

УДК 517.5

DOI: 10.37069/1683-4720-2025-39-5

©2025. М.В. Стефанчук

## ПРО ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНУ АСИМПТОТИКУ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ НИЖНІХ $Q$ -ГОМЕОМОРФІЗМІВ НА КОМПЛЕКСНІЙ ПЛОЩИНІ

У роботі досліджується асимптотична поведінка на нескінченності нижніх  $Q$ -гомеоморфізмів відносно  $p$ -модуля при  $1 < p < 2$  на комплексній площині. Знайдено достатню умову на норму функції  $Q$ , за якої відображення має експоненціальний ріст на нескінченності. Побудовано приклад, що показує точність отриманих результатів.

**MSC:** 30C65.

**Ключові слова:**  $p$ -модуль сім'ї кривих, кільцеві  $Q$ -гомеоморфізми відносно  $p$ -модуля, нижні  $Q$ -гомеоморфізми відносно  $p$ -модуля, асимптотична поведінка на нескінченності.

### 1. Вступ.

Нагадаємо деякі означення. Для простоти викладу обмежимося тільки плоским випадком. Нехай задано сім'ю  $\Gamma$  кривих  $\gamma$  у комплексній площині  $\mathbb{C}$ . Борелеву функцію  $\rho : \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty]$  називають *допустимою* для  $\Gamma$  (пишуть  $\rho \in \text{adm } \Gamma$ ), якщо

$$\int_{\gamma} \rho(z) |dz| \geq 1 \quad (1)$$

для кожної (локально спрямлюваної) кривої  $\gamma \in \Gamma$ .

Нехай  $p \in (1, \infty)$ . Тоді  $p$ -модулем сім'ї  $\Gamma$  називається величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_{\mathbb{C}} \rho^p(z) dx dy,$$

див. [1].

Для довільних множин  $E$ ,  $F$  і  $G$  комплексної площини  $\mathbb{C}$  позначимо через  $\Delta(E, F, G)$  сім'ю всіх неперервних кривих  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , які з'єднують  $E$  і  $F$  у  $G$ , тобто  $\gamma(a) \in E$ ,  $\gamma(b) \in F$  і  $\gamma(t) \in G$  при  $a < t < b$ .

Для  $z_0 \in \mathbb{C}$  покладемо

$$A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\},$$

$$S_i = S(z_0, r_i) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r_i\}, \quad i = 1, 2,$$

Ця робота була підтримана грантом від Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00014586, М.В.С.).

Робота була підтримана бюджетною програмою «Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

Нехай  $D$  – область у комплексній площині  $\mathbb{C}$  та  $Q : D \rightarrow [0, \infty]$  – вимірنا за Лебегом функція. Гомеоморфізм  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  називається *кільцевим  $Q$ -гомеоморфізмом відносно  $p$ -модуля у точці  $z_0 \in D$* , якщо співвідношення

$$M_p(\Delta(fS_1, fS_2, fD)) \leq \int_{\mathbb{A}} Q(z) \eta^p(|z - z_0|) dx dy \quad (2)$$

виконується для будь-якого кільця  $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$ ,  $0 < r_1 < r_2 < d_0$ ,  $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$ , і для кожної вимірної функції  $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$  такої, що

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr = 1.$$

Гомеоморфізм  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  називають *кільцевим  $Q$ -гомеоморфізмом відносно  $p$ -модуля в області  $D$* , якщо умова (2) виконується для будь-якої точки  $z_0 \in D$ . Кільцеві  $Q$ -гомеоморфізми відносно  $p$ -модуля при  $p = 2$  називають кільцевими  $Q$ -гомеоморфізмами (у точці  $z_0 \in D$  чи в області  $D$ ).

Надалі будемо вважати, що

$$q_{z_0}(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{S(z_0, r)} Q(z) |dz|$$

є середнім інтегральним значенням функції  $Q$  по колу  $S(z_0, r)$ .

Нижче наведено твердження про співвідношення між площами образів двох концентричних кругів при кільцевих  $Q$ -гомеоморфізмах відносно  $p$ -модуля,  $p > 2$ , див. [2, лема 2.1].

**Лема 1.1.** *Припустимо, що  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  – кільцевий  $Q$ -гомеоморфізм відносно  $p$ -модуля у точці  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $p > 2$ , та для деяких чисел  $r_0 > 0$ ,  $\kappa = \kappa(z_0) > 0$  і  $\alpha > 0$  виконується умова*

$$q_{z_0}(t) \leq \kappa t^{-1} e^{-\alpha t}$$

для м.в.  $t \in [r_0, \infty)$ . Тоді для будь-яких  $r_1, r_2$ , таких, що  $0 < r_0 \leq r_1 < r_2 < \infty$  справедлива оцінка

$$|f(B(z_0, r_2))|^{\frac{p-2}{2(p-1)}} \geq |f(\overline{B(z_0, r_1)})|^{\frac{p-2}{2(p-1)}} + \lambda_p \kappa^{-\frac{1}{p-1}} \alpha^{-1} \left( e^{\frac{\alpha r_2}{p-1}} - e^{\frac{\alpha r_1}{p-1}} \right),$$

де  $\lambda_p = \pi^{\frac{p-2}{2(p-1)}} (p-2)$ .

Теорія кільцевих  $Q$ -гомеоморфізмів відносно  $p$ -модуля у просторі  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , при  $p = n$  досліджувалась у роботах [3–5], при  $1 < p < n$  див. [6–10] та при  $p > n$  див. [11–15], а також на комплексній площині при  $p > 2$  див. [2, 16–20]. Більш загальні класи відображень досліджувались у [21–30]. На комплексній площині теорія кільцевих  $Q$ -гомеоморфізмів відносно  $p$ -модуля використовується при

вивченні асимптотичних властивостей регулярних розв'язків нелінійних рівнянь Бельтрамі, див. [31–33].

Вельми корисним інструментом при дослідженні відображень виявилися також так звані нижні  $Q$ -гомеоморфізми, що були вперше введені при  $p = n$  у роботі Д. Ковтонюка і В. Рязанова, див. [34] або розд. 9 у монографії [3], та при  $p \neq n$  у роботі [35].

Кажуть, що деяка властивість виконується для  $p$ -майже всіх кривих  $\gamma$  сім'ї  $\Gamma$ , якщо підсім'я кривих сім'ї  $\Gamma$ , для яких ця властивість порушується, має  $p$ -модуль нуль. Вимірну за Лебегом функцію  $\rho : \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty]$  називають *узагальнено  $p$ -допустимою* для сім'ї кривих  $\Gamma$  і пишуть  $\rho \in \text{ext}_p \text{adm } \Gamma$ , якщо нерівність (1) виконується для  $p$ -майже всіх  $\gamma \in \Gamma$ .

Нехай  $Q : D \rightarrow (0, \infty)$  – вимірна за Лебегом функція. Гомеоморфізм  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  називають *нижнім  $Q$ -гомеоморфізмом відносно  $p$ -модуля у точці  $z_0 \in D$* , якщо нерівність

$$M_p(f\Sigma_{\mathbb{A}}) \geq \inf_{\rho \in \text{ext}_p \text{adm } \Sigma_{\mathbb{A}}} \int_{\mathbb{A}} \frac{\rho^p(z)}{Q(z)} dx dy \quad (3)$$

виконується для кожного кільця  $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ,  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < d_0$ , де  $\Sigma_{\mathbb{A}}$  – сім'я всіх кіл  $S(z_0, r)$ ,  $r \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ .

Гомеоморфізм  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  називають *нижнім  $Q$ -гомеоморфізмом відносно  $p$ -модуля в області  $D$* , якщо умова (3) виконується для будь-якої точки  $z_0 \in D$ . Нижні  $Q$ -гомеоморфізми відносно  $p$ -модуля при  $p = 2$  називають нижніми  $Q$ -гомеоморфізмами (у точці  $z_0 \in D$  чи в області  $D$ ).

Теорія нижніх  $Q$ -гомеоморфізмів відносно  $p$ -модуля у просторі  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , при  $p = n$  досліджувалась у роботах [3, 34], при  $p > n - 1$  див. [35], при  $p > n$  див. [36, 37], а також на комплексній площині при  $1 < p < 2$  див. [38].

У наступній теоремі встановлено зв'язок між нижніми і кільцевими  $Q$ -гомеоморфізмами відносно  $p$ -модуля, див. [35, теорема 7.1].

**Теорема 1.2.** *Нехай  $D$  – область у комплексній площині  $\mathbb{C}$ ,  $z_0 \in D$ . Припустимо, що  $Q : D \rightarrow (0, \infty)$  – вимірна за Лебегом функція така, що*

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, r) := \left( \int_{S(z_0, r)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z) |dz| \right)^{p-1} \neq \infty$$

для м.в.  $r \in (0, d_0)$ ,  $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$ , і  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  – нижній  $Q$ -гомеоморфізм відносно  $p$ -модуля у точці  $z_0$  при  $p > 1$ . Тоді  $f$  є кільцевим  $Q_*$ -гомеоморфізмом відносно  $\tilde{p}$ -модуля у точці  $z_0$  при  $\tilde{p} = \frac{p}{p-1}$  та  $Q_*(z) = Q^{\frac{1}{p-1}}(z)$ .

## 2. Експоненціальна оцінка площі образу круга.

У цьому розділі отримано нижню оцінку експоненціального типу площі образу круга для нижніх  $Q$ -гомеоморфізмів відносно  $p$ -модуля при  $1 < p < 2$ .

**Лема 2.1.** Припустимо, що  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  – нижній  $Q$ -гомеоморфізм відносно  $p$ -модуля у точці  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $1 < p < 2$ , та для деяких чисел  $r_0 > 0$ ,  $C_0 = C_0(z_0) > 0$  і  $\beta > 0$  виконується умова

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t) \leq C_0 e^{-\beta t}$$

для м.в.  $t \in [r_0, \infty)$ . Тоді для будь-яких  $r_1, r_2$ , таких, що  $0 < r_0 \leq r_1 < r_2 < \infty$  справедлива оцінка

$$|f(B(z_0, r_2))|^{\frac{2-p}{2}} \geq |f(\overline{B(z_0, r_1)})|^{\frac{2-p}{2}} + \mu_p C_0^{-1} \beta^{-1} (e^{\beta r_2} - e^{\beta r_1}),$$

де  $\mu_p = 2^{p-1} \pi^{\frac{p}{2}} (p-2)$ .

*Доведення.* Дійсно, за теоремою 1.2 нижній  $Q$ -гомеоморфізм відносно  $p$ -модуля у точці  $z_0$  при  $1 < p < 2$  є кільцевим  $Q_*$ -гомеоморфізмом відносно  $\tilde{p}$ -модуля у точці  $z_0$  з параметром  $\tilde{p} = \frac{p}{p-1} > 2$  при  $Q_*(z) = Q^{\frac{1}{p-1}}(z)$ . Застосовуючи лему 1.1

з параметрами  $\kappa = \frac{C_0^{\frac{1}{p-1}}}{2\pi}$  та  $\alpha = \frac{\beta}{p-1}$ , приходимо до висновків леми.  $\square$

**Теорема 2.2.** Припустимо, що  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  – нижній  $Q$ -гомеоморфізм відносно  $p$ -модуля у точці  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $1 < p < 2$ , та для деяких чисел  $r_0 > 0$ ,  $C_0 = C_0(z_0) > 0$  і  $\beta > 0$  виконується умова

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t) \leq C_0 e^{-\beta t}$$

для м.в.  $t \in [r_0, \infty)$ . Тоді для будь-якого  $R > r_0$  справедлива оцінка

$$|f(B(z_0, R))| \geq \mu_p^{\frac{2}{2-p}} C_0^{-\frac{2}{2-p}} \beta^{-\frac{2}{2-p}} (e^{\beta R} - e^{\beta r_0})^{\frac{2}{2-p}}, \quad (4)$$

де  $\mu_p = 2^{p-1} \pi^{\frac{p}{2}} (p-2)$ .

*Доведення.* Дійсно, поклавши у лемі 2.1  $r_1 = r_0$  та  $r_2 = R$ , приходимо до нерівності

$$\begin{aligned} |f(B(z_0, R))|^{\frac{2-p}{2}} &\geq |f(\overline{B(z_0, r_0)})|^{\frac{2-p}{2}} + \mu_p C_0^{-1} \beta^{-1} (e^{\beta R} - e^{\beta r_0}) \\ &\geq \mu_p C_0^{-1} \beta^{-1} (e^{\beta R} - e^{\beta r_0}), \end{aligned}$$

де  $\mu_p = 2^{p-1} \pi^{\frac{p}{2}} (p-2)$ . Далі, виконавши елементарні перетворення, приходимо до оцінки (4).  $\square$

### 3. Експоненціальна асимптотика на нескінченності.

У даному розділі знайдено достатню умову для експоненціального росту на нескінченності нижніх  $Q$ -гомеоморфізмів відносно  $p$ -модуля при  $1 < p < 2$ .

**Теорема 3.1.** Припустимо, що  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  – нижній  $Q$ -гомеоморфізм відносно  $p$ -модуля у точці  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $1 < p < 2$ , та для деяких чисел  $r_0 > 0$ ,  $C_0 = C_0(z_0) > 0$  і  $\beta > 0$  виконується умова

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t) \leq C_0 e^{-\beta t} \quad (5)$$

для м.в.  $t \in [r_0, \infty)$ . Тоді

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} M_f(z_0, R) e^{-\frac{\beta R}{2-p}} \geq (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left( \frac{2-p}{C_0 \beta} \right)^{\frac{1}{2-p}}, \quad (6)$$

де  $M_f(z_0, R) = \max_{|z-z_0|=R} |f(z) - f(z_0)|$ .

*Доведення.* Згідно теореми 2.2 для всіх  $R > r_0 > 0$  маємо оцінку

$$|f(B(z_0, R))| \geq \mu_p^{\frac{2}{2-p}} C_0^{-\frac{2}{2-p}} \beta^{-\frac{2}{2-p}} \left( e^{\beta R} - e^{\beta r_0} \right)^{\frac{2}{2-p}}, \quad (7)$$

де  $\mu_p = 2^{p-1} \pi^{\frac{p}{2}} (p-2)$ . Оскільки відображення  $f$  є гомеоморфізмом, то

$$|fB(z_0, R)| \leq \pi \left( \max_{|z-z_0|=R} |f(z) - f(z_0)| \right)^2.$$

Звідси та з оцінки (7) випливає, що

$$M_f(z_0, R) \geq (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left( \frac{2-p}{C_0 \beta} \right)^{\frac{1}{2-p}} \left( e^{\beta R} - e^{\beta r_0} \right)^{\frac{1}{2-p}},$$

де  $M_f(z_0, R) = \max_{|z-z_0|=R} |f(z) - f(z_0)|$ .

Накінець, помноживши останню нерівність на  $e^{-\frac{\beta R}{2-p}}$  та перейшовши до нижньої границі при  $R \rightarrow \infty$ , приходимо до оцінки (6).  $\square$

**Приклад 1.** Припустимо, що  $1 < p < 2$ ,  $\beta > 0$ ,  $C_0 > 0$  та  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Нехай  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$f(z) = \begin{cases} (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left( \frac{2-p}{C_0 \beta} \right)^{\frac{1}{2-p}} e^{\frac{\beta|z-z_0|}{2-p} \frac{z-z_0}{|z-z_0|}}, & |z-z_0| \geq 1, \\ (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left( \frac{2-p}{C_0 \beta} \right)^{\frac{1}{2-p}} e^{\frac{\beta}{2-p}} (z-z_0), & |z-z_0| < 1. \end{cases} \quad (8)$$

Очевидно, що  $f$  є квазіконформним відображенням та за лемою 2.1 у [32]  $f$  є нижнім  $Q$ -гомеоморфізмом відносно  $p$ -модуля при  $p > 1$  у точці  $z_0$  з функцією  $Q(z) = K_{f,p}^T(z, z_0)$ . Тут  $K_{f,p}^T(z, z_0)$  – дотична  $p$ -дилатація відображення  $f$  у точці  $z$  відносно точки  $z_0$ , що обчислюється за формулою

$$K_{f,p}^T(z, z_0) = \frac{|\partial_T^{z_0} f(z)|^p}{|J_f(z)|},$$

де  $\partial_T^{z_0} f(z)$  – похідна  $f$  у точці  $z$  за дотичним напрямком  $\tau = i \frac{z-z_0}{|z-z_0|}$ , див. [32, (11)].

Дане відображення у полярній системі координат  $(r, \theta)$  має вигляд:

$$f(z_0 + r e^{i\theta}) = \begin{cases} (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left( \frac{2-p}{C_0 \beta} \right)^{\frac{1}{2-p}} e^{\frac{\beta r}{2-p}} e^{i\theta}, & r \geq 1, \\ (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left( \frac{2-p}{C_0 \beta} \right)^{\frac{1}{2-p}} e^{\frac{\beta}{2-p}} r e^{i\theta}, & 0 \leq r < 1. \end{cases}$$

Далі знайдемо частинні похідні відображення  $f$  по  $r$  і  $\theta$ :

$$f_r = \begin{cases} (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} C_0^{-\frac{1}{2-p}} \left( \frac{2-p}{\beta} \right)^{\frac{p-1}{2-p}} e^{\frac{\beta r}{2-p}} e^{i\theta}, & r \geq 1, \\ (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left( \frac{2-p}{C_0 \beta} \right)^{\frac{1}{2-p}} e^{\frac{\beta}{2-p}} e^{i\theta}, & 0 \leq r < 1, \end{cases}$$

$$f_\theta = \begin{cases} i (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left( \frac{2-p}{C_0 \beta} \right)^{\frac{1}{2-p}} e^{\frac{\beta r}{2-p}} e^{i\theta}, & r \geq 1, \\ i (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left( \frac{2-p}{C_0 \beta} \right)^{\frac{1}{2-p}} e^{\frac{\beta}{2-p}} r e^{i\theta}, & 0 \leq r < 1 \end{cases}$$

та якобіан

$$J_f(z_0 + r e^{i\theta}) = \frac{1}{r} \operatorname{Im} (\overline{f_r} f_\theta) = \begin{cases} (2\pi)^{\frac{2(p-1)}{2-p}} C_0^{-\frac{2}{2-p}} \left( \frac{2-p}{\beta} \right)^{\frac{p}{2-p}} r^{-1} e^{\frac{2\beta r}{2-p}}, & r \geq 1, \\ (2\pi)^{\frac{2(p-1)}{2-p}} \left( \frac{2-p}{C_0 \beta} \right)^{\frac{2}{2-p}} e^{\frac{2\beta}{2-p}}, & 0 \leq r < 1, \end{cases}$$

див. [39, (21.52)]. За формулою (10) у [32]

$$\partial_T^{z_0} f(z) = i \cdot \left( \frac{z - z_0}{|z - z_0|} \cdot f_z - \frac{\overline{z - z_0}}{|z - z_0|} \cdot f_{\bar{z}} \right)$$

та формулою (21.51) у [39]

$$f_\theta = i((z - z_0)f_z - \overline{(z - z_0)}f_{\bar{z}})$$

знаходимо

$$K_{f,p}^T(z_0 + r e^{i\theta}, z_0) = \frac{|f_\theta|^p}{r^p J_f(r e^{i\theta})} = \begin{cases} (2\pi)^{1-p} C_0 r^{1-p} e^{-\beta r}, & r \geq 1, \\ (2\pi)^{1-p} C_0 \beta (2-p)^{-1} e^{-\beta}, & 0 \leq r < 1. \end{cases}$$

Звідки випливає, що відображення  $f$  є нижнім  $Q$ -гомеоморфізмом відносно  $p$ -модуля у точці  $z_0$  з функцією

$$Q(z) = \begin{cases} (2\pi)^{1-p} C_0 |z - z_0|^{1-p} e^{-\beta|z-z_0|}, & |z - z_0| \geq 1, \\ (2\pi)^{1-p} C_0 \beta (2-p)^{-1} e^{-\beta}, & |z - z_0| < 1 \end{cases}$$

та

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t) = \left( \int_{S(z_0, t)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z) |dz| \right)^{p-1} = \begin{cases} C_0 e^{-\beta t}, & t \geq 1, \\ C_0 \beta (2-p)^{-1} e^{-\beta} t^{p-1}, & 0 \leq t < 1. \end{cases}$$

Отже, умова (5) теореми 3.1 виконується.

З іншого боку, легко бачити, що гомеоморфізм  $f$  відображає круг  $\overline{B(0, R)}$  на круг  $\overline{B(0, \tilde{R})}$ , де

$$\tilde{R} = \begin{cases} (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left( \frac{2-p}{C_0\beta} \right)^{\frac{1}{2-p}} e^{\frac{\beta R}{2-p}}, & R \geq 1, \\ (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left( \frac{2-p}{C_0\beta} \right)^{\frac{1}{2-p}} e^{\frac{\beta}{2-p}} R, & 0 \leq R < 1, \end{cases}$$

та

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{|z-z_0|=R} |f(z) - f(z_0)| e^{-\frac{\beta R}{2-p}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \tilde{R} e^{-\frac{\beta R}{2-p}} = (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left( \frac{2-p}{C_0\beta} \right)^{\frac{1}{2-p}}.$$

Зуваження 1. Приклад 1 показує, що оцінка (6) у теоремі 3.1 є точною, тобто досягається на відображенні (8).

**Твердження 3.2.** Нехай  $z_0$  – деяка фіксована точка у комплексній площині  $\mathbb{C}$ ,  $\beta > 0$  і  $1 < p < 2$ . Існує нижній  $Q$ -гомеоморфізм  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  відносно  $p$ -модуля у точці  $z_0$ , такий, що

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} M_f(z_0, R) e^{-\frac{\beta R}{2-p}} = 0,$$

де  $M_f(z_0, R) = \max_{|z-z_0|=R} |f(z) - f(z_0)|$ . До того ж

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\beta t} \|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t) = \infty. \quad (9)$$

*Доведення.*

Нехай  $\beta > 0$ ,  $1 < p < 2$ ,  $k > 0$  та  $0 < l < 1$ . Розглянемо відображення

$$f(z) = \begin{cases} k e^{\frac{l\beta|z-z_0|}{2-p}} \frac{z-z_0}{|z-z_0|}, & |z-z_0| \geq 1, \\ k e^{\frac{l\beta}{2-p}} (z-z_0), & |z-z_0| < 1. \end{cases}$$

Гомеоморфізм  $f$  відображає круг  $\overline{B(z_0, R)}$  на круг  $\overline{B(0, \tilde{R})}$ , де

$$\tilde{R} = \begin{cases} k e^{\frac{l\beta R}{2-p}}, & R \geq 1, \\ k e^{\frac{l\beta}{2-p}} R, & R < 1. \end{cases}$$

Легко бачити, що

$$\lim_{R \rightarrow \infty} M_f(z_0, R) e^{-\frac{\beta R}{2-p}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \tilde{R} e^{-\frac{\beta R}{2-p}} = k \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} e^{\frac{(l-1)\beta R}{2-p}} = 0,$$

де  $M_f(z_0, R) = \max_{|z-z_0|=R} |f(z) - f(z_0)|$ .

Аналогічно, як у прикладі 1, можна показати, що відображення  $f$  є нижнім  $Q$ -гомеоморфізмом відносно  $p$ -модуля у точці  $z_0 \in \mathbb{C}$  з функцією

$$Q(z) = \begin{cases} k^{p-2} l^{-1} \beta^{-1} (2-p) |z - z_0|^{1-p} e^{-l\beta|z-z_0|}, & |z - z_0| \geq 1, \\ k^{p-2} e^{-l\beta}, & |z - z_0| < 1. \end{cases}$$

Звідси

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t) = \left( \int_{S(z_0, t)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z) |dz| \right)^{p-1} = \begin{cases} (2\pi)^{p-1} k^{p-2} l^{-1} \beta^{-1} (2-p) e^{-l\beta t}, & t \geq 1, \\ (2\pi)^{p-1} k^{p-2} e^{-l\beta} t^{p-1}, & 0 \leq t < 1. \end{cases}$$

Очевидно, що умова (9) виконується:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\beta t} \|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t) = (2\pi)^{p-1} k^{p-2} l^{-1} \beta^{-1} (2-p) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(1-l)\beta t} = \infty.$$

Таким чином, твердження 3.2 доведено.  $\square$

Нижче наведено теорему про неіснування нижніх  $Q$ -гомеоморфізмів  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  відносно  $p$ -модуля при  $1 < p < 2$ .

**Теорема 3.3.** *Припустимо, що  $z_0$  – деяка фіксована точка в  $\mathbb{C}$ ,  $1 < p < 2$ . Нехай для деяких чисел  $r_0 > 0$ ,  $C_0 = C_0(z_0) > 0$  і  $\beta > 0$  виконується умова*

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t) \leq C_0 e^{-\beta t}$$

для м.в.  $t \in [r_0, \infty)$ . Тоді не існує нижнього  $Q$ -гомеоморфізму  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  відносно  $p$ -модуля в точці  $z_0$  з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} M_f(z_0, R) e^{-\frac{\beta R}{2-p}} = 0, \quad (10)$$

$$\text{де } M_f(z_0, R) = \max_{|z-z_0|=R} |f(z) - f(z_0)|.$$

*Доведення.* Припустимо, що існує нижній  $Q$ -гомеоморфізм  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  відносно  $p$ -модуля в точці  $z_0$ , для якого

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t) \leq C_0 e^{-\beta t}$$

для м.в.  $t \in [r_0, \infty)$  та виконується асимптотична умова (10). Тоді за теоремою 3.1 маємо оцінку

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} M_f(z_0, R) e^{-\frac{\beta R}{2-p}} \geq (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left( \frac{2-p}{C_0 \beta} \right)^{\frac{1}{2-p}} > 0,$$

де  $M_f(z_0, R) = \max_{|z-z_0|=R} |f(z) - f(z_0)|$ , що суперечить асимптотичній умові (10).  $\square$



## Цитована література

1. Väisälä J. Lectures on  $n$ -dimensional quasiconformal mappings. – Lecture Notes in Math. – Vol. 229. – Berlin: Springer-Verlag, 1971.
2. Stefanchuk M.V. On exponential asymptotics of ring  $Q$ -homeomorphisms at infinity // Journal of Mathematical Sciences. – 2024. – Vol. 282, no. 1. – P. 83–92.
3. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Moduli in Modern Mapping Theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
4. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. On ring solutions of Beltrami equation // J. Anal. Math. – 2005. – Vol. 96. – P. 117–150.
5. Salimov R.R., Smolovaya E.S. On the order of growth of ring  $Q$ -homeomorphisms at infinity // Ukrainian Mathematical Journal. – 2010. – Vol. 62, no. 6. – P. 961–969.
6. Golberg A. Differential properties of  $(\alpha, Q)$ -homeomorphisms // Further Progress in Analysis, Proc. 6th ISAAC Congr. – 2009. – P. 218–228.
7. Golberg A., Salimov R. Logarithmic Holder continuity of ring homeomorphisms with controlled  $p$ -module // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2014. – Vol. 59, no. 1. – P. 91–98.
8. Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E. Distortion estimates under mappings with controlled  $p$ -module // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math. – 2014. – Vol. 5 (LXIII). – P. 95–114.
9. Salimov R.R. One property of ring  $Q$ -homeomorphisms with respect to a  $p$ -module // Ukrainian Mathematical Journal. – 2013. – Vol. 65, no. 5. – P. 806–813.
10. Salimov R.R. To a theory of ring  $Q$ -homeomorphisms with respect to a  $p$ -modulus // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – Vol. 196. – P. 679–692.
11. Salimov R., Klishchuk B. An extremal problem for the volume functional // Matematychni Studii. – 2018. – Vol. 50, no. 1. – P. 36–43.
12. Salimov R., Klishchuk B. Lower bounds for the volume of the image of a ball // Ukrainian Mathematical Journal. – 2019. – Vol. 71. – P. 883–895.
13. Salimov R., Klishchuk B. On the asymptotic behavior at infinity of ring  $Q$ -homeomorphisms with respect to  $p$ -modulus // Праці ПИММ НАН України. – 2022. – Т. 36, № 1. – С. 26–35.
14. Salimov R., Klishchuk B. On the Behavior at Infinity of One Class of Homeomorphisms // Current Trends in Analysis, its Applications and Computation. Trends in Mathematics. – 2022. – P. 173–180.
15. Salimov R., Klishchuk B., Stefanchuk M. On the asymptotic behavior at infinity of one mapping class // Proceedings of the International Geometry Center. – 2023. – Vol. 16, no. 1. – P. 50–58.
16. Klishchuk B. On Power-Law Behavior of Some Mapping Class at Infinity // Journal of Mathematical Sciences. – 2022. – Vol. 268, no. 2. – P. 192–198.
17. Salimov R., Klishchuk B. Extremal problem for the area of the image of a disk // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – Vol. 234, no. 3. – P. 373–380.
18. Салимов Р.Р., Клищук Б.А. Экстремальная задача для площади образа круга // Доповіді НАН України. – 2016. – № 10. – С. 22–27.
19. Petkov I.V., Salimov R.R., Stefanchuk M.V. On the distortion of the disk image diameter // Journal of Mathematical Sciences. – 2023. – Vol. 274, no. 3. – P. 352–369.
20. Stefanchuk M.V. On exponential asymptotics of one class of homeomorphisms at a point of the complex plane // Proceedings of the International Geometry Center. – 2024. – Vol. 17, no. 2. – P. 158–170.
21. Cristea M. Local homeomorphisms satisfying generalized modular inequalities // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2014. – Vol. 59, no. 2. – P. 232–246.
22. Cristea M. Some properties of open discrete generalized ring mappings // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2016. – Vol. 61, no. 5. – P. 623–643.
23. Cristea M. Eliminability results for mappings satisfying generalized modular inequalities // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2019. – Vol. 64, no. 4. – P. 676–684.
24. Salimov R.R., Sevost'yanov E.A., Markish A.A. On the lower estimate of the distortion of distance for one class of mappings // Ukrainian Mathematical Journal. – 2019. – Vol. 70. – P. 1791–1802.
25. Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E. Singularities of discrete open mappings with controlled

- $p$ -module // J. Anal. Math. –2015. – Vol. 127. – P. 303–328.
26. Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E. Poletskii type inequality for mappings from the Orlicz–Sobolev classes // Complex Analysis and Operator Theory. – 2016. – Vol. 10. – P. 881–901.
27. Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E. Estimates for Jacobian and dilatation coefficients of open discrete mappings with controlled  $p$ -module // Complex Analysis and Operator Theory. – 2017. – Vol. 11, no. 7. – P. 1521–1542.
28. Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E. Normal families of discrete open mappings with controlled  $p$ -module // Contemporary Mathematics. – 2016. – Vol. 667. – P. 83–103.
29. Sevost'yanov E., Skvortsov S., Dovhopiatyi P. On nonhomeomorphic mappings with the inverse Poletsky inequality // Journal of Mathematical Sciences. – 2021. – Vol. 252, no. 4. – P. 541–557.
30. Sevost'yanov E., Ukhlov A. Sobolev mappings and moduli inequalities on Carnot groups // Journal of Mathematical Sciences. – 2020. – Vol. 249, no. 5. – P. 754–768.
31. Golberg A., Salimov R. Nonlinear Beltrami equation // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2019. – Vol. 65, no. 1. – P. 6–21.
32. Salimov R., Stefanchuk M. Finite Lipschitzness of regular solutions to nonlinear Beltrami equation // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2024. – Vol. 69, no. 6. – P. 913–923.
33. Petkov I., Salimov R., Stefanchuk M. On local Hölder and Lipschitz continuities of solutions to nonlinear Beltrami equation // New Tools in Mathematical Analysis and Applications. Trends in Mathematics. – 2025. – P. 109–119.
34. Ковтонюк Д., Рязанов В. К теории нижних  $Q$ -гомеоморфизмов // Український математичний вісник. – 2008. – Т. 5, № 2. – С. 157–181.
35. Golberg A., Salimov R. Topological mappings of integrally bounded  $p$ -moduli // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math. – 2012. – Vol. 3 (LXI). – P. 49–66.
36. Salimov R.R. The lower  $Q$ -homeomorphisms relative to a  $p$ -modulus // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 218. – P. 47–68.
37. Салимов Р.Р. Об оценке меры образа шара для нижних  $Q$ -гомеоморфизмов // Доповіді НАН України. – 2016. – № 1. – С. 19–25.
38. Стефанчук М.В. Про асимптотичну поведінку на нескінченності нижніх  $Q$ -гомеоморфізмів відносно  $p$ -модуля на комплексній площині // Праці ПІММ НАН України. – 2024. – Т. 38, № 2. – С. 103–118.
39. Astala K., Iwaniec T., Martin G. Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane. – Princeton Mathematical Series. – Princeton: Princeton University Press, NJ, 2009. – 48.
40. Ahlfors L.V. Lectures on quasiconformal mappings. – Van Nostrand Mathematical Studies. – Toronto, Ont.-New York-London: D. Van Nostrand Co., 1966. – Vol. 10.
41. Gehring F.W. Lipschitz mappings and the  $p$ -capacity of ring in  $n$ -space // Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, N.Y., 1969). – Ann. of Math. Studies. – 1971. – Vol. 66. – P. 175–193.
42. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Mappings with finite length distortion // J. Anal. Math. – 2004. – Vol. 93. – P. – 215–236.
43. Gehring F.W. Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – Vol. 103. – P. 353–393.
44. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Degenerate Beltrami equation and radial  $Q$ -homeomorphisms. – Helsinki: University of Helsinki, 2003. – Vol. 369. – (Preprint / Department of Mathematics, University of Helsinki).
45. Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E. Poletskii Type Inequality for Mappings from the Orlicz–Sobolev Classes // Complex Analysis and Operator Theory. – 2016. – Vol. 10. – P. 881–901.
46. Ryazanov V., Salimov R., Srebro U., Yakubov E. On Boundary Value Problems for the Beltrami Equations // Contemporary Mathematics. – 2013. – Vol. 591. – P. 211–242.
47. Salimov R. On regular homeomorphisms in the plane // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 2010. – Vol. 35. – P. 285–289.
48. Afanas'eva E.S., Ryazanov V.I., Salimov R.R. To the theory of mappings of the Sobolev class with the critical index // Journal of Mathematical Sciences. – 2019. – Vol. 239. – P. 1–16.

49. Афанасьева Е.С., Рязанов В.И., Салимов Р.Р. К теории классов Соболева с критическим показателем // Доповіді НАН України. – 2019. – № 8. – С. 3–8.
50. Афанасьева Е.С., Салимов Р.Р. Асимптотическое поведение на бесконечности решений уравнения Бельтрами // Збірник праць Інституту математики НАНУ. – 2015. – Т. 12, № 3. – С. 9–16.
51. Ryazanov V.I., Salimov R.R., Sevost'yanov E.A. On the Orlicz-Sobolev Classes and Mappings with Bounded Dirichlet Integral // Ukrainian Mathematical Journal. – 2014. – Vol. 65. – P. 1394–1405.
52. Ryazanov V.I., Salimov R.R., Sevost'yanov E.A. Normality of the Orlicz-Sobolev Classes // Ukrainian Mathematical Journal. – 2016. – Vol. 68. – P. 115–126.
53. Салимов Р.Р. Асимптотическое поведение классов Орлича-Соболева на бесконечности // Збірник праць Інституту математики НАНУ. – 2015. – Т. 12, № 4. – С. 273–284.
54. Салимов Р.Р. О новом условии конечной липшицевости классов Орлича-Соболева // Математичні Студії. – 2015. – Т. 44, № 1. – С. 27–35.
55. Salimov R.R. Metric Properties of Orlicz-Sobolev Classes // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 220. – P. 633–642.
56. Golberg A. Integrally quasiconformal mappings in space // Збірник праць Інституту математики НАНУ. – 2010. – Т. 7, № 2. – С. 53–64.
57. Kruglikov V.I. Capacity of condensers and spatial mappings quasiconformal in the mean // Mathematics of the USSR-Sbornik. – 1987. – Vol. 58, no. 1. – P. 185–205.

## References

1. Väisälä, J. (1971). *Lectures on  $n$ -dimensional quasiconformal mappings*. Lecture Notes in Math. Berlin: Springer-Verlag, 229.
2. Stefanchuk M.V. (2024). On exponential asymptotics of ring  $Q$ -homeomorphisms at infinity. *Journal of Mathematical Sciences*, 282(1), 83–92.
3. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2009). *Moduli in Modern Mapping Theory*. New York: Springer Science + Business Media, LLC.
4. Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2005). On ring solutions of Beltrami equation. *J. Anal. Math.*, 96, 117–150.
5. Salimov, R.R., Smolovaya, E.S. (2010). On the order of growth of ring  $Q$ -homeomorphisms at infinity. *Ukrainian Mathematical Journal*, 62(6), 961–969.
6. Golberg, A. (2009). Differential properties of  $(\alpha, Q)$ -homeomorphisms. *Further Progress in Analysis, Proc. 6th ISAAC Congr.*, 218–228.
7. Golberg, A., Salimov, R. (2014). Logarithmic Holder continuity of ring homeomorphisms with controlled  $p$ -module. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 59(1), 91–98.
8. Golberg, A., Salimov, R., Sevost'yanov, E. (2014). Distortion estimates under mappings with controlled  $p$ -module. *Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math.*, 5 (LXIII), 95–114.
9. Salimov, R.R. (2013). One property of ring  $Q$ -homeomorphisms with respect to a  $p$ -module. *Ukrainian Mathematical Journal*, 65(5), 806–813.
10. Salimov, R.R. (2014). To a theory of ring  $Q$ -homeomorphisms with respect to a  $p$ -modulus. *Journal of Mathematical Sciences*, 196, 679–692.
11. Salimov, R., Klishchuk, B. (2018). An extremal problem for the volume functional. *Matematychni Studii*, 50(1), 36–43.
12. Salimov, R., Klishchuk, B. (2019). Lower bounds for the volume of the image of a ball. *Ukrainian Mathematical Journal*, 71, 883–895.
13. Salimov, R., Klishchuk, B. (2022). On the asymptotic behavior at infinity of ring  $Q$ -homeomorphisms with respect to  $p$ -modulus. *Proceedings of IAMM of NASU*, 36(1), 26–35.
14. Salimov, R., Klishchuk, B. (2022). On the Behavior at Infinity of One Class of Homeomorphisms. *Current Trends in Analysis, its Applications and Computation. Trends in Mathematics*, 173–180.
15. Salimov, R., Klishchuk, B., Stefanchuk, M. (2023). On the asymptotic behavior at infinity of one mapping class. *Proceedings of the International Geometry Center*, 16(1), 50–58.
16. Klishchuk, B. (2022). On Power-Law Behavior of Some Mapping Class at Infinity. *Journal of*

- Mathematical Sciences*, 268(2), 192–198.
17. Salimov, R., Klishchuk, B. (2018). Extremal problem for the area of the image of a disk. *Journal of Mathematical Sciences*, 234(3), 373–380.
18. Salimov, R.R., Klishchuk, B.A. (2016). The extremal problem for the area of an image of a disc. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, (10), 22–27 (in Russian).
19. Petkov, I.V., Salimov, R.R., Stefanchuk, M.V. (2023). On the distortion of the disk image diameter. *Journal of Mathematical Sciences*, 274(3), 352–369.
20. Stefanchuk, M.V. (2024). On exponential asymptotics of one class of homeomorphisms at a point of the complex plane. *Proceedings of the International Geometry Center*, 17(2), 158–170.
21. Cristea, M. (2014). Local homeomorphisms satisfying generalized modular inequalities. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 59(2), 232–246.
22. Cristea, M. (2016). Some properties of open discrete generalized ring mappings. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 61(5), 623–643.
23. Cristea, M. (2019). Eliminability results for mappings satisfying generalized modular inequalities. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 64(4), 676–684.
24. Salimov, R.R., Sevost'yanov, E.A., Markish, A.A. (2019). On the lower estimate of the distortion of distance for one class of mappings. *Ukrainian Mathematical Journal*, 70, 1791–1802.
25. Golberg, A., Salimov, R., Sevost'yanov, E. (2015). Singularities of discrete open mappings with controlled  $p$ -module. *J. Anal. Math.*, 127, 303–328.
26. Golberg, A., Salimov, R., Sevost'yanov, E. (2016). Poletskii type inequality for mappings from the Orlicz-Sobolev classes. *Complex Analysis and Operator Theory*, 10, 881–901.
27. Golberg, A., Salimov, R., Sevost'yanov, E. (2017). Estimates for Jacobian and dilatation coefficients of open discrete mappings with controlled  $p$ -module. *Complex Analysis and Operator Theory*, 11(7), 1521–1542.
28. Golberg, A., Salimov, R., Sevost'yanov, E. (2016). Normal families of discrete open mappings with controlled  $p$ -module. *Contemporary Mathematics*, 667, 83–103.
29. Sevost'yanov, E., Skvortsov, S., Dovhopiatyi, P. (2021). On nonhomeomorphic mappings with the inverse Poletsky inequality. *Journal of Mathematical Sciences*, 252(4), 541–557.
30. Sevost'yanov, E., Ukhlov, A. (2020). Sobolev mappings and moduli inequalities on Carnot groups. *Journal of Mathematical Sciences*, 249(5), 754–768.
31. Golberg, A., Salimov, R. (2019). Nonlinear Beltrami equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 65(1), 6–21.
32. Salimov, R., Stefanchuk, M. (2024). Finite Lipschitzness of regular solutions to nonlinear Beltrami equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 69(6), 913–923.
33. Petkov, I., Salimov, R., Stefanchuk, M. (2025). On local Hölder and Lipschitz continuities of solutions to nonlinear Beltrami equation. *New Tools in Mathematical Analysis and Applications. Trends in Mathematics*, 109–119.
34. Kovtonyuk, D., Ryazanov, V. (2008). To the theory of lower  $Q$ -homeomorphisms. *Ukrainian Mathematical Bulletin*, 5(2), 157–181 (in Russian).
35. Golberg, A., Salimov, R. (2012). Topological mappings of integrally bounded  $p$ -moduli. *Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math.*, 3 (LXI), 49–66.
36. Salimov, R.R. (2016). The lower  $Q$ -homeomorphisms relative to a  $p$ -modulus. *Journal of Mathematical Sciences*, 218, 47–68.
37. Salimov, R.R. (2016). On estimation of the measure of the image of a ball under lower  $Q$ -homeomorphisms. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, (1), 19–25 (in Russian).
38. Stefanchuk, M.V. (2024). On asymptotic behavior at infinity of lower  $Q$ -homeomorphisms with respect to  $p$ -modulus on the complex plane. *Proceedings of IAMM of NASU*, 38(2), 103–118.
39. Astala, K., Iwaniec, T., Martin, G. (2009). *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane*. Princeton Mathematical Series. Princeton: Princeton University Press, NJ, 48.
40. Ahlfors, L.V. (1966). *Lectures on quasiconformal mappings*. Van Nostrand Mathematical Studies. Toronto, Ont.-New York-London: D. Van Nostrand Co., 10.
41. Gehring, F.W. (1971). Lipschitz mappings and the  $p$ -capacity of ring in  $n$ -space. *Advances in the*

- theory of Riemann surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, N.Y., 1969). *Ann. of Math. Studies*, 66, 175–193.
42. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2004). Mappings with finite length distortion. *J. Anal. Math.*, 93, 215–236.
  43. Gehring, F.W. (1962). Rings and quasiconformal mappings in space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 103, 353–393.
  44. Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2003). *Degenerate Beltrami equation and radial  $Q$ -homeomorphisms*. Preprint, Department of Mathematics, University of Helsinki, 369.
  45. Golberg, A., Salimov, R., Sevost'yanov, E. (2016). Poletskii Type Inequality for Mappings from the Orlicz-Sobolev Classes. *Complex Analysis and Operator Theory*, 10, 881–901.
  46. Ryazanov, V., Salimov, R., Srebro, U., Yakubov, E. (2013). On Boundary Value Problems for the Beltrami Equations. *Contemporary Mathematics*, 591, 211–242.
  47. Salimov, R. (2010). On regular homeomorphisms in the plane. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math.*, 35, 285–289.
  48. Afanas'eva, E.S., Ryazanov, V.I., Salimov, R.R. (2019). To the theory of mappings of the Sobolev class with the critical index. *Journal of Mathematical Sciences*, 239, 1–16.
  49. Afanas'eva, O.S., Ryazanov, V.I., Salimov, R.R. (2019). Toward the theory of the Sobolev classes with critical exponent. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, (8), 3–8 (in Russian).
  50. Afanas'eva, O.S., Salimov, R.R. (2015). The asymptotic behaviour of solutions of the Beltrami equation. *Transactions of Institute of Mathematics, the NAS of Ukraine*, 12(3), 9–16 (in Russian).
  51. Ryazanov, V.I., Salimov, R.R., Sevost'yanov, E.A. (2014). On the Orlicz-Sobolev Classes and Mappings with Bounded Dirichlet Integral. *Ukrainian Mathematical Journal*, 65, 1394–1405.
  52. Ryazanov, V.I., Salimov, R.R., Sevost'yanov, E.A. (2016). Normality of the Orlicz-Sobolev Classes. *Ukrainian Mathematical Journal*, 68, 115–126.
  53. Salimov, R.R. (2015). Asymptotic behavior of the Orlicz-Sobolev classes at infinity. *Transactions of Institute of Mathematics, the NAS of Ukraine*, 12(4), 273–284 (in Russian).
  54. Salimov, R.R. (2015). On a new condition of finite Lipschitz of Orlicz-Sobolev class. *Matematychni Studii*, 44(1), 27–35 (in Russian).
  55. Salimov, R.R. (2017). Metric Properties of Orlicz-Sobolev Classes. *Journal of Mathematical Sciences*, 220, 633–642.
  56. Golberg, A. (2010). Integrally quasiconformal mappings in space. *Transactions of Institute of Mathematics, the NAS of Ukraine*, 7(2), 53–64.
  57. Kruglikov, V.I. (1987). Capacity of condensers and spatial mappings quasiconformal in the mean. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 58(1), 185–205.

**M.V. Stefanchuk**

**On exponential asymptotics at infinity of lower  $Q$ -homeomorphisms on the complex plane.**

The definition of a  $Q$ -homeomorphism with respect to  $p$ -modulus is a natural generalization of the geometric definition of a quasiconformal mapping: if  $Q(z) \leq K < \infty$  a.e. (almost everywhere), then  $f$  is quasiconformal as  $p = 2$  on the complex plane  $\mathbb{C}$ , see Definition A, p. 21–22 in [40],  $f$  has local Lipschitz property as  $1 < p < 2$ , and  $f^{-1}$  is local Lipschitz continuous as  $p > 2$ , moreover the bounds for  $p$  are sharp, see [41]. The class of  $Q$ -homeomorphisms with respect to  $p$ -modulus as  $p = 2$  was first considered in the work [42]. The definition of a ring  $Q$ -homeomorphism with respect to  $p$ -modulus generalizes and localizes the definition of a  $Q$ -homeomorphism with respect to  $p$ -modulus and is motivated by the ring definition of quasiconformal mappings in the sense of Gehring, see [43], introduced originally by V. Ryazanov, U. Srebro, and E. Yakubov on the complex plane as  $p = 2$ , see [44]. The concept of lower  $Q$ -homeomorphisms with respect to  $p$ -modulus has also proven to be a

very useful tool for studying planar and spatial mappings. This definition has also geometric character and is motivated by Gehring's ring definition of quasiconformity. The theory of lower and ring  $Q$ -homeomorphisms is applied in the study of boundary value problems for Beltrami equations on the complex plane, as well as spatial homeomorphisms of Sobolev classes and more general Orlicz-Sobolev classes, see [45–55]. The theory of lower and ring  $Q$ -homeomorphisms with respect to  $p$ -modulus can also be applied to mappings that are quasiconformal in the mean, see [56, 57]. Recently, lower and ring  $Q$ -homeomorphisms with respect to nonconformal modulus have been applied to studying the properties of regular solutions of nonlinear Beltrami equations, see [31–33]. Furthermore, the theory of ring  $Q$ -homeomorphisms can be applied to the study of mappings with finite distortion that belong to Orlicz-Sobolev classes  $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$  under a Calderon-type condition, and, in particular, to Sobolev classes  $W_{\text{loc}}^{1,p}$  as  $p > n - 1$ , див. [8]. In the paper, asymptotic behavior at infinity of lower  $Q$ -homeomorphisms with respect to the  $p$ -module as  $1 < p < 2$  in the complex plane has been investigated. A sufficient condition on the norm of the function  $Q$  under which the mapping exhibits exponential growth at infinity has been found. An example to demonstrate the sharpness of the obtained results has been constructed.

**Keywords:**  $p$ -modulus of a family of curves, ring  $Q$ -homeomorphisms with respect to  $p$ -modulus, lower  $Q$ -homeomorphisms with respect to  $p$ -modulus, asymptotic behavior at infinity.

Ін-т математики НАН України, Київ  
 stefanmv43@gmail.com

Отримано 02.06.25