

УДК 531.36, 531.38

DOI: 10.37069/1683-4720-2025-39-3

©2025. Ю.М. Кононов, О.В. Несмєлова, Я.І. Святенко

ПРО СТІЙКІСТЬ ОБЕРТАННЯ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ ГІРОСКОПА ЛАГРАНЖА НА ПІДВІСІ З УРАХУВАННЯМ ПРУЖНОГО СФЕРИЧНОГО ШАРНІРУ І ШАРНІРУ ГУКА

На підставі відомих рівнянь П.В. Харламова, розглянуто задачу про стійкість рівномірних обертань у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа на підвісі з урахуванням пружності сферичного шарніру, шарніру Гука, масових та інерційних характеристик підвісу і постійних моментів. Отримані умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань та проведені аналітичні дослідження впливу пружності шарнірів, масових та інерційних характеристик підвісу на умови стійкості. Показано, що при зростанні пружності в шарнірах завжди буде можлива асимптотична стійкість для будь-якої кутової швидкості та для довільних параметрів механічної системи. Отримані умови асимптотичної стійкості порівнюються з аналогічними умовами у випадку заміни шарніра Гука сферичним шарніром, а також з умовами стійкості за відсутності дисипації.

MSC: 70E55.

Ключові слова: середовище з опором, гіроскоп Лагранжа, підвіс, пружний сферичний шарнір та шарнір Гука, постійні моменти, рівномірне обертання, асимптотична стійкість.

1. Вступ.

Струнний підвіс використовується для експериментального визначення напрямку головних осей інерції складних механічних конструкцій, для балансування турбін та важких центрифуг, а також для експериментального дослідження впливу рідини на стійкість обертання твердого тіла. В даний час є досить велика кількість публікацій про різні аспекти обертання твердого тіла на підвісі [1]. У роботі [2] наведено дуже хороший огляд літератури з цієї задачі до 90-х років минулого століття, а в монографії [3] – до середини нашого століття. У статті [1] на підставі відомих рівнянь П.В. Харламова, розглянуто задачу про стійкість рівномірних обертань у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа на підвісі з урахуванням пружності сферичних шарнірів, масових та інерційних характеристик підвісу і постійних моментів в інерційній та неінерційній системах відліку. Отримані умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань та проведені аналітичні дослідження впливу пружності шарнірів, масових та інерційних характеристик підвісу на умови стійкості. Розглянуто випадки відсутності одного або другого постійного моменту та випадок відродження підвісу у струну. У разі відсутності постійного моменту в інерційній системі відліку показано, що при зростанні пружності в шарнірах завжди буде можлива асимптотична стійкість при будь-якій кутовій швидкості та при довільних параметрах механічної системи. Отримані умови порівнюються з

Робота була частково підтримана грантом від Simons Foundation (PD-Ukraine-00010584, Yuriy Kononov, Olga Nesmelova, Yaroslav Sviatenko)

умовами стійкості за відсутності дисипації.

Дана стаття узагальнює результати статті [1] на випадок, коли гіроскоп Лагранжа з'єднаний з підвісом пружним шарніром Гука та за відсутності постійного моменту в інерційній системі відліку. У статті на підставі критерію Льєнара–Шипара, записаного в інваріантному вигляді, отримані умови асимптотичної стійкості у вигляді системи трьох нерівностей відповідно квадрата кутової швидкості та коефіцієнтів пружності шарнірів, проведено їх аналітичні дослідження та порівняння з умовами стійкості у випадку заміни шарніра Гука сферичним шарніром.

2. Постановка задачі. Основні рівняння.

Нехай тверде тіло S_1 (підвіс) має нерухому точку O_1 в якій на нього діє пружний відновлювальний сферичний шарнір $L_1 = k_1 \nu \times s / |s|$, $k_1 \geq 0$. Динамічно симетричні тверді тіла S_1 і S_2 пов'язані в точці O_2 пружним відновлювальним шарніром Гука L_2 . Шарніром Гука називають невагому хрестовину з ортогональними осями, навколо яких відбувається відносне обертання тіл. Таке з'єднання допускає два ступені свободи, а момент сил реакцій зв'язку перпендикулярний площині шарніра. В цьому випадку для виключення моментів сил реакцій зв'язку необхідно спроектувати рівняння на осі шарніру Гука [7, 8].

Тверде тіло S_i ($i = 1, 2$) знаходиться під дією сили тяжіння, дисипативного моменту $M_i = D_i \omega_i$, $D_i = \text{diag}(D_{i1}, D_{i1}, D_{i3})$, ($D_{ij} > 0$; $i = 1, 2$; $j = 1, 3$), що моделює середовище з опором, а також під дією постійного моменту в неінерційній системі відліку $M_{iq} = Q_i e_3^2$, який спрямований вздовж осі симетрії тіла та підтримує обертання тіл S_i . Тут ω_i – кутова швидкість твердого тіла S_i , $s = \overrightarrow{O_1 O_2}$, $c_i = \overrightarrow{O_i C_i}$, C_i – центр мас тіла S_i , g – вектор прискорення вільного падіння (рис.1).

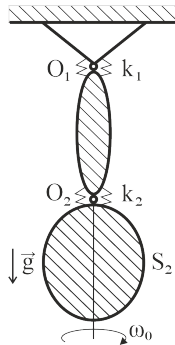


Рис. 1.

Рівняння обертання в середовищі з опором двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа матимуть вигляд [1–6]:

$$\begin{aligned} (J_1 \cdot \omega_1)' + m_2 s \times (\omega_1 \times s + \omega_2 \times c_2)' &= (m_1 c_1 + m_2 s) \times g + \\ &+ L_1 - L_2 - D_1 \omega_1 + M_{1q}, \\ (J_2 \cdot \omega_2)' + m_2 c_2 \times (\omega_1 \times s + \omega_2 \times c_2)' &= m_2 c_2 \times g + L_2 - D_2 \omega_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут $J_i = \text{diag}(A_i, A_i, C_i)$ – тензор інерції твердого тіла S_i відносно точки O_i ; m_i – його маса; точкою « $\cdot$ » позначена абсолютна похідна.

Зв'яжемо з кожним із тіл S_i незмінно базис $e_1^i e_2^i e_3^i$ з вершиною в точці O_i , осі якого направимо по головних осях тензора інерції J_i і введемо нерухомий базис $e_1^0 e_2^0 e_3^0$, вектор e_3^0 якого збігається з векторами ν . Нехай $s = s e_3^1$ ($s \geq 0$), $c_i = c_i e_3^i$ ($c_i \geq 0$). Векторні рівняння (1) в кутах Крилова $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ відносно інерціальної системи $e_1^0 e_2^0 e_3^0$ запишуться наступним чином [1,5,6]:

$$\begin{aligned} A'_i(\ddot{\beta}_i + \dot{\alpha}_i^2 \sin \beta_i \cos \beta_i) + C_i r_i \dot{\alpha}_i \cos \beta_i + \mu \beta_{ki} = \\ = -\tilde{a}_i g \sin \beta_i \cos \alpha_i + k_i(\alpha_{32}^{i-1,i} \cos \gamma_i + \alpha_{31}^{i-1,i} \sin \gamma_i) + \\ + k_{i+1}(\alpha_{32}^{i+1,i} \cos \gamma_i + \alpha_{31}^{i+1,i} \sin \gamma_i) - D_{i1} \dot{\beta}_i, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} A'_i(\ddot{\alpha}_i \cos \beta_i - 2\dot{\alpha}_i \dot{\beta}_i \sin \beta_i) - C_i r_i \dot{\beta}_i + \mu \alpha_{ki} = \\ = -\tilde{a}_i g \sin \alpha_i + k_i(\alpha_{32}^{i-1,i} \sin \gamma_i + \alpha_{31}^{i-1,i} \cos \gamma_i) + \\ + k_{i+1}(\alpha_{32}^{i+1,i} \sin \gamma_i + \alpha_{31}^{i+1,i} \cos \gamma_i) - D_{i1} \dot{\alpha}_i \cos \beta_i, \end{aligned} \quad (3)$$

$$C_i \dot{r}_i = -D_{i3} r_i + Q_i, \quad (i = 1, 2), \quad (4)$$

де $A'_1 = A_1 + s^2 m_2$, $A'_2 = A_2$, $\mu = s \tilde{a}_2$, $\tilde{a}_1 = m_1 c_1 + m_2 s$, $\tilde{a}_2 = m_2 c_2$, $r_i = \dot{\gamma}_i - \dot{\alpha}_i \sin \beta_i$, $k_3 = 0$, p_i, q_i, r_i – проекції вектора кутової швидкості ω_i твердого тіла S_i на осі $e_1^i e_2^i e_3^i$, $\alpha_{\mu\kappa}^{ij} = e_\mu^i \cdot e_\kappa^j$, $e_\mu^i = \sum_{\kappa=1}^3 \alpha_{\mu\kappa}^{i0} e_\kappa^0$, $\alpha_{\mu\kappa}^{ij} = \sum_{\sigma=1}^3 \alpha_{\mu\sigma}^{i0} \alpha_{\kappa\sigma}^{j0}$, а значення нелінійних функцій α_{ki}, β_{ki} та $\alpha_{\mu\sigma}^{i0}$ від кутів $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ наведено в роботі [1].

3. Умови стійкості рівномірного обертання гіроскопа Лагранжа на підвісі.

Система (2)–(4) допускає розв'язки

$$\alpha_i = \beta_i = 0, \quad \gamma_i = \omega_{0i} t, \quad r_i = \omega_{0i} = Q_i / D_{i3}, \quad (5)$$

які відповідають рівномірним обертанням твердих тіл S_i з кутовими швидкостями ω_{0i} навколо вертикалі.

Нехай в збуреному русі $\omega_i = \omega_{0i} + \Omega_i$, де $|\Omega_i|$ є величина першого порядку малості порівняно з $|\omega_{0i}|$.

Для шарніру Гука $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$, тому будемо вважати, що $Q_1 / D_{13} = Q_2 / D_{23}$ або $Q_1 = Q_2 = Q$, $D_{13} = D_{23} = D_3$.

Зберігаючи для змінних їх колишні позначення, запишемо лінеаризовані рівняння збуреного руху:

$$\begin{aligned} A'_1 \ddot{\beta}_1 + \tilde{C}_1 \dot{\alpha}_1 + D_1 \dot{\beta}_1 + \mu \ddot{\beta}_2 + \tilde{a}_1 g \beta_1 k_1 + (\beta_1 - \beta_2) k_2 = 0, \\ A'_1 \ddot{\alpha}_1 - \tilde{C}_1 \dot{\beta}_1 + D_1 \dot{\alpha}_1 + \mu \ddot{\alpha}_2 + \tilde{a}_1 g \alpha_1 k_1 + (\alpha_1 - \alpha_2) k_2 = 0, \\ A'_2 \ddot{\beta}_2 + \tilde{C}_2 \dot{\alpha}_2 + D_2 \dot{\beta}_2 + \mu \ddot{\beta}_1 + \tilde{a}_2 g \beta_1 k_2 - (\beta_1 - \beta_2) k_2 = 0, \\ A'_2 \ddot{\alpha}_2 - \tilde{C}_2 \dot{\beta}_2 + D_2 \dot{\alpha}_2 + \mu \ddot{\alpha}_1 + \tilde{a}_2 g \alpha_2 k_2 - (\alpha_1 - \alpha_2) k_2 = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Слід зазначити, що лінеаризоване рівняння (4) відділяється від рівнянь (6) та має один нульовий і один від'ємний корінь. Нульовий корінь пов'язаний з наявністю геометричного інтеграла $\gamma^2 = 1$, тому стійкість розв'язків (5) залежить тільки від коренів характеристичного рівняння, що відповідає системі (6) [9].

Нехай $u_i = \beta_i - i\alpha_i$, тоді рівняння (6) набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} A'_1 \ddot{u}_1 + (i\tilde{C}_1 + D_1) \dot{u}_1 + \mu \ddot{u}_2 + \tilde{a}_1 g k_1 u_1 + (u_1 - u_2) k_2 &= 0, \\ A'_2 \ddot{u}_2 + (i\tilde{C}_2 + D_2) \dot{u}_2 + \mu \ddot{u}_1 + \tilde{a}_2 g k_2 u_2 - (u_1 - u_2) k_2 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Представивши шукані функції у вигляді $ae^{\lambda t}$, запишемо характеристичне рівняння збуреного руху (7) у вигляді:

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu\lambda^2 - k_2 \\ \mu\lambda^2 - k_2 & F_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

або

$$a_4 \lambda^4 + (a_3 + ib_3) \lambda^3 + \dots + (a_1 + ib_1) \lambda + a_0 = 0. \quad (9)$$

Тут

$$\begin{aligned} F_i &= A'_i \lambda^2 + (i\tilde{C}_i + D_i) \lambda + \tilde{a}_i g + k_i + k_{i+1}, \quad a_3 = A'_1 D_2 + A'_2 D_1 > 0, \\ a_4 &= A'_1 A'_2 - \mu^2 = (A_1 + c_1^2 m_1)(A_2 + c_2^2 m_2) + A_2 s_1^2 m_2 > 0, \\ a_2 &= D_1 D_2 - \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 + (k_1 + k_2 + \tilde{a}_1 g) A'_2 + (k_2 + \tilde{a}_2 g) A'_1 + 2\mu k_2, \\ a_1 &= (k_1 + k_2 + \tilde{a}_1 g) D_2 + (k_2 + \tilde{a}_2 g) D_1, \quad b_3 = A'_1 \tilde{C}_2 + A'_2 \tilde{C}_1, \\ b_1 &= (k_1 + k_2 + \tilde{a}_1 g) \tilde{C}_2 + (k_2 + \tilde{a}_2 g) \tilde{C}_1, \quad b_2 = \tilde{C}_1 D_2 + \tilde{C}_2 D_1, \\ a_0 &= \tilde{a}_2 g (k_1 + k_2 + \tilde{a}_1 g) + k_2 (k_1 + \tilde{a}_1 g). \end{aligned} \quad (10)$$

Слід зазначити, що у випадку сферичного шарніру характеристичне рівняння (8) має вигляд

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu\lambda^2 \\ \mu\lambda^2 & F_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Для того, щоб всі нулі рівняння (9) були різні та лежали у відкритій лівій півплощині, згідно критерію Лъенара – Шипара, записаного в іннормному вигляді [7], необхідно і достатньо, щоб матриця сьомого порядку, яка складена з коефіцієнтів цього рівняння, була іннормно-додатньою, тобто щоб були додатньо визначені матриці Δ_1 , Δ_3 , Δ_5 і Δ_7 :

$$I_1 = |\Delta_1| = a_3 > 0,$$

$$I_3 = |\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 \\ 0 & a_3 & -b_2 \\ a_3 & -b_2 & -a_1 \end{vmatrix} > 0, \quad (11)$$

$$I_5 = |\Delta_5| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & 0 \\ a_3 & -b_2 & -a_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad (12)$$

$$I_7 = |\Delta_7| = \begin{vmatrix} a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -b_3 & -a_2 & b_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 \\ 0 & a_3 & -b_2 & -a_1 & b_0 & 0 & 0 \\ a_3 & -b_1 & -a_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0. \quad (13)$$

Оскільки $a_3 > 0$, то $I_1 > 0$ і умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань у середовищі з опором двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа визначаються трьома нерівностями (11) – (13). При частковій дисипації ($D_1 = D_2 = 0$, $D_3 \neq 0$) асимптотична стійкість неможлива, оскільки в цьому випадку $a_3 = 0$.

4. Дослідження умов стійкості (11) – (13).

Умови асимптотичної стійкості можуть бути представлені у вигляді системи трьох нерівностей відносно квадрата кутової швидкості ω_0 ($x = \omega_0^2$) або коефіцієнтів пружності шарнірів k_i ($i = 1, 2$):

$$I_{32}x + I_{30} > 0, \quad I_{54}x^2 + I_{52}x + I_{50} > 0, \quad (I_{74}x^2 + I_{72}x + I_{70})a_0 > 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{31}k_1 + \tilde{I}_{30} &> 0, \quad \tilde{I}_{53}k_1^3 + \tilde{I}_{52}k_1^2 + \tilde{I}_{51}k_1 + \tilde{I}_{50} > 0, \\ \tilde{I}_{75}k_1^5 + \tilde{I}_{74}k_1^4 + \dots + \tilde{I}_{71}k_1 + \tilde{I}_{70} &> 0. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \widehat{I}_{31}k_2 + \widehat{I}_{30} &> 0, \quad \widehat{I}_{53}k_2^3 + \widehat{I}_{52}k_2^2 + \widehat{I}_{51}k_2 + \widehat{I}_{50} > 0, \\ \widehat{I}_{75}k_2^5 + \widehat{I}_{74}k_2^4 + \dots + \widehat{I}_{71}k_2 + \widehat{I}_{70} &> 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Через складність старших коефіцієнтів нерівностей (14) проведемо дослідження умов стійкості (15) – (16) відносно коефіцієнтів пружності k_1 і k_2 .

Із нерівностей (15) випливає, що старші коефіцієнти $\tilde{I}_{31}$, $\tilde{I}_{53}$ і $\tilde{I}_{75}$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{31} &= (A_2' D_1 + A_1' D_2)(A_2'^2 D_1 + \mu^2 D_2) > 0, \quad \tilde{I}_{53} = D_2 (A_2'^2 D_1 + \mu^2 D_2)^2 > 0, \\ \tilde{I}_{75} &= D_2^2 (A_2'^2 D_1 + \mu^2 D_2)^2 (k_2 + \tilde{a}_{2g}). \end{aligned} \quad (17)$$

Із (17) слідує, що коефіцієнт $\tilde{I}_{75}$ буде додатним при $k_2 + \tilde{a}_{2g} > 0$. Таким чином, коли точка підвісу O_2 знаходиться не нижче центру мас тіла S_2 ($c_2 \geq 0$) або нижче

($c_2 < 0$) і $k_2 > -\tilde{a}_2 g$, то для довільних значень механічних параметрів системи при збільшенні коефіцієнта пружності k_1 буде можлива асимптотична стійкість. Слід зазначати, що у випадку сферичного шарніру старші коефіцієнти $\tilde{I}_{31}$, $\tilde{I}_{53}$ і $\tilde{I}_{75}$ мають такий же самий вигляд.

Умови стійкості (16) відносно коефіцієнта пружності k_2 мають наступні старші коефіцієнти $\hat{I}_{31}$, $\hat{I}_{53}$ і $\hat{I}_{75}$:

$$\hat{I}_{31} = (A'_2 D_1 + A'_1 D_2) \left[(A'_2 + \mu)^2 D_1 + (A'_1 + \mu)^2 D_2 \right] > 0,$$

$$\hat{I}_{53} = (D_1 + D_2) \left[(A'_2 + \mu)^2 D_1 + (A'_1 + \mu)^2 D_2 \right]^2 > 0,$$

$$\hat{I}_{75} = (D_1 + D_2)^2 \left[(A'_2 + \mu)^2 D_1 + (A'_1 + \mu)^2 D_2 \right]^2 [k_1 + (\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2) g].$$

Звідки випливає, що коефіцієнт $\hat{I}_{75}$ буде додатним при $k_1 + (\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2) g > 0$. Таким чином, коли точка підвісу O_2 знаходиться не нижче центру мас тіла S_2 ($c_2 \geq 0$) або нижче ($c_2 < 0$) і $k_1 > -(\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2) g$, то для довільних значень механічних параметрів системи при збільшенні коефіцієнта пружності k_2 буде можлива асимптотична стійкість. Слід зазначати, що у випадку сферичного шарніру старші коефіцієнти $\hat{I}_{31}$, $\hat{I}_{53}$ і $\hat{I}_{75}$ мають вигляд:

$$\hat{I}_{31} = (A'_2 D_1 + A'_1 D_2) (A'^2_2 D_1 + \mu^2 D_2) > 0, \quad \hat{I}_{53} = D_2 (A'^2_2 D_1 + \mu^2 D_2)^2 > 0,$$

$$\hat{I}_{75} = D_2^2 (A'^2_2 D_1 + \mu^2 D_2)^2 (k_2 + \tilde{a}_2 g).$$

Оскільки $\tilde{a}_1 = m_1 c_1 + m_2 s$ ($s > 0$), де $s \geq 0$, $c_1 \geq 0$, то наявність шарніра Гука йде в запас стійкості.

5. Випадок відсутності дисипативних і постійних моментів.

Розглянемо випадок відсутності дисипативних ($D_i = 0$, $i = 1, 2$) і постійних моментів ($Q_i = 0$). У цьому випадку система рівнянь (2) – (4) допускає розв'язки (5), де $r_i = \omega = \text{const}$, а характеристичне рівняння (9) при $a_2 = a_4 = b_3 = b_1 = 0$ набуває вигляду:

$$a_4 \lambda^4 + ib_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + ib_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (18)$$

Коефіцієнти рівняння (18) визначаються за формулами (10), в яких потрібно покласти $D_1 = D_2 = 0$.

Стійкість консервативних систем визначається тим, що корені рівняння (18) повинні знаходитися на уявній осі. Для цього в рівнянні (18) покладемо $\lambda = i\sigma$ і воно матиме вигляд:

$$a_4 \sigma^4 + b_3 \sigma^3 - a_2 \sigma^2 - b_1 \sigma + a_0 = 0. \quad (19)$$

Для того, щоб всі нулі рівняння (19) були різні та лежали на дійсній осі, згідно критерію Ляпунова – Шипара, записаного в інваріантному вигляді [11], необхідно і достатньо, щоб матриця сьомого порядку, яка складена з коефіцієнтів цього рівняння, була інваріантно-додатньою, тобто щоб були додатньо визначені матриці Δ_1 , Δ_3 , Δ_5 і Δ_7 :

$$I_1 = |\Delta_1| = 4a_4 > 0,$$

$$I_3 = |\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_4 & b_3 & -a_2 \\ 0 & 4a_4 & 3b_3 \\ 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad (20)$$

$$I_5 = |\Delta_5| = \begin{vmatrix} a_4 & b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & b_3 & -a_2 & -b_1 \\ 0 & 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 \\ 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & 0 \\ 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad (21)$$

$$I_7 = |\Delta_7| = \begin{vmatrix} a_4 & b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_3 & -a_2 & -b_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 4a_4 & 3b_3 & -2a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} > 0. \quad (22)$$

Необхідні умови стійкості будуть представлені у вигляді системи трьох нерівностей відносно кутової швидкості ω_0 і коефіцієнтів пружності шарнірів k_i , ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} I_{32}\omega_0^2 + I_{31}\omega_0 + I_{30} &> 0, \quad I_{56}\omega_0^6 + I_{55}\omega_0^5 + \dots + I_{51}\omega_0 + I_{50} > 0, \\ I_{78}\omega_0^8 + I_{77}\omega_0^7 + \dots + I_{71}\omega_0 + I_{70} &> 0. \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{31}k_1 + \tilde{I}_{30} &> 0, \quad \tilde{I}_{53}k_1^3 + \tilde{I}_{52}k_1^2 + \tilde{I}_{51}k_1 + \tilde{I}_{50} > 0, \\ \tilde{I}_{75}k_1^5 + \tilde{I}_{74}k_1^4 + \dots + \tilde{I}_{71}k_1 + \tilde{I}_{70} &> 0. \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \widehat{I}_{31}k_2 + \widehat{I}_{30} &> 0, \quad \widehat{I}_{53}k_2^3 + \widehat{I}_{52}k_2^2 + \widehat{I}_{51}k_2 + \widehat{I}_{50} > 0, \\ \widehat{I}_{75}k_2^5 + \widehat{I}_{74}k_2^4 + \dots + \widehat{I}_{71}k_2 + \widehat{I}_{70} &> 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Через складність старших коефіцієнтів нерівностей (23) проведемо дослідження умов стійкості (24) – (25) відносно коефіцієнтів пружності k_1 і k_2 .

Із нерівностей (24) випливає, що старші коефіцієнти $\tilde{I}_{31}$, $\tilde{I}_{53}$ і $\tilde{I}_{75}$ мають вигляд:

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{31} &= 8a_4^2 A_2' > 0, \quad \tilde{I}_{53} = \tilde{I}_{31} (A_2')^2 > 0, \quad \tilde{I}_{75} = \frac{1}{2} \tilde{I}_{31} (A_2')^2 h_7, \\ h_7 &= 4A_2' (k_2 + \tilde{a}_2 g) + C_2^2 \omega_0^2.\end{aligned}\quad (26)$$

Із (26) слідує, що коефіцієнт $\tilde{I}_{75}$ буде додатним, коли $4A_2' (k_2 + \tilde{a}_2 g) + C_2^2 \omega_0^2 > 0$. Для цього достатньо, щоб $k_2 > -\tilde{a}_2 g$. Таким чином, при досить великих значеннях коефіцієнтів пружності k_1 і при $k_2 > -\tilde{a}_2 g$ будуть виконані нерівності (24). Слід зазначати, що у випадку сферичного шарніру старші коефіцієнти $\tilde{I}_{31}$, $\tilde{I}_{53}$ і $\tilde{I}_{75}$ мають такий же самий вигляд.

Для коефіцієнта пружності k_2 старші коефіцієнти $\hat{I}_{31}$, $\hat{I}_{53}$ і $\hat{I}_{75}$ мають вигляд:

$$\begin{aligned}\hat{I}_{31} &= 8a_4^2 (A_1' + A_2' + 2\mu) > 0, \quad \hat{I}_{53} = \hat{I}_{31} (A_1' + A_2' + 2\mu)^2 > 0, \\ \hat{I}_{75} &= \frac{1}{2} \hat{I}_{53} h_5, \quad h_5 = 4[k_1 + (\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2)g] (A_1' + A_2' + 2\mu) + (C_1 + C_2)^2 \omega_0^2.\end{aligned}\quad (27)$$

Із (27) слідує, що коефіцієнт $\hat{I}_{75}$ буде додатним, коли $h_5 > 0$. Для цього достатньо, щоб $k_1 > -g(\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2)$. Таким чином, при досить великих значеннях коефіцієнтів пружності k_2 і при $k_1 > -g(\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2)$ будуть виконані нерівності (25). Слід зазначати, що у випадку сферичного шарніру старші коефіцієнти $\hat{I}_{31}$, $\hat{I}_{53}$ і $\hat{I}_{75}$ мають вигляд: $\hat{I}_{31} = 8a_4^2 (A_1' + A_2') > 0$, $\hat{I}_{53} = \hat{I}_{31} (A_2')^3 > 0$, $\hat{I}_{75} = 16a_4^2 h_5^2 > 0$, де $h_5 = (A_1' + A_2')^2 + 4\mu^2 > 0$ і вони незалежні від коефіцієнта пружності k_1 .

Таким чином, вплив коефіцієнтів пружності шарнірів на умови стійкості дуже великий. Їх збільшенням завжди можна досягти виконанням нерівностей (24)–(25) при $A_i > 0$ незалежно від значень інших механічних параметрів системи. В цьому випадку буде можлива стійкість рівномірного обертання гіроскопа Лагранжа на підвісі.

6. Висновки.

Розглянуто задачу про стійкість рівномірних обертань у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа на підвісі з урахуванням пружності сферичного шарніру, шарніру Гука, масових та інерційних характеристик підвісу і постійних моментів в неінерційній системі відліку. На підставі критерія Ляпунова–Шипара, записаного в інваріантному вигляді, отримані умови асимптотичної стійкості у вигляді системи трьох нерівностей відповідно кутової швидкості та коефіцієнтів пружності шарнірів. Відповідно квадрата кутової швидкості ці нерівності мають 2, 2 і 1 ступень, а відповідно коефіцієнтів пружності шарнірів – 5, 3 і 1 ступень. Проведені аналітичні дослідження впливу пружності шарнірів на умови асимптотичної стійкості. Показано, що при зростанні пружності в шарнірах завжди буде можлива асимптотична стійкість для будь-якої кутової швидкості і при довільних параметрах механічної системи. Отримані умови асимптотичної стійкості порівнюються з умовами асимптотичної стійкості у випадку заміни шарніра Гука сферичним шарніром, а також з умовами стійкості за відсутності дисипації.

Цитована література

1. Кононов Ю.М., Несмелова О.В., Святенко Я.І. Про стійкість обертання у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа на підвісі з урахуванням пружності сферичних шарнірів // Праці ІПММ НАН України, 2024. – Том 38, № 1. – С. 33–43.
2. Болграбская И.А., Савченко А.Я. Устойчивость стационарных движений систем связанных твердых тел // Механика твердого тела. Межвед. сб. науч. тр. – 1989. – Вып. 21. – С. 62–73.
3. Болграбская И.А., Лесина М.Е., Чебанов Д.А. Динамика систем связанных твёрдых тел. Серия “Задачи и методы: математика, механика, кибернетика”. – ИПММ НАН Украины, Том 9. – К.: Наукова Думка, 2012. – 395 с.
4. Харламов П.В. Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. Межвед. сб. науч. тр. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
5. Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыхин Г.А. Устойчивость движения систем связанных твёрдых тел. – К.: Наук. думка, 1991. – 166 с.
6. Kononov Yu.M., Sviatenko Ya.I. Stabilization of Unstable Spinning of a Lagrange Gyroscope in a Resisting Medium by Another Spinning Gyroscope // Int. Appl. Mech. – 2022. – 58, № 6. – P. 605–612.
7. Jury E.I. *Inners and Stability of Dynamic Systems*. – London: Wiley, 1974. – 308 p.

References

1. Kononov Yu.M., Nesmelova O.V., Sviatenko Ya.I. (2024). On the stability of rotation in an environment with resistance of a suspended Lagrange gyroscope taking into account the elasticity of spherical joints. *Proceedings of Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine*, 38,(1), 33–43 (in Ukrainian).
2. Bolhrabskaia Y.A., Savchenko A.Y. (1989). Stability of stationary motions of systems of bound solids. *Solid Mechanics*, 21, 62–73 (in Russian).
3. Bolhrabskaia Y.A., Lesyna M.E., Chebanov D.A. (2012). Dynamics of systems of coupled solids. *Series "Problems and Methods: Mathematics, Mechanics, Cybernetics"*, 9, Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
4. Kharlamov P.V. (1972). About equations of motion of a system of solids. *Solid Mechanics*, 4, 52–73 (in Russian).
5. Savchenko A.Y., Bolhrabskaia Y.A., Kononikhin H.A. (1991). *Stability of motion of systems of bound solids*, Kyiv: Nauk. dumka (in Russian).
6. Kononov Yu.M., Sviatenko Ya.I. (2022). Stabilization of Unstable Spinning of a Lagrange Gyroscope in a Resisting Medium by Another Spinning Gyroscope, *Int. Appl. Mech.*, 58(6), 605–612.
7. Jury E.I. (1974). *Inners and Stability of Dynamic Systems*. London: Wiley.

Yu.M. Kononov, O.V. Nesmelova, Ya.I. Sviatenko

On rotational stability in an environment with the support of a Lagrange's gyroscope on a suspension taking into account an elastic spherical joint and a Hooke's joint.

Based on the well-known equations of P.V. Kharlamov, the problem of the stability of uniform rotations in a medium with the resistance of a Lagrange's gyroscope on a suspension is considered, taking into account the elasticity of the spherical joint, the Hooke's joint, the mass and inertial characteristics of the suspension, and the constant moments. The conditions of asymptotic stability of uniform rotations are obtained, and analytical studies of the influence of the elasticity of the joints, the mass and inertial characteristics of the suspension on the stability conditions are carried out. It is shown that with an increase in the elasticity in the joints, asymptotic stability will always be possible at any angular velocity and at any parameters of the mechanical system. The obtained asymptotic stability conditions

are compared with similar conditions in the case of replacing the Hooke's joint with a spherical joint, as well as with stability conditions in the absence of dissipation.

Keywords: *medium with resistance, Lagrange's gyroscope, suspension, elastic spherical and Hooke's joint, constant moments, uniform rotation, asymptotic stability.*

Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Слов'янськ
kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com
star-o@ukr.net
filioeee@gmail.com

Отримано 30.03.25