscope, suspension, spherical restorative joints, constant moments in inertial and non-inertial frames of reference, uniform rotation, asymptotic stability.*

Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Слов'янськ
kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com
star-0@ukr.net
filioeee@gmail.com

Отримано 20.05.24