

УДК 517.9

DOI: 10.37069/1683-4720-2025-39-6

©2025. С.М. Чуйко, О.С. Чуйко, Д.Д. Д'яченко

МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦІЇ АДОМЯНА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОЇ ПЕРІОДИЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ У ВИПАДКУ ПАРАМЕТРИЧНОГО РЕЗОНАНСУ

Отримано конструктивні умови розв'язності нелінійної періодичної крайової задачі для звичайного диференціального рівняння у випадку параметричного резонансу. Дослідження періодичних крайових задач у випадку параметричного резонансу пов'язані з численними застосуваннями в електроніці, теорії плазми, нелінійній оптиці, механіці, теорії стійкості руху, біології та радіотехніці, теорії нелінійних коливань, для пошуку корисних копалин і верстатобудуванні. Специфіка вивчення крайових задач у випадку параметричного резонансу полягає у необхідності знаходження, як розв'язку цієї задачі, так і невідомої власної функції, яка забезпечує розв'язність задачі. Для нелінійної періодичної крайової задачі у випадку параметричного резонансу отримано необхідні та достатні умови існування та схему побудови розв'язків з використанням методу декомпозиції Адомяна. Використовувана класифікація нетерових крайових задач у випадку параметричного резонансу в залежності від простоти або кратності рівняння для породжуючих амплітуд суттєво відрізняється від аналогічної класифікації періодичних задач в випадку параметричного резонансу, досліджених Л.І. Мандельштамом, М.Д. Папалексі, В.А. Якубовичем та В.М. Старжинським і відповідає загальній класифікації періодичних і нетерових крайових задач, ґрунтовно вивчених М.М.Криловим, М.М.Боголюбовим, А. Пуанкаре, О.М. Ляпуновим, А.М. Самойленком, Є.О. Гребеніковим, Ю.О. Рябовим та О.А. Бойчуком. Для побудови розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі для звичайного диференціального рівняння у випадку параметричного резонансу побудовано ітераційну схему з використанням методу декомпозиції Адомяна та встановлено умови її збіжності до шуканого розв'язку. Ефективність отриманої схеми побудови розв'язків нелінійної періодичної крайової задачі для звичайного диференціального рівняння у випадку параметричного резонансу продемонстровано на прикладі задачі про знаходження періодичних розв'язків і власної функції рівняння Мат'є.

MSC: 34N05.

Ключові слова: метод декомпозиції Адомяна, нелінійна періодична крайова задача, параметричний резонанс.

1. Постановка задачі.

Досліджуємо задачу про побудову розв'язку [1–3]

$$z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad z(t, \cdot), \quad h(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

нелінійної періодичної крайової задачі

$$dz/dt = Az + f(t) + \varepsilon Z(z, h(\varepsilon), t, \varepsilon), \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) := z(a, \varepsilon) - z(b, \varepsilon) = 0 \quad (1)$$

у малому околі розв'язку

$$z_0(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$$

породжуючої задачі

$$dz_0/dt = Az_0 + f(t), \quad \ell z_0(\cdot) := z_0(a) - z_0(b) = 0. \quad (2)$$

Тут A – стала $(n \times n)$ -вимірна матриця, $Z(z, t, h(\varepsilon), \varepsilon)$ – нелінійна вектор-функція, аналітична за невідомою z у малому околі розв'язку породжуючої задачі (2), неперервно диференційовна за невідомою $h(\varepsilon)$ у малому околі константи $h_0 := h(0)$ та неперервна по малому параметру ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. Крім того, вектор-функція $Z(z, t, \varepsilon)$ та функція $f(t)$ неперервна по незалежній змінній t на відрізку $[a, b]$. Дослідження періодичних задач у випадку параметричного резонансу пов'язане з численними застосуваннями в електроніці [4], теорії плазми, нелінійній оптиці, механіці, теорії стійкості руху [2, 5], біології, теорії нелінійних коливань і верстато-будуванні [6]. Вивчення періодичних задач у випадку параметричного резонансу традиційно було пов'язано з дослідженням насамперед питань стійкості [2, 4]. У статті [3] нами були отримані конструктивні умови розв'язності та схему побудови розв'язків нелінійної крайової задачі для звичайного диференціального рівняння у випадку параметричного резонансу з використанням методу простих ітерацій. При побудові розв'язків нелінійних крайових задач виникає проблема неможливості знаходження розв'язків в елементарних функціях, яка, у свою чергу, приводить до великих похибок розв'язків нелінійних крайових задач. Подібна проблема була продемонстрована для періодичної задачі для рівняння, яке визначає рух супутника на еліптичній орбіті [7]. Крім того, побудова розв'язків нелінійних крайових задач з використанням методу простих ітерацій [1] значно ускладнюється обчисленням похідних нелінійностей. У статті [8] прискорення збіжності ітерацій досягнуто обчисленням похідних нелінійностей на кожному кроці. Враховуючи зазначене, спрощення обчислень похідних нелінійностей та можливість знаходження розв'язків нелінійних крайових задач, зокрема, періодичних крайових задач у випадку параметричного резонансу, в елементарних функціях можуть бути досягнуті з використанням методу декомпозиції Адомяна [9].

2. Необхідна умова розв'язності.

Досліджуємо критичний випадок

$$P_{Q^*} \neq 0,$$

причому припускаємо виконаною наступну умову

$$P_{Q_r^*} \ell K \left[f(s) \right] (\cdot) = 0; \quad (3)$$

у цьому випадку породжуюча задача (2) має сім'ю розв'язків [1]

$$z_0(t, c_0) = X_r(t)c_r + G \left[f(s); \alpha \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $X(t)$ – нормальна ($X(a) = I_n$) фундаментальна матриця однорідної частини породжуючої системи,

$$X_r(t) := X(t)P_{Q_r},$$

$P_{Q_r} - (n \times r)$ – вимірна матриця, утворена з r – лінійно-незалежних стовпців матриці-ортопроектора

$$P_Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(Q), \quad Q := \ell X(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$P_{Q_r^*} - (r \times n)$ – матриця, утворена з r лінійно-незалежних рядків $(n \times n)$ – матриці-ортопроектора

$$P_{Q^*} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}(Q^*),$$

крім того

$$G[f(s); \alpha](t) = X(t)Q^+ \left\{ \alpha - \ell K[f(s)](\cdot) \right\} + K[f(s)](t)$$

— узагальнений оператор Гріна породжуючої крайової задачі,

$$K[f(s)](t) = X(t) \int_a^t X^{-1}(s) f(s) ds$$

– оператор Гріна задачі Коші породжуючої системи, Q^+ – псевдообернена матриця за Муром-Пенроузом [1]. Розв’язок крайової задачі (1)

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), \quad h(\varepsilon) = h_0 + \zeta(\varepsilon)$$

шукаємо в околі розв’язку породжуючої задачі. Для знаходження збурення

$$x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad x(t, \cdot), \quad \zeta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

породжуючого розв’язку $z_0(t, c_r)$. h_0 отримуємо задачу

$$dx/dt = A z + \varepsilon Z(z, h_0 + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon), \quad \ell x(\cdot, \varepsilon) := x(a, \varepsilon) - x(b, \varepsilon) = 0. \quad (4)$$

Позначимо вектори

$$\check{c} := \begin{pmatrix} c_r \\ h_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r+1}, \quad \check{c}_0 := \begin{pmatrix} c_r^* \\ h_0^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r+1}.$$

Необхідна і достатня умова розв’язності задачі (1)

$$P_{Q_r^*} \ell K \left[Z(z_0(s, c_0) + x(s, \varepsilon), h_0 + \zeta(\varepsilon), s, \varepsilon) \right](\cdot) = 0$$

приводить до необхідної умови розв’язності задачі (1) у малому околі розв’язку породжуючої періодичної задачі (2):

$$F_0(\check{c}_0) := P_{Q_r^*} \ell K \left[Z(z_0(s, c_r^*), h_0^*, s, 0) \right](\cdot) = 0. \quad (5)$$

Рівняння (5) будемо далі називати рівнянням для породжуючих амплітуд періодичної задачі (1) у випадку параметричного резонансу. Припустимо, що рівняння для породжуючих амплітуд має дійсні корені. Фіксуємо один із дійсних розв'язків $\check{c}_0$ рівняння (5), приходимо до задачі про побудову розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1) у малому околі розв'язку

$$z_0(t, c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G \left[f(s) \right] (t)$$

породжуючої задачі (2) та власної функції $h(\varepsilon)$ у малому околі точки $h_0^* \in \mathbb{R}^1$.

3. Достатня умова розв'язності.

Традиційною умовою розв'язності періодичної задачі (1) є вимога [1, 3]

$$P_{D_0^*} P_{Q_r^*} = 0, \quad (6)$$

зокрема, умова повноти рангу матриці

$$D_0 := F_0'(\check{c}_0) \in \mathbb{R}^{r \times (r+1)};$$

тут

$$P_{D_0^*} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{N}(D_0^*)$$

– матриця-ортопроектор [1]. Розв'язок періодичної крайової задачі (1) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} z(t, \varepsilon) &:= z_0(t, c_r^*) + u_1(t, \varepsilon) + \dots + u_k(t, \varepsilon) + \dots, \\ h(\varepsilon) &:= h_0^* + v_1(\varepsilon) + \dots + v_k(\varepsilon) + \dots. \end{aligned}$$

Нелінійна вектор-функція $Z(z, t, \varepsilon)$ аналітична за невідомою z в околі розв'язку породжуючої задачі (2) та неперервна по малому параметру ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$, тому у зазначеному околі має місце розклад [9, с. 502]

$$\begin{aligned} Z(z(t, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon) &= A_0(z_0(t, c_r^*), h_0^*) + A_1(z_0(t, c_r^*), h_0^*, u_1(t, \varepsilon), v_1(\varepsilon), \varepsilon) + \quad (7) \\ &+ A_2(z_0(t, c_r^*), h_0^*, u_1(t, \varepsilon), v_1(\varepsilon), u_2(t, \varepsilon), v_2(\varepsilon), \varepsilon) + \dots + \\ &+ A_n(z_0(t, c_r^*), h_0^*, u_1(t, \varepsilon), v_1(\varepsilon), u_2(t, \varepsilon), v_2(\varepsilon), \dots, u_n(t, \varepsilon), v_n(\varepsilon), \varepsilon) + \dots. \end{aligned}$$

Розклади багатьох нелінійних функцій та формули для їх обчислення наведені у статтях [9–11]. Нелінійна вектор-функція $Z(z, t, \varepsilon)$ неперервна по малому параметру ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$, тому у зазначеному околі має місце рівність [9, с. 502]

$$Z(z(t, c_r^*), h(0), t, 0) = A_0(z_0(t, c_r^*), h_0^*),$$

отже вигляд ключової у дослідженні періодичної задачі (1) матриці D_0 при використанні розкладу Адомяна збігається з традиційним [3]

$$D_0 := P_{Q_r^*} \ell K \left[\mathcal{A}_1(s) X_r(s); \mathcal{A}_2(s) \right] (\cdot);$$

тут

$$\mathcal{A}_1(t) = \frac{\partial Z(z, h, t, \varepsilon)}{\partial z} \left| \begin{array}{l} z = z_0(t, c_r^*), \\ h = h_0^*, \\ \varepsilon = 0, \end{array} \right. \quad \mathcal{A}_2(t) = \frac{\partial Z(z, h, t, \varepsilon)}{\partial h} \left| \begin{array}{l} z = z_0(t, c_r^*), \\ h = h_0^*, \\ \varepsilon = 0. \end{array} \right.$$

Позначимо вектори

$$\check{c}_k(\varepsilon) := \begin{pmatrix} c_k(\varepsilon) \\ v_k(\varepsilon) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r+1}, \quad c_k(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Перше наближення до розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1) у випадку параметричного резонансу

$$z_1(t, \varepsilon) := z_0(t, c_r^*) + u_1(t, \varepsilon), \quad u_1(t, \varepsilon) = X_r(t)c_1(\varepsilon) + \varepsilon G \left[A_0(z_0(s, c_r^*), h_0^*) \right](t)$$

та власної функції

$$h_1(\varepsilon) := h_0^* + v_1(\varepsilon)$$

у випадку параметричного резонансу визначає розв'язок нелінійної періодичної крайової задачі першого наближення

$$\frac{du_1(t, \varepsilon)}{dt} = A u_1(t, \varepsilon) + \varepsilon A_0(z_0(t, c_r^*), \varepsilon), \quad u_1(a, \varepsilon) - u_1(b, \varepsilon) = 0.$$

Періодичність розв'язку крайової задачі першого наближення гарантована вибором розв'язку $\check{c}_0$ рівняння (5). Друге наближення до розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1) у випадку параметричного резонансу

$$z_2(t, \varepsilon) := z_0(t, c_r^*) + u_1(t, \varepsilon) + u_2(t, \varepsilon)$$

та власної функції

$$h_2(\varepsilon) := h_0^* + v_1(\varepsilon) + v_2(\varepsilon)$$

визначає розв'язок

$$u_2(t, \varepsilon) = X_r(t)c_2(\varepsilon) + G \left[A_1(z_0(s, c_r^*), h_0^*, u_1(s, \varepsilon), v_1(\varepsilon)) \right](t), \quad c_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}^r$$

нелінійної періодичної крайової задачі другого наближення

$$\frac{du_2(t, \varepsilon)}{dt} = A u_2(t, \varepsilon) + A_1(z_0(t, c_r^*), h_0^*, u_1(t, \varepsilon), v_1(\varepsilon)), \quad u_2(a, \varepsilon) - u_2(b, \varepsilon) = 0.$$

Умова розв'язності крайової задачі другого наближення

$$P_{Q_r^*} \ell K \left[A_1(z_0(s, c_r^*), h_0^*, u_1(s, \varepsilon), v_1(\varepsilon)) \right] (\cdot) = 0$$

являє собою лінійне рівняння

$$D_0 \check{c}_1(\varepsilon) + \varepsilon P_{Q_r^*} \ell K \left[\mathcal{A}_1(s) G \left[A_0(z_0(\tau, c_r^*), h_0^*) \right] (s); \mathcal{A}_2(s) \right] (\cdot) = 0, \quad (8)$$

розв'язне у випадку (6), зокрема, за умови повноти рангу матриці D_0 . Дійсно, позначимо вектор-функцію [12]

$$\xi(t, \varepsilon, \mu) := z_0(t, c_r^*) + \mu u_1(t, \varepsilon) + \dots + \mu^k u_k(t, \varepsilon) + \dots,$$

та функцію

$$\zeta(\varepsilon, \mu) := h_0^* + \mu v_1(\varepsilon) + \dots + \mu^k v_k(\varepsilon) + \dots;$$

при цьому умова розв'язності крайової задачі другого наближення набуває вигляду

$$\begin{aligned} & P_{Q_r^*} \ell K \left[A_1(z_0(s, c_r^*), h_0^*, u_1(s, \varepsilon), v_1(\varepsilon)) \right] (\cdot) = \\ & = P_{Q_r^*} \ell K \left[Z'_\mu(\xi(s, \varepsilon, \mu), \zeta(\varepsilon, \mu), s, \varepsilon) \right] (\cdot) \Big|_{\mu=0} = \\ & = P_{Q_r^*} \ell K \left[\mathcal{A}_1(s) u_1(s, \varepsilon); \mathcal{A}_2(s) v_1(\varepsilon) \right] (\cdot) = \\ & = D_0 \check{c}_1(\varepsilon) + \varepsilon P_{Q_r^*} \ell K \left[\mathcal{A}_1(t) G \left[A_0(z_0(s, c_r^*), h_0^*) \right] (t) \right] (\cdot). \end{aligned}$$

У випадку (6) лінійне рівняння (8) розв'язне. Таким чином, за умови (6) отримуємо розв'язок крайової задачі першого наближення

$$u_1(t, \varepsilon) = X_r(t) c_1(\varepsilon) + \varepsilon G \left[A_0(z_0(s, c_r^*), h_0^*) \right] (t);$$

тут

$$\check{c}_1(\varepsilon) = -\varepsilon D_0^+ P_{Q_r^*} \ell K \left[\mathcal{A}_1(t) G \left[A_0(z_0(s, c_r^*), h_0^*) \right] (t) \right] (\cdot).$$

Умови розв'язності крайових задач наступних наближень

$$P_{Q_r^*} \ell K \left[A_k(z_0(s, c_r^*), h_0^*, u_1(s, \varepsilon), v_1(\varepsilon), \dots, u_k(s, \varepsilon), v_k(\varepsilon)) \right] (\cdot) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

являють собою лінійні рівняння

$$D_0 \check{c}_k(\varepsilon) + \varepsilon P_{Q_r^*} \ell K \left[\mathcal{A}_1(t) \times \right. \quad (9)$$

$$\left. \times G \left[A_k(z_0(s, c_r^*), h_0^*, u_1(s, \varepsilon), v_1(\varepsilon), \dots, u_k(s, \varepsilon), v_k(\varepsilon)) \right] (t) \right] (\cdot) = 0,$$

розв'язні у випадку (6), зокрема, за умови повноти рангу матриці D_0 . Дійсно,

$$\begin{aligned} P_{Q_r^*} \ell K \left[A_k(z_0(s, c_r^*), h_0^*, u_1(s, \varepsilon), v_1(\varepsilon), \dots, u_k(s, \varepsilon), v_k(\varepsilon), \varepsilon) \right] (\cdot) = \\ = \frac{1}{k!} P_{Q_r^*} \ell K \left[Z_{\mu^k}^{(k)}(\xi(s, \varepsilon, \mu), \zeta(\varepsilon, \mu), s, \varepsilon) \right] (\cdot) \Big|_{\mu=0} = \\ = P_{Q_r^*} \ell K \left[\mathcal{A}_1(s) u_k(s, \varepsilon); \mathcal{A}_2(s) v_k(\varepsilon) \right] (\cdot) = D_0 \check{c}_1(\varepsilon) + \\ + \varepsilon P_{Q_r^*} \ell K \left[\mathcal{A}_1(t) G \left[A_k(z_0(s, c_r^*), h_0^*, u_1(s, \varepsilon), v_1(\varepsilon), \dots, u_k(s, \varepsilon), v_k(\varepsilon)) \right] (t) \right] (\cdot). \end{aligned}$$

Послідовність наближень до розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1) у випадку параметричного резонансу визначає ітераційна схема

$$\begin{aligned} z_1(t, \varepsilon) = z_0(t, c_r^*) + u_1(t, \varepsilon), \quad u_1(t, \varepsilon) = X_r(t) c_1(\varepsilon) + \varepsilon G \left[A_0(z_0(s, c_r^*), h_0^*) \right] (t), \\ \check{c}_1(\varepsilon) = -\varepsilon D_0^+ P_{Q_r^*} \ell K \left[\mathcal{A}_1(t) G \left[A_0(z_0(s, c_r^*), h_0^*) \right] (t) \right] (\cdot), \dots, \check{c}_k(\varepsilon) = -\varepsilon D_0^+ P_{Q_r^*} \times \\ \times \ell K \left[\mathcal{A}_1(t) G \left[A_k(z_0(s, c_r^*), h_0^*, u_1(s, \varepsilon), v_1(\varepsilon), \dots, u_k(s, \varepsilon), v_k(\varepsilon)) \right] (t) \right] (\cdot), \\ z_{k+1}(t, \varepsilon) := z_0(t, c_r^*) + u_1(t, \varepsilon) + \dots + u_{k+1}(t, \varepsilon), \quad (10) \\ h_{k+1}(\varepsilon) := h_0^* + v_1(\varepsilon) + \dots + v_{k+1}(\varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$u_{k+1}(t, \varepsilon) = X_r(t) c_{k+1}(\varepsilon) + G \left[A_k(z_0(s, c_r^*), h_0^*, u_1(s, \varepsilon), v_1(\varepsilon), \dots, u_k(s, \varepsilon), v_k(\varepsilon), \varepsilon) \right] (t).$$

Проміжок значень малого параметру $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$, $0 \leq \varepsilon_* \leq \varepsilon_0$, для яких зберігається збіжність ітераційної схеми (10) до розв'язку періодичної крайової задачі (1), (2) у випадку параметричного резонансу можна оцінити аналогічно [11, 13]. Позначимо вектори

$$\check{z}_k(t, \varepsilon) := \begin{pmatrix} u_k(t, \varepsilon) \\ v_k(\varepsilon) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \check{z}_0(t, \varepsilon) := \begin{pmatrix} z_0(t, c_r^*) \\ h_0^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема. У критичному випадку ($\det Q = 0$) породжуюча періодична крайова задача (2) за умови (3) має r -параметричну сім'ю розв'язків

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G \left[f(s) \right] (t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Якщо при цьому задача про побудову розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1) у випадку параметричного резонансу в малому околі розв'язку породжуючої задачі (2) у критичному випадку розв'язна, то рівняння для породжуючих амплітуд (5) нелінійної періодичної крайової задачі (1) у випадку параметричного резонансу має дійсні корені. За умови (6) послідовність наближень до розв'язку

$$z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b], \quad z(t, \cdot), \quad h(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_*], \quad 0 \leq \varepsilon_* \leq \varepsilon_0$$

періодичної крайової задачі (1) у випадку параметричного резонансу визначає ітераційна схема (10). Якщо для кожного фіксованого значення малого параметра ε на відрізку $[0, \varepsilon_*]$ має місце нерівність

$$\|\check{z}_{k+1}(t, \varepsilon)\|_\infty \leq \gamma \|\check{z}_k(t, \varepsilon)\|_\infty, \quad 0 < \gamma < 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (11)$$

то на відрізку $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$, зберігається збіжність ітераційної схеми (10) до розв'язку періодичної крайової задачі (1).

Ітераційна схема (10) визначає відображення

$$\check{z}_{k+1}(t, \varepsilon) := \Phi(\check{z}_k(t, \varepsilon)) : z_k(t, \varepsilon) \rightarrow z_{k+1}(t, \varepsilon), \quad h_k(\varepsilon) \rightarrow h_{k+1}(\varepsilon).$$

За умови (11) це відображення являє собою відображення стиснення [14], оскільки

$$z_{k+1}(t, \varepsilon) - z_k(t, \varepsilon) := u_k(t, \varepsilon), \quad h_{k+1}(\varepsilon) - h_k(\varepsilon) := v_k(\varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Приклад. Продемонструємо ефективність доведеної теореми на прикладі задачі про знаходження 2π -періодичних розв'язків

$$y(t, \varepsilon) : y(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[0, 2\pi], \quad y(t, \cdot), \quad h(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0] \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

рівняння Мат'є

$$y'' + \left(h(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right) \cdot y = 0. \quad (12)$$

Розв'язки 2π -періодичної задачі для рівняння (12) шукаємо в малому околі розв'язку породжуючої 2π -періодичної задачі для рівняння

$$y_0'' + k^2 y_0 = 0.$$

Традиційна [15, 16] схема побудови функцій Мат'є дозволяє одночасне знаходження наближень до функцій

$$h(\varepsilon) : h(\cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad h(0) = k^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ітераційна схема, побудована за технікою найменших квадратів [17, 18], визначає послідовні наближення до власної функції $h(\varepsilon)$ і відповідної функції Мат'є $y(t, \varepsilon)$. Продемонструємо ефективність доведеної теореми на прикладі задачі про знаходження функції Мат'є $se_1(t, \varepsilon)$ та власної функції $h(\varepsilon)$ рівняння Мат'є (12) з використанням методу декомпозиції Адомяна. За нульове наближення до невідомої функції Мат'є покладемо $y_0(t, c_0) := c_0 \cos t$. Для періодичної задачі для рівняння (12) має місце критичний випадок: $Q = 0$. Рівняння для породжуючих амплітуд

$$F_0(\check{c}_0) = \pi c_0 (h_0 - 1) = 0.$$

періодичної задачі для рівняння Мат'є (12) має дійсний корінь

$$c_0^* = h_0^* = 1,$$

для якого виконується умова (6), зокрема, вимога повноти рангу матриці

$$D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи ітераційну схему (10), отримуємо перше наближення до періодичного розв'язку рівняння Мат'є (12)

$$y_1(t, \varepsilon) := y_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon), \quad h_1(\varepsilon) := h_0^* + v_1(\varepsilon),$$

$$u_1(t, \varepsilon) = \varepsilon G \left[A_0(y_0(s, c_0^*)) \right] (t) = \frac{\varepsilon}{16} \left(\cos 3t - \cos t \right), \quad v_1(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon^2}{32},$$

зображуване оператором Гріна

$$G \left[f(s) \right] (t) := \int_0^t \sin(t-s) g(s) ds$$

2 π -періодичної задачі для рівняння

$$y'' + y = g(t).$$

тут і далі

$$\begin{aligned} A_0(y_0(t, c_0^*), h_0^*) &= -y_0(t, c_0^*) (h_0^* - 1 + \varepsilon \cos 2t), \\ A_1(y_0(t, c_0^*), h_0^*, u_1(t, \varepsilon), v_1(\varepsilon), \varepsilon) &= -y_0(t, c_0^*) v_1(\varepsilon) - u_1(t, \varepsilon) (h_0^* - 1 + \varepsilon \cos 2t), \\ A_2(y_0(t, c_r^*), h_0^*, u_1(t, \varepsilon), v_1(\varepsilon), u_2(t, \varepsilon), v_2(\varepsilon), \varepsilon) &= \\ &= -u_2(t, \varepsilon) (h_0^* - 1 + \varepsilon \cos 2t) - u_1(t, \varepsilon) v_1(\varepsilon) - v_2(\varepsilon) y_0(t, c_r^*), \\ A_3(y_0(t, c_r^*), h_0^*, u_1(t, \varepsilon), v_1(\varepsilon), u_2(t, \varepsilon), v_2(\varepsilon), u_3(t, \varepsilon), v_3(\varepsilon), \varepsilon) &= \\ &= -u_3(t, \varepsilon) (h_0^* - 1) - u_2(t, \varepsilon) v_1(\varepsilon) - u_1(t, \varepsilon) v_2(\varepsilon) - v_3(\varepsilon) y_0(t, c_r^*) - \varepsilon u_3(t, \varepsilon) \cos 2t, \\ A_4(y_0(t, c_r^*), h_0^*, u_1(t, \varepsilon), v_1(\varepsilon), u_2(t, \varepsilon), v_2(\varepsilon), u_3(t, \varepsilon), v_3(\varepsilon), u_4(t, \varepsilon), v_4(\varepsilon), \varepsilon) &= \\ &= -u_4(t, \varepsilon) (h_0^* - 1) - u_3(t, \varepsilon) v_1(\varepsilon) - u_2(t, \varepsilon) v_2(\varepsilon) - u_1(t, \varepsilon) v_3(\varepsilon) - \end{aligned}$$

$$-v_4(\varepsilon)y_0(t, c_r^*) - \varepsilon u_4(t, \varepsilon) \cos 2t.$$

Використовуючи ітераційну схему (10), отримуємо друге наближення до періодичного розв'язку рівняння Мат'є (12)

$$y_2(t, \varepsilon) := y_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon) + u_2(t, \varepsilon), \quad h_2(\varepsilon) := h_0^* + v_1(\varepsilon) + v_2(\varepsilon),$$

$$\begin{aligned} u_2(t, \varepsilon) &= \varepsilon G \left[A_1(y_0(s, c_0^*), h_0^*, u_1(s, \varepsilon), v_1(\varepsilon), \varepsilon) \right] (t) = \\ &= \frac{\varepsilon^2}{768} \left(5 \cos t - 6 \cos 3t + \cos 5t \right), \quad v_2(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon^3}{512}. \end{aligned}$$

Аналогічно отримуємо третє

$$y_3(t, \varepsilon) := y_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon) + u_2(t, \varepsilon) + u_3(t, \varepsilon), \quad h_3(\varepsilon) := h_0^* + v_1(\varepsilon) + v_2(\varepsilon) + v_3(\varepsilon),$$

$$\begin{aligned} u_3(t, \varepsilon) &= \varepsilon G \left[A_2(y_0(s, c_0^*), h_0^*, u_1(s, \varepsilon), v_1(\varepsilon), u_2(s, \varepsilon), v_2(\varepsilon), \varepsilon) \right] (t) = \\ &= \frac{\varepsilon^3}{73 \cdot 728} \left(-41 \cos t + 54 \cos 3t - 14 \cos 5t + \cos 7t \right), \quad v_3(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon^4}{24 \cdot 576} \end{aligned}$$

і четверте наближення до періодичного розв'язку рівняння Мат'є (12)

$$y_4(t, \varepsilon) := y_0(t, c_0^*) + u_1(t, \varepsilon) + u_2(t, \varepsilon) + u_3(t, \varepsilon) + u_4(t, \varepsilon),$$

$$h_4(\varepsilon) := h_0^* + v_1(\varepsilon) + v_2(\varepsilon) + v_3(\varepsilon) + v_4(\varepsilon),$$

$$\begin{aligned} u_4(t, \varepsilon) &= \varepsilon G \left[A_3(y_0(s, c_0^*), h_0^*, u_1(s, \varepsilon), v_1(\varepsilon), u_2(s, \varepsilon), v_2(\varepsilon), u_3(s, \varepsilon), v_3(\varepsilon), \varepsilon) \right] (t) = \\ &= \frac{\varepsilon^4}{11 \cdot 796 \cdot 480} \left(364 \cos t - 550 \cos 3t + 210 \cos 5t - 25 \cos 7t + \cos 9t \right), \\ v_4(\varepsilon) &= -\frac{11\varepsilon^5}{11 \cdot 796 \cdot 480}. \end{aligned}$$

Позначимо вектори

$$\check{y}_k(t, \varepsilon) := \begin{pmatrix} u_k(t, \varepsilon) \\ v_k(\varepsilon) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \check{y}_0(t, \varepsilon) := \begin{pmatrix} y_0(t, c_r^*) \\ h_0^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Для кожного фіксованого значення малого параметра ε на відрізку $[0, \varepsilon_*]$ має місце нерівність

$$\|\check{y}_{k+1}(t, \varepsilon)\|_\infty \leq \gamma \|\check{y}_k(t, \varepsilon)\|_\infty, \quad \varepsilon_* \approx 2, 5, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

причому

$$\gamma \approx 0,00284 \cdot 321 \ll 1,$$

отже, на відріжку $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$, можна казати про практичну збіжність ітераційної схеми (10) до періодичного розв'язку рівняння Мат'є (12).

Точність знайдених за допомогою ітераційної схеми (10) наближень до періодичного розв'язку рівняння Мат'є (12) характеризують нев'язки

$$\Delta_k(\varepsilon) := \left\| \left\| y_k''(t, \varepsilon) + \left(h(\varepsilon) + \varepsilon \cos 2t \right) \cdot y_k(t, \varepsilon) \right\| \right\|_{\mathbb{C}[0; 2\pi]}, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Зокрема

$$\begin{aligned} \Delta_1(0, 1) &\approx 0,000\,869\,305, \quad \Delta_2(0, 1) \approx 0,0000\,100\,332, \\ \Delta_3(0, 1) &\approx 8,19\,596 \times 10^{-8}, \quad \Delta_4(0, 1) \approx 3,94\,577 \times 10^{-10}, \\ \Delta_1(0, 01) &\approx 8,66\,973 \times 10^{-6}, \quad \Delta_2(0, 01) \approx 9,99\,071 \times 10^{-9}, \\ \Delta_3(0, 01) &\approx 8,14\,867 \times 10^{-12}, \quad \Delta_4(0, 01) \approx 3,97\,632 \times 10^{-15}. \end{aligned}$$

Відзначимо, що точність знайдених за допомогою методу найменших квадратів [19] наближень до періодичного розв'язку рівняння Мат'є (12) вища за точність наближень, знайдених за допомогою ітераційної схеми (10). В той же час, при побудові наближень до періодичного розв'язку рівняння Мат'є (12) за допомогою методу найменших квадратів [19] ми припускаємо відомою систему базисних функцій, чого не завжди можна робити. Прикладом такої ситуації можуть бути крайові задачі з перемиканнями, які використовуються при вивченні неізотермічних хімічних реакцій [20, 21].

Цитована література

1. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. – 298 p.
2. *Yakubovich V.A., Starzhinskii V.M.* Linear differential equations with periodic coefficients. – New York, Toronto. – Halsted Press, John Wiley and Sons. – 720 p.
3. *Chuiko S.M.* Nonlinear Noetherian boundary-value problem in the case of parametric resonance // Journal of Mathematical Sciences (N.Y.). – 2015. – V. 205, № 6. – P. 859–870.
4. Mandel'shtam, L.I., Papaleksi, N.D. On the parametric excitation of electric oscillations // Technical Physics. – 1934. № 3. – P. 5–29.
5. *Malkin I.G.* Some Problems in the Theory of Nonlinear Oscillations. – Maryland. – US Atomic Energy Commission, Technical Information Service. – 1959. – 432 p.
6. *Guckenheimer J., Holmes P.* Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Applied Mathematical Sciences. – New York, USA. – 1983. – 560 p.
7. *Samoilenko A.M., Chuiko S.M., Starkova O.V.* Nonlinear boundary-value problem that is not solved with respect to the derivative // Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal. – 2020. – T. 72, № 8. – P. 1280–1293.
8. *Boichuk A.A., Chuiko S.M.* On approximate solutions of nonlinear boundary-value problems by the Newton–Kantorovich method // Journ. Math. Sci. – 2021. – V. 258, № 5. – P. 594–617.
9. *Adomian G.* A review of the decomposition method in applied mathematics // Journ. of Math. Math. Anal. and Appl. – 1988. – V. 135. – P. 501–544.
10. *Adomian G.* Polynomial nonlinearities in differential equations // Journ. of Math. Math. Anal. and Appl. – 1985. – V. 109. – P. 90–95.
11. *Adomian G.* Convergent series solution of nonlinear equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 1984. – V. 11. – P. 225–230.

12. Mac M., Leung C.S., Harko T. A brief introduction to the Adomian decomposition method // Romanian Astron. Journ. – 2019. – V. 1, № 1. – P. 1–41.
13. Varsoliwala A., C., Singh T.R. Mathematical modeling of atmospheric internal waves phenomenon and its solution by Elzaki Adomian decomposition method // Journal of Ocean Engineering and Science. – 2022. – № 7. – P. 203–212.
14. Kantorovich L.W., Akilov G.P. Funktsionalanalisis in normierten Raumen. – Berlin. Akademie Verlag. – 1964. – 744 p.
15. Kauderer H. Nichtlineare Mechanik. – Berlin–Gottingen–Heidelberg. – Springer-Verlag. – 1958. – 778 p.
16. Hayashi Ch. Nonlinear oscillations in physical systems. – San Francisco, Toronto, London. – McGraw-Hill Comp. – 1964. – 204 p.
17. Chuiko S.M. On approximate solution of boundary value problems by the least square method // Nonlinear Oscillations (N.Y.) – 2008. – V. 11, № 4. – P. 585–604.
18. Boychuk I., Starkova O., Tchujko S. Weakly perturbed nonlinear boundary-value problem in critical case // Studies of the University of Žilina. Mathematical Series. – October, 2009. – V. 23, № 1. – P. 1–8.
19. Chuiko S.M., Starkova O.V. On the approximate solution of autonomous boundary-value problems by the least-squares method // Nonlin. Oscillations. – 2009. – V. 12, № 4. – P. 574–591.
20. Benner P., Seidel-Morgenstern A., Zuyev A. Periodic switching strategies for an isoperimetric control problem with application to nonlinear chemical reactions // Applied Mathematical Modelling. – 2019. – V. 69. – P. 287–300.
21. Benner P., Chuiko S., Zuyev A. A periodic boundary value problem with switchings under nonlinear perturbations // Boundary Value Problems. – 2023. – V. 50. – P. 1–12.

References

1. Boichuk, A.A., Samoilenko, A.M. (2016). *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems* (2-th edition). Berlin; Boston, De Gruyter, 2016.
2. Yakubovich, V.A., Starzhinskii, V.M. (1975). *Linear differential equations with periodic coefficients*. Halsted Press, John Wiley and Sons, New York, Toronto.
3. Chuiko, S.M. (2015). Nonlinear Noetherian boundary-value problem in the case of parametric resonance. *Journal of Mathematical Sciences*, 205(6), 859–870.
4. Mandel'shtam, L.I., Papaleksi, N.D. (1934). On the parametric excitation of electric oscillations. *Zh. Tekh. Fiz.*, 3, 5–29.
5. Malkin, I.G. (1956). *Some Problems in the Theory of Nonlinear Oscillations*. US Atomic Energy Commission, Technical Information Service, Maryland.
6. Guckenheimer, J., Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, USA.
7. Samoilenko, A.M., Chuiko, S.M., Starkova, O.V. (2020). Nonlinear boundary-value problem that is not solved with respect to the derivative. *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal*, 72(8), 1280–1293.
8. Boichuk, A.A., Chuiko, S.M. (2021). On approximate solutions of nonlinear boundary-value problems by the Newton–Kantorovich method. *Journ. Math. Sci.*, 258(5), 594–617.
9. Adomian, G. (1988). A review of the decomposition method in applied mathematics. *Journ. of Math. Math. Anal. and Appl.*, 135, 501–544.
10. Adomian, G. (1985). Polynomial nonlinearities in differential equations. *Journ. of Math. Math. Anal. and Appl.*, 109, 90–95.
11. Adomian, G. (1984). Convergent series solution of nonlinear equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 11, 225–230.
12. Mac, M., Leung, C.S., Harko, T. (2019). A brief introduction to the Adomian decomposition method. *Romanian Astron. Journ.*, 1(1), 1–41.
13. Varsoliwala, A.C., Singh, T.R. (2022). Mathematical modeling of atmospheric internal waves phenomenon and its solution by Elzaki Adomian decomposition method. *Journal of Ocean Engineering and Science*, 7, 203–212.

14. Kantorovich, L.W., Akilov, G.P. (1964). *Funktionalanalysis in normierten Raumen*. Akademie Verlag, Berlin.
15. Kauderer, H. (1958). *Nichtlineare Mechanik*. Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg.
16. Hayashi, Ch. (1964). *Nonlinear oscillations in physical systems*. McGraw-Hill Comp., San Francisco, Toronto, London.
17. Chuiko, S.M. (2008). On approximate solution of boundary value problems by the least square method. *Nonlinear Oscillations*, 11(4), 585–604.
18. Boychuk, I., Starkova, O., Tchujko, S. (2009). Weakly perturbed nonlinear boundary-value problem in critical case. *Studies of the University of Žilina. Mathematical Series*, 23(1), 1–8.
19. Chuiko, S.M., Starkova, O.V. (2009). On the approximate solution of autonomous boundary-value problems by the least-squares method. *Nonlin. Oscillations*, 12(4), 574–591.
20. Benner, P., Seidel-Morgenstern, A., Zuyev, A. (2019). Periodic switching strategies for an isoperimetric control problem with application to nonlinear chemical reactions. *Applied Mathematical Modelling*, 69, 287–300.
21. Benner, P., Chuiko, S., Zuyev, A. (2023). A periodic boundary value problem with switchings under nonlinear perturbations. *Boundary Value Problems*, 50, 1–12.

S.M. Chuiko, O.S. Chuiko, D.D. Diachenko

Adomian decomposition method in theory of nonlinear periodical boundary value problems in the case of parametric resonance.

Constructive conditions for the solvability of a nonlinear periodic boundary value problem for an ordinary differential equation in the case of parametric resonance are obtained. Studies of periodic boundary value problems in the case of parametric resonance are associated with numerous applications in electronics, plasma theory, nonlinear optics, mechanics, the theory of stability of motion, biology and radio engineering, the theory of nonlinear oscillations, for mineral exploration and machine tool construction. The specificity of studying boundary value problems in the case of parametric resonance lies in the need to find both the solution to this problem and the unknown eigenfunction that ensures the solvability of the problem. For a nonlinear periodic boundary value problem in the case of parametric resonance, necessary and sufficient conditions for existence and a scheme for constructing solutions using the Adomian decomposition method are obtained. The used classification of Noetherian boundary value problems in the case of parametric resonance, depending on the simplicity or multiplicity of the equation for the generating amplitudes, differs significantly from the similar classification of periodic problems in the case of parametric resonance. The latter problems were investigated by L.I. Mandelstam, M.D. Papaleksi, V.A. Yakubovich and V.M. Starzhynsky and correspond to the general classification of periodic and Noetherian boundary value problems, thoroughly studied by M.M. Krylov, M.M. Bogolyubov, A. Poincare, O.M. Lyapunov, A.M. Samoilenko, E.O. Grebenikov, Yu.O. Ryabov and O.A. Boichuk. To construct a solution to a nonlinear periodic boundary value problem for an ordinary differential equation in the case of parametric resonance, an iterative scheme was constructed using the Adomian decomposition method and conditions for convergence to the desired solution were established. The effectiveness of the obtained scheme for constructing solutions of a nonlinear periodic boundary value problem for an ordinary differential equation in the case of parametric resonance is demonstrated on the example of the problem of finding periodic solutions and the eigenfunction of the Mathieu equation.

Keywords: *Adomian decomposition method, nonlinear periodical boundary value problem, parametric*

resonance.

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ,
Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
Слов'янськ, Max Planck Institute for Dynamics of Complex
Technical Systems, Magdeburg, Germany
chujko-slav@ukr.net, chuiko@mpi-magdeburg.mpg.de

Отримано 02.06.2024