

УДК 517.54, 517.95

DOI: 10.37069/1683-4720-2025-39-09

©2025. С.В. Грищук, С.А. Плакса

КУСКОВО-НЕПЕРЕРВНА ЗАДАЧА ТИПУ ЗАДАЧІ ШВАРЦА В ОБЛАСТЯХ З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ ДЛЯ МОНОГЕННИХ ФУНКЦІЙ В БІГАРМОНІЧНІЙ АЛГЕБРИ

Розглядається кусково-неперервна задача типу задачі Шварца в областях з кутовими точками для моногенних функцій в бігармонічній алгебрі, асоційована з крайовою задачею типу задачі зі зміщеннями для ізотропного плоского середовища. Розвинуто метод зведення цих крайових задач до системи інтегральних рівнянь на колі комплексної площини, який базується на зображенні розв'язків у вигляді гіперкомплексного інтеграла типу Коші.

MSC: 30G35, 31A30.

Ключові слова: бігармонічне рівняння, бігармонічна алгебра, бігармонічна площина, моногенна функція, кусково-неперервна задача типу задачі Шварца для моногенних функцій, крайова задача типу задачі зі зміщеннями.

1. Вступ.

Нехай D – обмежена однозв'язна область декартової площини xOy з кусково-гладкою межею ∂D , яка має скінченний набір $\Upsilon := \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)\}$ кутових точок.

Розглянемо *кусово-неперервну крайову (u_x, v_y) -задачу*, яка полягає у відшуванні частинних похідних $\mathcal{V}_1 := \frac{\partial u}{\partial x}$, $\mathcal{V}_2 := \frac{\partial v}{\partial y}$ від зміщень $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ пружного ізотропного тіла, яке займає область D , коли їх граничні значення у точках межі ∂D області D , за винятком точок множини Υ , задовольняють умови

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0), (x,y) \in D} \mathcal{V}_k(x, y) = g_k(x_0, y_0) \quad \forall (x_0, y_0) \in \partial D \setminus \Upsilon, k = 1, 2, \quad (1)$$

і для кожного $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ виконуються оцінки

$$|\mathcal{V}_1(x, y)| + |\mathcal{V}_2(x, y)| \leq c \left((x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 \right)^{-\alpha_j/2}, \quad (2)$$

$$(x, y) \rightarrow (x_j, y_j), (x, y) \in D \setminus \Upsilon,$$

де $\alpha_j \in (0, 1)$ при $j = \overline{1, m}$ і стала c не залежить від (x, y) , а задані функції $g_k: \partial D \setminus \Upsilon \rightarrow \mathbb{R}$ при $k = 1, 2$ неперервні на множині $\partial D \setminus \Upsilon$. У той же час, з оцінок (2) випливає, що при $j = \overline{1, m}$ і $k = 1, 2$ мають виконуватися оцінки

$$|g_k(x, y)| \leq c \left((x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 \right)^{-\alpha_j/2}, \quad (x, y) \rightarrow (x_j, y_j), (x, y) \in \partial D \setminus \Upsilon, \quad (3)$$

Цю роботу підтримано грантом від Simons Foundation (FI-PD-Ukraine-00014586, S.V.G., S.A.P.).

де стала c не залежить від (x, y) .

Постановку даної крайової задачі для випадку $\Upsilon = \emptyset$ здійснено у роботі [1], де її названо *крайовою (u_x, v_y) -задачею*, при цьому, очевидно, що граничні умови (1) у зазначеному випадку виконуються для усіх $(x_0, y_0) \in \partial D$, а оцінки (2) та (3) – відсутні. Таку задачу можна також назвати *крайовою задачею типу задачі зі зміщеннями*, оскільки передбачається знаходження не вектора зміщень (u, v) в області D за даними його граничними значеннями на межі ∂D , як це вимагається у одній з основних крайових задач ізотропної теорії пружності (див., наприклад, [2, 3]), а вектора його частинних похідних $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) := (\partial u / \partial x, \partial v / \partial y) \equiv (u_x, v_y)$. Зазначимо, що у теоремі 3 роботи [1] доведено, що однорідна (u_x, v_y) -задача (при $g_1 = g_3 \equiv 0$) має лише тривіальний розв'язок $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 \equiv 0$.

Теорія крайових задач для еліптичних рівнянь в областях з кусково-гладкими межами розвинута в роботах багатьох авторів (див., наприклад, роботи [4–6] та літературу в них), при цьому вивчено питання існування і єдиності розв'язків крайових задач для еліптичних операторів у вагових просторах, досліджено асимптотичні властивості розв'язків в околах кутових точок та вплив кутових точок на гладкість розв'язків тощо.

Відомо, що функції u і v є бігармонічними в області D (див., наприклад, [3]). Для розв'язання крайових задач для бігармонічних функцій розвинені методи, що використовують аналітичні функції комплексної змінної, техніка використання яких базується на зображенні бігармонічних функцій формулою Гурса (див., наприклад, [2, 3, 7]). Це дозволяє зводити крайові задачі для бігармонічних функцій до відповідних крайових задач для пари аналітичних функцій. Далі з використанням зображення аналітичних функцій інтегралами типу Коші в загальному випадку отримують систему інтегро-диференціальних рівнянь. У випадку, коли межа області є кривою Ляпунова, зазначена система, як правило, зводиться до системи рівнянь Фредгольма. Така схема розроблена (див., наприклад, [3, 7, 8]) для розв'язання основних задач плоскої теорії пружності з використанням спеціальної бігармонічної функції, яка називається функцією напружень Ері.

У роботі [1] доведено еквівалентність крайової задачі типу задачі Шварца для моногенних функцій у двовимірній комутативній асоціативній алгебрі над полем комплексних чисел та крайової (u_x, v_y) -задачі у випадку $\Upsilon = \emptyset$. У роботах [9–11] розвинуто метод розв'язання крайової задачі типу задачі Шварца для моногенних функцій (а отже і крайової (u_x, v_y) -задачі), який базується на представленні розв'язків гіперкомплексними інтегралами, аналогічними до класичних інтегралів Шварца і інтегралів типу Коші. З використанням цього гіперкомплексного методу вказані крайові задачі у загальному випадку зводяться безпосередньо до системи інтегральних рівнянь, оминаючи інтегро-диференціальні рівняння. У роботах [9–11] встановлено достатні умови фредгольмовості вказаної системи для обмежених областей з гладкими межами, що належать більш широким класам, ніж клас кривих Ляпунова, який, як правило, розглядався раніше в плоскій теорії пружності.

У даній роботі розвинуто гіперкомплексний метод для зведення кусково-непе-

первної задачі типу задачі Шварца, асоційованої з кусково-неперервною (u_x, v_y) -задачею для обмеженої області з кутовими точками, до системи інтегральних рівнянь.

2. Крайова задача для моногенних функцій, асоційована з крайовою (u_x, v_y) -задачею для обмеженої області з кутовими точками.

У роботі [12] асоціативну комутативну двовимірну алгебру $\mathbb{B}$ з одиницею над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ названо *бігармонічною*, якщо вона містить базис $\{e_1, e_2\}$, що задовольняє умови

$$(e_1^2 + e_2^2)^2 = 0, \quad e_1^2 + e_2^2 \neq 0 \quad (4)$$

(який також названо *бігармонічним*), і запропоновано наступну таблицю множення для такого базису:

$$e_1^2 = e_1, \quad e_2 e_1 = e_2, \quad e_2^2 = e_1 + 2ie_2, \quad (5)$$

де i – уявна комплексна одиниця.

У роботі [13] доведено єдиність бігармонічної алгебри $\mathbb{B}$ і показано, що вона породжується небігармонічним базисом $\{e_1, \rho\}$, де

$$\rho = 2e_1 + 2ie_2, \quad (6)$$

при цьому $\rho^2 = 0$, а також описано усі бігармонічні базиси в $\mathbb{B}$. Зауважимо, що алгебра $\mathbb{B}$ ізоморфна чотиривимірним алгебрам над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, розглянутим у роботах [14, 15].

Задамо евклідову норму $\|a\| := \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$ в алгебрі $\mathbb{B}$, де $a = z_1 e_1 + z_2 e_2$ і $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Як і в роботі [12], розглянемо *бігармонічну площину* $\mu_{e_1, e_2} := \{\zeta = x e_1 + y e_2 : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Області D декартової площини xOy поставимо у відповідність конгруентну їй область $D_\zeta := \{\zeta = x e_1 + y e_2 : (x, y) \in D\}$ у площині μ_{e_1, e_2} , а її замиканню $\overline{D}$ — замикання $\overline{D}_\zeta$. Їх межі позначатимемо відповідно через ∂D та ∂D_ζ .

Скрізь надалі $\zeta := x e_1 + y e_2$, $z := x + iy$, де $(x, y) \in D$, і $\zeta_0 := x_0 e_1 + y_0 e_2$, де $(x_0, y_0) \in \partial D$.

Оскільки в бігармонічній площині відсутні дільники нуля, то похідна функції $\Phi: D_\zeta \rightarrow \mathbb{B}$ визначається так, як і для аналітичних функцій комплексної змінної, а саме:

$$\Phi'(\zeta) := \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mu_{e_1, e_2}} (\Phi(\zeta + h) - \Phi(\zeta)) h^{-1}.$$

Означення 1. Функція $\Phi: D_\zeta \rightarrow \mathbb{B}$ називається *моногенною* в області D_ζ , якщо її похідна $\Phi'(\zeta)$ існує у кожній точці $\zeta \in D_\zeta$.

Кожна функція $\Phi: D_\zeta \rightarrow \mathbb{B}$ подається у вигляді

$$\Phi(\zeta) = U_1(x, y) e_1 + U_2(x, y) i e_1 + U_3(x, y) e_2 + U_4(x, y) i e_2, \quad (7)$$

де $U_l: D \rightarrow \mathbb{R}$, $l = \overline{1,4}$, — дійснозначні компоненти-функції. Для них також будемо використовувати позначення $U_l[\Phi] := U_l$, $l = \overline{1,4}$.

У роботах [16–18] доведено, що кожна моногенна функція $\Phi: D_\zeta \rightarrow \mathbb{B}$ має похідні $\Phi^{(n)}(\zeta)$ усіх порядків в області D_ζ і задовольняє бігармонічне рівняння

$$\Delta^2 \Phi(\zeta) := \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \Phi(\zeta) = 0 \quad \forall (x, y) \in D$$

в силу першого зі співвідношень (4) і рівності $\Delta^2 \Phi(\zeta) = \Phi^{(4)}(\zeta) (e_1^2 + e_2^2)^2$. Тому всі компоненти $U_l: D \rightarrow \mathbb{R}$, $l = \overline{1,4}$, з розкладу (7) є бігармонічними функціями в області D .

Крім того, кожна бігармонічна в D функція $U(x, y)$ є першою компонентою $U_1 \equiv U$ з розкладу (7) для деякої моногенної функції $\Phi: D_\zeta \rightarrow \mathbb{B}$. Усі такі функції Φ знайдено в роботах [16, 18] у явному вигляді для обмежених однозв'язних областей.

Позначимо через $\Upsilon_\zeta := \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m\}$ відповідний до набору Υ набір кутових точок $\zeta_j := e_1 x_j + e_2 y_j$, $j = \overline{1, m}$, межі ∂D_ζ .

Розглянемо кусково-неперервну (1-4)-задачу про відшукування моногенної функції $\Phi: D_\zeta \rightarrow \mathbb{B}$, для якої граничні значення компонент $U_l[\Phi(\zeta)]$, $l \in \{1, 4\}$, з розкладу (7) задовольняють крайові умови

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0, \zeta \in D_\zeta} U_l[\Phi(\zeta)] = u_l(\zeta_0) \quad \forall \zeta_0 \in \partial D_\zeta \setminus \Upsilon_\zeta, \quad l \in \{1, 4\}, \quad (8)$$

де $u_l: \partial D_\zeta \setminus \Upsilon_\zeta \rightarrow \mathbb{R}$, $l \in \{1, 4\}$, — задані неперервні на $\partial D_\zeta \setminus \Upsilon_\zeta$ функції. Крім того, шукана функція Φ має задовольняти для кожних $l \in \{1, 4\}$ і $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ оцінки

$$|U_l[\Phi(\zeta)]| \leq c \|\zeta - \zeta_j\|^{-\alpha_j}, \quad \zeta \rightarrow \zeta_j, \quad \zeta \in D_\zeta,$$

де $\alpha_j \in (0, 1)$ і стала c не залежить від ζ .

У роботі [19] задачі такого типу названо *бігармонічними задачами Шварца* з огляду на їх пряму аналогію з класичною задачею Шварца про відшукування аналітичної функції комплексної змінної, коли значення її дійсної частини задано на межі області.

Нехай λ і μ — пружні сталі Ляме (див., наприклад, [2, 3]).

Аналогічно до теореми 4 роботи [1] про еквівалентність крайової (u_x, v_y) -задачі та відповідної (1-4)-задачі у випадку $\Upsilon = \emptyset$, доводиться наступне твердження у випадку, коли Υ — скінченний набір точок.

Теорема 1. *Кусково-неперервна (u_x, v_y) -задача з крайовими умовами (1) еквівалентна кусково-неперервній (1-4)-задачі з крайовими умовами*

$$\begin{aligned} u_1(\zeta_0) &= \lambda g_1(x_0, y_0) + (\lambda + 2\mu) g_2(x_0, y_0), \\ u_4(\zeta_0) &= -\mu g_1(x_0, y_0) + \mu g_2(x_0, y_0) \quad \forall \zeta_0 = x_0 e_1 + y_0 e_2 \in \partial D_\zeta \setminus \Upsilon_\zeta. \end{aligned} \quad (9)$$

Загальний розв'язок кусково-неперервної (u_x, v_y) -задачі для всіх $(x, y) \in D$ подається через компоненти $U_1[\Phi]$, $U_4[\Phi]$ загального розв'язку Φ кусково-неперервної (1-4)-задачі з крайовими умовами (9) за допомогою формул

$$2\mu \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} U_1[\Phi(\zeta)] - \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} U_4[\Phi(\zeta)],$$

$$2\mu \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} U_1[\Phi(\zeta)] + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} U_4[\Phi(\zeta)],$$

де $\zeta = xe_1 + ye_2$.

Навпаки, компоненти $U_1[\Phi]$, $U_4[\Phi]$ загального розв'язку Φ кусково-неперервної (1-4)-задачі з крайовими умовами (9) подаються через загальний розв'язок $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ кусково-неперервної (u_x, v_y) -задачі з крайовими умовами (1) за допомогою формул

$$U_1[\Phi(\zeta)] = \lambda \mathcal{V}_1(x, y) + \left(2 + \frac{\lambda}{\mu}\right) \mathcal{V}_2(x, y),$$

$$U_4[\Phi(\zeta)] = \mu(\mathcal{V}_2(x, y) - \mathcal{V}_1(x, y)) \quad \forall \zeta = xe_1 + ye_2 \in D_\zeta.$$

Отже, кусково-неперервна (u_x, v_y) -задача з крайовими умовами (1) зводиться до еквівалентної крайової задачі про відшукування моногенної в області D_ζ функції Φ у випадку, коли значення двох компонент $U_l[\Phi]$, $l \in \{1, 4\}$, розкладу (7) задані на множині $\partial D_\zeta \setminus \Upsilon_\zeta$.

Будемо шукати розв'язки кусково-неперервної (1-4)-задачі у класі функцій, що подаються у вигляді бігармонічного інтеграла типу Коші

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\zeta} \varphi(\tau)(\tau - \zeta)^{-1} d\tau \quad \forall \zeta \in D_\zeta, \quad (10)$$

де

$$\varphi(\zeta) = \varphi_1(\zeta) e_1 + \varphi_4(\zeta) i e_2 \quad \forall \zeta \in \partial D_\zeta \setminus \Upsilon_\zeta \quad (11)$$

і функції $\varphi_l: \partial D_\zeta \setminus \Upsilon_\zeta \rightarrow \mathbb{R}$, $l \in \{1, 4\}$, — неперервні на $\partial D_\zeta \setminus \Upsilon_\zeta$, а умови на їх поведінку в околі точок набору Υ_ζ будуть наведені нижче.

3. Допоміжні твердження.

Нехай $D_z := \{z = x + iy : (x, y) \in D\}$ — область комплексної площини $\mathbb{C}$, конгруентна області D , і $z_j := x_j + iy_j$, $j = \overline{1, m}$, — кутові точки межі ∂D_z області D_z .

Розглянемо конформне відображення $z = \sigma(Z)$ одиничного круга $\mathcal{U} := \{Z \in \mathbb{C} : |Z| < 1\}$ на область D_z , яке очевидно визначає також гомеоморфізм одиничного кола $\Gamma := \{S \in \mathbb{C} : |S| = 1\}$ та межі ∂D_z .

Нехай $\mathcal{X} := \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ — набір точок кола Γ таких, що $\sigma(X_j) = z_j$, $j = \overline{1, m}$.

Позначимо $\mathcal{R}_0 := \min_{X_k, X_j \in \mathcal{X}, k \neq j} \{|X_k - X_j|\}$, якщо $m > 1$, і $\mathcal{R}_0 := 1$ у випадку $m = 1$.

Для кожної точки Z , що належить замиканню $\overline{\mathcal{U}}$ круга $\mathcal{U}$, позначимо

$$\mathcal{R}(Z) := \min_{X_j \in \mathcal{X}} \{|Z - X_j|\}.$$

Для $r > 0$, $E \subset \mathbb{C}$ і $T_0 \in \mathbb{C}$ позначимо $E_r(T_0) := \{T \in E : |T - T_0| \leq r\}$, а також

$$E_r \langle \mathcal{X} \rangle := \bigcup_{j=1}^m E_r(X_j).$$

Сингулярний інтеграл розуміємо у сенсі головного значення за Коші

$$\int_{\Gamma} \frac{\Omega(S, \cdot)}{S - T} dS := \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_{\delta}(T)} \frac{\Omega(S, \cdot)}{S - T} dS, \quad T \in \Gamma,$$

за умови, що границя в правій частині рівності існує, де $\Omega(S, \cdot)$ – комплекснозначна функція, значення якої залежить від змінної S та, можливо, інших змінних.

Доведення наступних трьох лем проведено у роботах [20, 21].

Лема 1. Нехай функція $\Omega: (\Gamma \setminus \mathcal{X}) \times (\overline{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{C}$ задовольняє оцінки

$$|\Omega(S, Z)| \leq \frac{c}{(\mathcal{R}(S))^{\beta}} \min \left\{ \frac{\omega_0(|S - Z|)}{\omega_0(\frac{1}{2}\mathcal{R}(Z))}, 1 \right\} \quad \forall Z \in \mathcal{U} \quad \forall S \in \Gamma \setminus \mathcal{X},$$

$$|\Omega(S, T)| \leq \frac{c}{(\mathcal{R}(S))^{\beta}} \min \left\{ \frac{\omega_1(|S - T|)}{\omega_1(\frac{1}{2}\mathcal{R}(T))}, 1 \right\} \quad \forall S, T \in \Gamma \setminus \mathcal{X}, \quad (12)$$

$$|\Omega(S, Z) - \Omega(S, Z_0)| \leq \frac{c}{(\mathcal{R}(S))^{\beta} (\mathcal{R}(Z_0))^{\beta_0}} \min \left\{ \frac{\omega_2(|S - Z_0|)}{\omega_2(\frac{1}{2}\mathcal{R}(Z_0))}, 1 \right\} \frac{|Z - Z_0|}{|S - Z_0|}$$

$$\forall Z_0 \in \Gamma \setminus \mathcal{X} \quad \forall Z \in \overline{\mathcal{U}}_{\frac{1}{4}\mathcal{R}(Z_0)}(Z_0) \setminus \mathcal{X} \quad \forall S \in \Gamma \setminus \mathcal{X} : |S - Z_0| \geq 2|Z - Z_0|,$$

де стала c не залежить від S, Z, T, Z_0 ; $\beta \in (0, 1)$; $\beta_0 \geq 0$; $\omega_k: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ при $k = 0, 1, 2$ – неспадні обмежені функції, які задовольняють умови:

$$\omega_k(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad k \in \{0, 2\},$$

$$\int_0^2 \frac{\omega_1(\eta)}{\eta} d\eta < \infty. \quad (13)$$

Тоді

$$\lim_{Z \rightarrow Z_0, Z \in \mathcal{U}} \int_{\Gamma} \frac{\Omega(S, Z)}{S - Z} dS = \int_{\Gamma} \frac{\Omega(S, Z_0)}{S - Z_0} dS \quad \forall Z_0 \in \Gamma \setminus \mathcal{X}.$$

Лема 2. Нехай функція $\Omega: (\Gamma \setminus \mathcal{X}) \times (\Gamma \setminus \mathcal{X}) \longrightarrow \mathbb{C}$ задовольняє оцінку (12) і оцінку

$$|\Omega(S, T) - \Omega(S, T_0)| \leq \frac{c}{(\mathcal{R}(S))^\beta (\mathcal{R}(T_0))^{\beta_0}} \min \left\{ \frac{\omega_2(|S - T_0|)}{\omega_2(\frac{1}{2}\mathcal{R}(T_0))}, 1 \right\} \frac{|T - T_0|}{|S - T_0|}$$

$$\forall T_0 \in \Gamma \setminus \mathcal{X} \quad \forall T \in \Gamma_{\frac{1}{4}\mathcal{R}(T_0)}(T_0) \quad \forall S \in \Gamma \setminus \mathcal{X} : |S - T_0| \geq 2|T - T_0|,$$

де стала c не залежить від S, T, T_0 ; $\beta \in (0, 1)$; $\beta_0 \geq 0$; $\omega_k: (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ при $k = 1, 2$, – неспадні обмежені функції такі, що

$$\omega_2(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

і функція ω_1 задовольняє умову Діні (13).

Тоді для довільного $r < \frac{1}{4}\mathcal{R}_0$ і довільних $T, T_0 \in \Gamma \setminus \Gamma_r \langle \mathcal{X} \rangle$ таких, що $|T - T_0| = \varepsilon \leq \frac{1}{8}r$, справедлива оцінка

$$\left| \int_{\Gamma} \frac{\Omega(S, T)}{S - T} dS - \int_{\Gamma} \frac{\Omega(S, Z_0)}{S - Z_0} dS \right| \leq \frac{c}{r^\beta} \left(\frac{\varepsilon}{r^{1+\beta_0}} + \frac{\varepsilon}{r^{\beta_0} \omega_2(r/2)} \int_{\varepsilon}^2 \frac{\omega_2(\eta)}{\eta^2} d\eta + \right. \\ \left. + \frac{1}{\omega_1(r/2)} \left(\int_0^{\varepsilon} \frac{\omega_1(\eta)}{\eta} d\eta + \varepsilon \int_{\varepsilon}^2 \frac{\omega_1(\eta)}{\eta^2} d\eta \right) \right),$$

де стала c не залежить від r, T і T_0 .

Лема 3. Нехай існує $r_0 < \frac{1}{4}\mathcal{R}_0$ таке, що функція $\Omega: (\Gamma \setminus \mathcal{X}) \times (\overline{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{X}) \longrightarrow \mathbb{C}$ при кожному $X_j, j = \overline{1, m}$, задовольняє оцінки

$$|\Omega(S, Z)| \leq c \frac{(\max\{\mathcal{R}(S), \mathcal{R}(Z)\})^{\gamma'_j}}{(\mathcal{R}(S))^{\gamma_j + \gamma'_j}} \quad \forall S \in \Gamma \setminus \mathcal{X} \quad \forall Z \in \mathcal{U}_{r_0}(X_j),$$

$$|\Omega(S, T)| \leq c \frac{(\max\{\mathcal{R}(S), \mathcal{R}(T)\})^{\gamma'_j}}{(\mathcal{R}(S))^{\gamma_j + \gamma'_j}} \min \left\{ \frac{\omega_1^*(|S - T|)}{\omega_1^*(\frac{1}{2}\mathcal{R}(T))}, 1 \right\} \quad \forall S \in \Gamma \setminus \mathcal{X} \\ \forall T \in \Gamma_{r_0}(X_j) \setminus \{X_j\},$$

$$|\Omega(S, Z) - \Omega(S, Z_0)| \leq c \frac{1}{(\mathcal{R}(Z_0))^{\gamma_j}} \frac{|Z - Z_0|}{|S - Z_0|} \quad \forall Z_0 \in \Gamma_{r_0}(X_j) \setminus \{X_j\} \\ \forall Z \in \overline{\mathcal{U}}_{\frac{1}{4}\mathcal{R}(Z_0)}(Z_0) \\ \forall S \in \Gamma_{\frac{1}{2}\mathcal{R}(Z_0)}(Z_0) : |S - Z_0| \geq 2|Z - Z_0|,$$

де стала c не залежить від S , Z , T і Z_0 ; додатні числа $\gamma_j > 0$ та $\gamma'_j > 0$ задовольняють умову $\gamma_j + \gamma'_j < 1$; $\omega_1^*: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ — неспадна обмежена функція, яка задовольняє умову

$$\int_0^\varepsilon \frac{\omega_1^*(\eta)}{\eta} d\eta < c \omega_1^*(\varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}r_0\right), \quad (14)$$

де c — деяка стала, яка не залежить від ε .

Тоді в околі кожної точки $X_j \in \mathcal{X}$, $j = \overline{1, m}$, виконується оцінка

$$\left| \int_\Gamma \frac{\Omega(S, Z)}{S - Z} dS \right| \leq \frac{c}{(\mathcal{R}(Z))^{\gamma_j}} \quad \forall Z \in \mathcal{U}_{r_0/2}(X_j),$$

де стала c не залежить від Z .

4. Зведення кусково-неперервної (1-4) задачі до системи інтегральних рівнянь.

Скрізь надалі припускаємо існування неперервної контурної похідної

$$\sigma'(T) := \lim_{S \rightarrow T, S \in \Gamma \setminus \mathcal{X}} \frac{\sigma(S) - \sigma(T)}{S - T} \quad \forall T \in \Gamma \setminus \mathcal{X},$$

конформного відображення $\sigma(Z)$, яка, крім того, відмінна від нуля на $\Gamma \setminus \mathcal{X}$.

З результатів роботи [22] або більш загальної теореми 2.7.6 [23] випливає, що в усіх точках множини $\Gamma \setminus \mathcal{X}$ існує наступна тілесна похідна, значення якої співпадають зі значеннями контурної похідної, тобто виконується рівність

$$\lim_{Z \rightarrow Z_0, Z \in \bar{\mathcal{U}}} \frac{\sigma(Z) - \sigma(Z_0)}{Z - Z_0} = \sigma'(Z_0) \quad \forall Z_0 \in \Gamma \setminus \mathcal{X},$$

і, крім того, $\sigma'(Z)$ є неперервною при всіх $Z \in \bar{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{X}$.

Введемо позначення

$$\begin{aligned} \sigma_1(Z) &:= \operatorname{Re} \sigma(Z), \quad \sigma_2(Z) := \operatorname{Im} \sigma(Z), \\ d(S, Z) &:= \frac{\sigma(S) - \sigma(Z)}{S - Z}, \quad d_k(S, Z) := \frac{\sigma_k(S) - \sigma_k(Z)}{S - Z}, \quad k = 1, 2, \\ &\forall Z \in \bar{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{X} \quad \forall S \in \Gamma \setminus \mathcal{X} : Z \neq S. \end{aligned}$$

Очевидно, що функція

$$\tilde{\sigma}(Z) := \sigma_1(Z) e_1 + \sigma_2(Z) e_2 \quad \forall Z \in \bar{\mathcal{U}} \quad (15)$$

визначає гомеоморфне відображення $\bar{\mathcal{U}}$ на $\overline{D_\zeta}$. Як і відображення σ , відображення (15) також має неперервну контурну похідну на множині $\Gamma \setminus \mathcal{X}$. Враховуючи рівності (5), (6), отримуємо

$$\tilde{\sigma}'(S) = \sigma'(S) - \frac{i}{2} \sigma_2'(S) \rho \quad \forall S \in \Gamma \setminus \mathcal{X}.$$

Для $\tau = \tilde{\sigma}(S) \in \partial D_\zeta \setminus \Upsilon_\zeta$ і $\zeta = \tilde{\sigma}(Z) \in D_\zeta$ справедлива рівність

$$(\tau - \zeta)^{-1} = \frac{1}{\sigma(S) - \sigma(Z)} + \frac{i\rho}{2} \frac{\sigma_2(S) - \sigma_2(Z)}{(\sigma(S) - \sigma(Z))^2}.$$

Так, як і при доведенні Лема 3 роботи [10] у випадку гладкого контура ∂D_z , перетворюємо рівність (10) до вигляду

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{\varphi}(S) \tilde{\sigma}'(S)}{\sigma(S) - \sigma(Z)} dS = \frac{e_1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Omega_1^{\tilde{\varphi}}(S, Z)}{S - Z} dS + \\ &+ \frac{2ie_1 - 2e_2}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Omega_2^{\tilde{\varphi}}(S, Z)}{S - Z} dS + \\ &+ \frac{e_1}{4\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{\varphi}(S)}{S} \left(1 + \frac{S + Z}{S - Z}\right) dS \quad \forall Z \in \mathcal{U}, \quad (16) \end{aligned}$$

де

$$\Omega_1^{\tilde{\varphi}}(S, Z) = \tilde{\varphi}(S) \left(\frac{\sigma'(S)}{d(S, Z)} - 1 \right) \quad \forall S \in \Gamma \setminus \mathcal{X} \quad \forall Z \in \mathcal{U}, \quad (17)$$

$$\Omega_2^{\tilde{\varphi}}(S, Z) = \frac{\tilde{\varphi}(S)}{2} \left(\frac{\sigma'(S) d_2(S, Z)}{(d(S, Z))^2} - \frac{\sigma'_2(S)}{d(S, Z)} \right) \quad \forall S \in \Gamma \setminus \mathcal{X} \quad \forall Z \in \mathcal{U}, \quad (18)$$

$$\tilde{\varphi}(S) = \varphi_1(\tilde{\sigma}(S)) e_1 + \varphi_3(\tilde{\sigma}(S)) e_2 \quad \forall S \in \Gamma \setminus \mathcal{X}. \quad (19)$$

Очевидно, що функції (17) і (18) неперервно продовжуються в точки $Z \in \Gamma \setminus \mathcal{X}$, $Z \neq S$. Крім того, $\Omega_1^{\tilde{\varphi}}(S, Z) \rightarrow 0$ і $\Omega_2^{\tilde{\varphi}}(S, Z) \rightarrow 0$ при $Z \rightarrow S \in \Gamma \setminus \mathcal{X}$. Тому надалі вважаємо, що дані функції визначені при $S \in \Gamma \setminus \mathcal{X}$ та $Z \in \overline{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{X}$. Подано функцію (18) у вигляді

$$\Omega_2^{\tilde{\varphi}}(S, Z) = \frac{\tilde{\varphi}(S)}{2} \frac{(d_2(S, Z) (\sigma'_1(S) - d_1(S, Z)) - d_1(S, Z) (\sigma'_2(S) - d_2(S, Z)))}{(d(S, Z))^2}. \quad (20)$$

Функцію $\omega: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ називають *напівадитивною* (див., наприклад, [24]), якщо

$$\omega(\eta_1 + \eta_2) \leq \omega(\eta_1) + \omega(\eta_2) \quad \forall \eta_1 > 0 \quad \forall \eta_2 > 0.$$

Через $s[Z, T]$ позначимо відрізок з початком у точці $Z \in \Gamma$ і кінцем у точці $T \in \Gamma$.

Лема 4. *Нехай виконуються умови:*

- а) *контурна похідна σ' неперервна та не обертається в нуль на $\Gamma \setminus \mathcal{X}$, а тілесна похідна $\sigma'(Z)$ задовольняє оцінку*

$$|\sigma'(Z)| \leq c \prod_{j=1}^m |Z - X_j|^{\beta_j} \quad \forall Z \in \overline{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{X},$$

де $\beta_j \in (-1; 1]$ і стала c не залежить від Z ;

б) при деякому $r_0 \in (0, \mathcal{R}_0/4)$ для функцій σ' виконуються оцінки

$$|\sigma'(Z) - \sigma'(Z_0)| \leq c \frac{\omega_1^* (|Z - Z_0|)}{\omega_1^* (\frac{1}{2}\mathcal{R}(Z_0))} \prod_{j=1}^m |Z - X_j|^{\beta_j} \\ \forall Z_0 \in \Gamma_{r_0} \langle \mathcal{X} \rangle \setminus \mathcal{X} \quad \forall Z \in \left(\Gamma \cup s[0, Z_0] \right)_{\mathcal{R}(Z_0)/2} (Z_0),$$

$$|\sigma'(Z) - \sigma'(Z_0)| \leq c \frac{\omega_1 (|Z - Z_0|)}{\omega_1 (\frac{1}{2}\mathcal{R}(Z_0))} \prod_{j=1}^m |Z - X_j|^{\beta_j} \\ \forall Z_0 \in \Gamma \setminus \Gamma_{r_0} \langle \mathcal{X} \rangle \quad \forall Z \in \left(\Gamma \cup s[0, Z_0] \right)_{\mathcal{R}(Z_0)/2} (Z_0),$$

в яких стала c не залежить від Z і Z_0 , $\omega_1: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ і $\omega_1^*: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ – неспадні обмежені напівадитивні функції такі, що ω_1 задовольняє умову (13), а ω_1^* – умову (14). Нехай, крім того, для даного r_0 і кожного $X_j \in \mathcal{X}$, $j = \overline{1, m}$, функція $d(S, Z)$ задовольняє оцінку

$$|d(S, Z)| \geq c \left(|S - X_j| + |Z - X_j| \right)^{\beta_j} \quad \forall Z \in \overline{U}_{r_0} (X_j) \setminus \mathcal{X} \quad \forall S \in \Gamma_{2r_0} (X_j) \setminus \mathcal{X},$$

де стала c не залежить від S і Z ;

в) функції $\varphi_l: \partial D_\zeta \setminus \Upsilon_\zeta \rightarrow \mathbb{R}$, $l \in \{1, 4\}$, з рівності (11) неперервні на $\partial D_\zeta \setminus \Upsilon_\zeta$ і задовольняють оцінку

$$|\varphi_l(\zeta)| \leq c \prod_{j=1}^m \|\zeta - \zeta_j\|^{-\alpha_j} \quad \forall \zeta \in \partial D_\zeta \setminus \Upsilon_\zeta, \quad (21)$$

де $0 < \alpha_j < 1$, якщо $\beta_j \in (-1, 0)$, і $0 < \alpha_j < 1/(\beta_j + 1)$, якщо $\beta_j \in [0, 1]$, і стала c не залежить від ζ .

Тоді:

1) функції $\Omega_1^{\varphi_l}$, $\Omega_2^{\varphi_l}$ при $l \in \{1, 4\}$ задовольняють умови лем 1, 2, накладені на функцію Ω , в яких треба покласти

$$\beta := \max \left\{ \max_{\beta_j \in [0, 1]} \{(\beta_j + 1) \alpha_j\}, \max_{\beta_j \in (-1, 0)} \{(\beta_j + 1) \alpha_j - \beta_j\} \right\},$$

$$\beta_0 := \max \{0, -\beta_1, -\beta_2, \dots, -\beta_m\}$$

і $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \omega$, де функція ω визначається рівністю

$$\omega(\varepsilon) := \begin{cases} \omega_1^*(\varepsilon), & \text{якщо } \mathcal{R}(Z) \leq r_0/2, \\ \omega_1(\varepsilon) + \omega_1^*(\varepsilon), & \text{якщо } \mathcal{R}(Z) > r_0/2; \end{cases}$$

2) функції $\Omega_1^{\varphi_l}, \Omega_2^{\varphi_l}$ при $l \in \{1, 4\}$ задовольняють умови лема 3, накладені на функцію Ω , в яких треба покласти $\gamma_j = (\beta_j + 1)\alpha_j$ та $\gamma'_j = -\beta_j$, якщо $\beta_j \in (-1, 0)$, і $\gamma'_j = 0$, якщо $\beta_j \in [0, 1]$.

Доведення лема 4 проведено у роботах [20, 21].

Лема 5. Нехай виконуються умови лема 4. Тоді для функції (16), де $\zeta = \tilde{\sigma}(Z)$, при кожному $Z_0 \in \Gamma \setminus \mathcal{X}$ виконуються рівності

$$\begin{aligned} \lim_{Z \rightarrow Z_0, Z \in \mathcal{U}} U_1 [\Phi(\zeta)] &= \frac{1}{2} \tilde{\varphi}_1(Z_0) + \operatorname{Re} \left(\mathcal{I} [\Omega_*^{\tilde{\varphi}}] (Z_0) \right) + C_{\tilde{\varphi}_1}, \\ \lim_{Z \rightarrow Z_0, Z \in \mathcal{U}} U_4 [\Phi(\zeta)] &= \frac{1}{2} \tilde{\varphi}_4(Z_0) + \operatorname{Im} \left(\mathcal{I} [\Omega_{**}^{\tilde{\varphi}}] (Z_0) \right) + C_{\tilde{\varphi}_4}, \end{aligned} \quad (22)$$

де

$$\tilde{\varphi}_l(Z_0) := \varphi_l(\tilde{\sigma}(Z_0)), \quad l \in \{1, 4\}, \quad (23)$$

$$\Omega_*^{\tilde{\varphi}}(S, Z) := \Omega_1^{\tilde{\varphi}_1}(S, Z) + 2i \Omega_2^{\tilde{\varphi}_1}(S, Z) - 2i \Omega_2^{\tilde{\varphi}_4}(S, Z), \quad (24)$$

$$\Omega_{**}^{\tilde{\varphi}}(S, Z) := -2 \Omega_2^{\tilde{\varphi}_1}(S, Z) + i \Omega_1^{\tilde{\varphi}_4}(S, Z) + 2 \Omega_2^{\tilde{\varphi}_4}(S, Z), \quad (25)$$

$$\mathcal{I} [\Omega^{\tilde{\varphi}}] (Z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Omega^{\tilde{\varphi}}(S, Z)}{S - Z} dS \quad \forall Z \in \overline{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{X}, \quad (26)$$

$$C_{\tilde{\varphi}_l} := \frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{\varphi}_l(S)}{S} dS, \quad l \in \{1, 4\}. \quad (27)$$

Доведення. З урахуванням співвідношень (17)–(20) і (23)–(26) та правил множення (5) в бігармоніній алгебрі перепишемо рівність (16) у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= e_1 \left(\mathcal{I} [\Omega_*^{\tilde{\varphi}}] (Z) + \frac{1}{2} \mathcal{S} [\tilde{\varphi}_1] (Z) + C_{\tilde{\varphi}_1} \right) + \\ &\quad + e_2 \left(\mathcal{I} [\Omega_{**}^{\tilde{\varphi}}] (Z) + \frac{i}{2} \mathcal{S} [\tilde{\varphi}_4] (Z) + i C_{\tilde{\varphi}_4} \right) \quad \forall Z \in \mathcal{U}, \end{aligned}$$

де

$$\mathcal{S} [\tilde{\varphi}_l] (Z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tilde{\varphi}_l(S)}{S} \frac{S + Z}{S - Z} dS \quad \forall Z \in \mathcal{U}, \quad l \in \{1, 4\}, \quad -$$

комплексний інтеграл Шварца.

Оскільки сталі $C_{\tilde{\varphi}_1}$ і $C_{\tilde{\varphi}_4}$ – дійсні, то

$$\begin{aligned} U_1 [\Phi(\zeta)] &= \operatorname{Re} \left(\mathcal{I} [\Omega_*^{\tilde{\varphi}}] (Z) + \frac{1}{2} \mathcal{S} [\tilde{\varphi}_1] (Z) \right) + C_{\tilde{\varphi}_1}, \\ U_4 [\Phi(\zeta)] &= \operatorname{Im} \left(\mathcal{I} [\Omega_{**}^{\tilde{\varphi}}] (Z) + \frac{i}{2} \mathcal{S} [\tilde{\varphi}_4] (Z) \right) + C_{\tilde{\varphi}_4}. \end{aligned} \quad (28)$$

Нехай $Z_0 \in \Gamma \setminus \mathcal{X}$. За умов леми 4, враховуючи лему 1, маємо рівності

$$\lim_{Z \rightarrow Z_0, Z \in \mathcal{U}} \mathcal{I} \left[\Omega_*^{\tilde{\varphi}} \right] (Z) = \mathcal{I} \left[\Omega_*^{\tilde{\varphi}} \right] (Z_0), \quad \lim_{Z \rightarrow Z_0, Z \in \mathcal{U}} \mathcal{I} \left[\Omega_{**}^{\tilde{\varphi}} \right] (Z) = \mathcal{I} \left[\Omega_{**}^{\tilde{\varphi}} \right] (Z_0).$$

Крім того, для комплексного інтеграла Шварца виконуються рівності

$$\lim_{Z \rightarrow Z_0, Z \in \mathcal{U}} \operatorname{Re} \mathcal{S} [\tilde{\varphi}_l] (Z) = \tilde{\varphi}_l(Z_0), \quad l \in \{1, 4\}.$$

Тому, виконуючи граничний перехід у рівностях (28) при $Z \rightarrow Z_0$, $Z \in \mathcal{U}$, отримуємо рівності (22). $\square$

При відшуканні розв'язків (1-4)-задачі у класі функцій, що подаються у вигляді (10), припускаємо, що функції φ_1 і φ_4 з рівності (11) неперервні на $\partial D_\zeta \setminus \Upsilon_\zeta$ і задовольняють оцінку (21).

За умов леми 4 внаслідок оцінки

$$|d(S, Z)| \geq c \prod_{j=1}^m \left(|S - X_j| + |Z - X_j| \right)^{\beta_j} \quad \forall Z \in \overline{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{X} \quad \forall S \in \Gamma \setminus \mathcal{X},$$

де стала c не залежить від S і Z (див. лему 7 у роботах [20, 21]), маємо співвідношення

$$|\sigma(S) - \sigma(X_j)|^{\alpha_j} = |d(S, X_j)|^{\alpha_j} |S - X_j|^{\alpha_j} \geq c |S - X_j|^{(\beta_j+1)\alpha_j}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (29)$$

де стала c не залежить від S і X_j .

З нерівностей (21) і (29) випливає, що функції (23) задовольняють нерівність

$$|\tilde{\varphi}_l(S)| \leq c \prod_{j=1}^m |S - X_j|^{-\gamma_j} \quad \forall S \in \Gamma \setminus \mathcal{X}, \quad (30)$$

де $\gamma_j = (\beta_j + 1)\alpha_j < 1$ і стала c не залежить від S .

Через $\mathcal{K}\{\gamma_j\}_{j=1}^m$ позначимо клас функцій $\tilde{u}: \Gamma \setminus \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, що неперервні на $\Gamma \setminus \mathcal{X}$ і задовольняють оцінку (30), у якій усі $\gamma_j \in (0, 1)$ і стала c не залежить від S .

Введемо в розгляд функції, асоційовані з крайовими умовами (8) кусково-неперервної (1-4)-задачі:

$$\tilde{u}_l(Z_0) := u_l(\tilde{\sigma}(Z_0)) \quad \forall Z_0 \in \Gamma \setminus \mathcal{X}, \quad l \in \{1, 4\}.$$

Основним результатом роботи є наступна

Теорема. *Нехай межа області D_ζ така, що виконуються умови а) і б) леми 4, і нехай функції $u_j: \partial D_\zeta \setminus \Upsilon_\zeta \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in \{1, 4\}$, — неперервні на $\partial D_\zeta \setminus \Upsilon_\zeta$ і задовольняють оцінку вигляду (21). Тоді розв'язання кусково-неперервної (1-4)-задачі у класі функцій, що подаються у вигляді (10), при цьому функції φ_1 і φ_4 з*

рівності (11) неперервні на $\partial D_\zeta \setminus \Upsilon_\zeta$ і задовольняють оцінку (21), зводиться до розв'язання у класі функцій $\mathcal{K}\{\gamma_j\}_{j=1}^m$ системи інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tilde{\varphi}_1(Z_0) + \operatorname{Re} \left(\mathcal{I} \left[\Omega_1^{\tilde{\varphi}_1} \right] (Z_0) \right) - 2 \operatorname{Im} \left(\mathcal{I} \left[\Omega_2^{\tilde{\varphi}_1} \right] (Z_0) \right) + \\ + 2 \operatorname{Im} \left(\mathcal{I} \left[\Omega_2^{\tilde{\varphi}_4} \right] (Z_0) \right) + C_{\tilde{\varphi}_1} = \tilde{u}_1(Z_0), \\ \frac{1}{2} \tilde{\varphi}_4(Z_0) + \operatorname{Re} \left(\mathcal{I} \left[\Omega_1^{\tilde{\varphi}_4} \right] (Z_0) \right) + 2 \operatorname{Im} \left(\mathcal{I} \left[\Omega_2^{\tilde{\varphi}_4} \right] (Z_0) \right) - \\ - 2 \operatorname{Im} \left(\mathcal{I} \left[\Omega_2^{\tilde{\varphi}_1} \right] (Z_0) \right) + C_{\tilde{\varphi}_4} = \tilde{u}_4(Z_0) \quad \forall Z_0 \in \Gamma \setminus \mathcal{X}, \end{aligned} \quad (31)$$

де інтеграл $\mathcal{I}$ визначений рівністю (26), функції $\tilde{\varphi}_l$ і сталі $C_{\tilde{\varphi}_l}$ при $l \in \{1, 4\}$ визначені відповідно рівностями (23) і (27).

Доведення. Враховуючи рівності (22), (24) і (25), переписуємо крайові умови (8) кусково-неперервної (1-4)-задачі у вигляді системи інтегральних рівнянь (31) для відшукування функцій $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_4 \in \mathcal{K}\{\gamma_j\}_{j=1}^m$, де задані функції $\tilde{u}_1$ і $\tilde{u}_4$ також належать класу $\mathcal{K}\{\gamma_j\}_{j=1}^m$.

З лем 2 і 3 випливає, що клас функцій $\mathcal{K}\{\gamma_j\}_{j=1}^m$ є інваріантним відносно інтегральних операторів із лівих частин рівнянь (31). Отже, можна стверджувати, що розв'язання кусково-неперервної (1-4)-задачі у класі функцій, що подаються у вигляді (10) з наведеними в теоремі припущеннями про функції φ_1 і φ_4 з рівності (11), еквівалентне розв'язанню системи інтегральних рівнянь (31) у класі $\mathcal{K}\{\gamma_j\}_{j=1}^m$. $\square$

Зауваження 1. Серед областей D_ζ , що задовольняють умови теореми 2, є області, межа яких в точках набору Υ_ζ може утворювати нульові кути з вістрям, направленим всередину області. Такою, наприклад, є область, конгруентний "двійник" якої D_z у комплексній площині є образом одиничного круга $\mathcal{U}$ при конформному відображенні $\sigma(Z) = (Z + 1)^2$.

Зауваження 2. Якщо в усіх інтегралах, що входять в рівняння системи (31), інтегрування по колу Γ замінити інтегруванням по множині $\Gamma \setminus \Gamma_\delta \langle \mathcal{X} \rangle$ при достатньо малому $\delta > 0$, то в силу леми отримані інтеграли задаватимуть компактні оператори в банаховому просторі неперервних на $\Gamma \setminus \Gamma_\delta \langle \mathcal{X} \rangle$ функцій при стандартному визначенні норми такого простору. Отже, рівняння, отримані з рівнянь системи (31) в результаті зазначеної заміни множини інтегрування, будуть фредгольмовими у банаховому просторі неперервних на $\Gamma \setminus \Gamma_\delta \langle \mathcal{X} \rangle$ функцій при усіх достатньо малих $\delta > 0$. У той же час, питання про збіжність розв'язків вказаних рівнянь при $\delta \rightarrow 0 + 0$ у належних вагових просторах функцій класу $\mathcal{K}\{\gamma_j\}_{j=1}^m$ потребує спеціального дослідження.

5. Висновки.

У роботі розроблено схему розв'язання кусково-неперервної крайової задачі типу задачі Шварца в областях з кутовими точками для моногенних функцій в бігармонічній алгебрі. Вказана задача асоційована з крайовою задачею типу задачі зі зміщеннями для ізотропного плоского середовища. Розвинуто метод зведення

цих крайових задач до системи інтегральних рівнянь, який базується на зображенні розв'язків у вигляді гіперкомплексного інтеграла типу Коші.

Цитована література

1. Gryshchuk S. V. $\mathbb{B}$ -valued monogenic functions and their applications to boundary value problems in displacements of 2-D Elasticity // Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE 2015, S. V. Rogosin and M. V. Dubatovskaya (Eds.), Cambridge Scientific Publishers Ltd. – 2016. – P. 37–47.
2. Михлин С. Г. Плоская задача теории упругости // Труды сейсм. ин-та АН СССР. – 1934. – № 65. – 83 с.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 708 с.
4. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. Тр. ММО. – 1967. – Т. 16. – Москва: Изд-во Московского университета. – С. 209–292.
5. Kufner A., Sändig A.-M. Some applications of weighted Sobolev spaces (TEUBNER-TEXTE zur Mathematik, Vol. 100). BSB BG Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1987. – 268 p.
6. Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B. Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Vol. 1 (Operator Theory Advances and Applications, Vol. 111), Springer Science & Business Media, 2000.
7. Mikhlin S. G., Morozov N. F., Paukshto M. V. The integral equations of the theory of elasticity (TEUBNER-TEXTE zur Mathematik, Vol. 135). – Stuttgart–Stiint. etc.: Springer, 1995.
8. Lurie A. I. Theory of Elasticity. Engl. transl. by A. Belyaev. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 2005.
9. Gryshchuk S. V., Plaksa S. A., Schwartz-Type Boundary Value Problems for Monogenic Functions in a Biharmonic Algebra // S. Rogosin, A. Çelebi (eds.), Analysis as a Life, Dedicated to Heinrich Begehr on the Occasion of his 80th Birthday (Trends in Mathematics), Birkhäuser, P. 193–211, 2019.
10. Gryshchuk S. V., Plaksa S. A., A Hypercomplex Method for Solving Boundary Value Problems for Biharmonic Functions // Š. Hošková-Mayerová, C. Flaut, F. Maturo (eds), Algorithms as a Basis of Modern Applied Mathematics (Studies in Fuzziness and Soft Computing). – 2021. – Vol. 404. – P. 231–255.
11. Gryshchuk S. V., Plaksa S. A., Reduction of a Schwartz-type boundary value problem for biharmonic monogenic functions to Fredholm integral equations // Open Math. – 2017. – Vol. 15, No. 1. – P. 374–381.
12. Ковалев В. Ф., Мельниченко И. П. Бигармонические функции на бигармонической плоскости // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1981. – № 8. – С. 25–27.
13. Мельниченко И. П. Бигармонические базисы в алгебрах второго ранга // Укр. мат. журн. – 1986. – Т. 38, №2. – С. 252–254.
14. Sobrero L. Nuovo metodo per lo studio dei problemi di elasticità, con applicazione al problema della piastra forata // Ricerche di Ingegneria. – 1934. – Vol. 13, №2. – P. 255–264.
15. Douglis A. A function-theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1953. – Vol. 6, No. 2. – P. 259–289.
16. Гришук С. В., Плакса С. А. Моногенные функции в бигармонической алгебре // Укр. мат. журн. – 2009. – Т. 61, №12. – С. 1587–1596.
17. Гришук С. В., Плакса С. А. Моногенные функции в бигармонической плоскости // Доповіді НАН України. – 2009. – № 12. – С. 13–20.
18. Gryshchuk S. V., Plaksa S. A. Basic Properties of Monogenic Functions in a Biharmonic Plane // M. L. Agranovskii, M. Ben-Artzi, G. Galloway, L. Karp, V. Maz'ya (eds.), “Complex Analysis and Dynamical Systems V”. Contemporary Mathematics, Amer. Math. Soc., Providence, RI. – 2013. – Vol. 591. – P. 127–134.
19. Ковалев В. Ф. Бигармоническая задача Шварца. – Киев, (Препр. / НАН Украины. Ин-т ма-

тематики; 86.16), 1986, 19 с.

20. Gryshchuk S. V., Plaksa S. A., A hypercomplex method for solving piecewise continuous biharmonic problem in domains with corner points // ArXiv preprint. – 2025. – arXiv:2504.17351 [math.CV]. – 30 p. (in Ukrainian).
21. Гришчук С. В., Плакса С. А. Гіперкомпліксний метод розв'язування кусково-неперервної бігармонічної задачі в областях з кутовими точками // Укр. мат. журн. – 2025. – Т. 77, №11. – С. 659–691.
22. Walsh J. L., Sewell W. E. Sufficient conditions for various degrees of approximation by polynomials // Duke Math. J. – 1940. – Vol. 6. – P. 658–705.
23. Тамразов П. М. Гладкости и полиномиальные приближения. – Киев: Наукова думка, 1975. – 271 с.
24. Dzyadyk V. K., Shevchuk I. A. Theory of uniform approximation of functions by polynomials. – Berlin: De Gruyter, 2008.

References

1. Gryshchuk, S.V. (2016). $\mathbb{B}$ -valued monogenic functions and their applications to boundary value problems in displacements of 2-D Elasticity. *Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE 2015*, S. V. Rogosin and M. V. Dubatovskaya (Eds.), Cambridge Scientific Publishers Ltd, 37–47.
2. Mikhlin, S.G. (1935). The plane problem of the theory of elasticity. *Trans. Inst. of seismology Acad. Sci. USSR*, No. 65, Moscow–Leningrad: Acad. Sci. USSR Publ. House, 83 p.
3. Muskhelishvili, N.I. (1966). *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Moscow: Nauka, 708 p.
4. Kondrat'ev, V.A. (1967). Boundary-value problems for elliptic equations in domains with conic or angular points. *Tr. Mosk. Mat. Obshch.* 16, 209–292.
5. Kufner, A., Sändig, A.-M. (1987). *Some applications of weighted Sobolev spaces. (TEUBNER-TEXTE zur Mathematik, 100)*. BSB BG Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 268 p.
6. Maz'ya, V., Nazarov, S., Plamenevskij, B. (2000). *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Vol. 1 (Operator Theory Advances and Applications, 111)*. Springer Science & Business Media.
7. Mikhlin, S.G., Morozov, N.F., Paukshto, M.V. (1995). *The integral equations of the theory of elasticity (TEUBNER-TEXTE zur Mathematik, 135)*. Stuttgart – Stint. etc.: Springer.
8. Lurie, A.I. (2005). *Theory of Elasticity. Engl. transl. by A. Belyaev*. Berlin etc.: Springer-Verlag.
9. Gryshchuk, S.V., Plaksa, S.A. (2019). *Schwartz-Type Boundary Value Problems for Monogenic Functions in a Biharmonic Algebra*. In: S. Rogosin, A. Çelebi (eds.), *Analysis as a Life, Dedicated to Heinrich Begehr on the Occasion of his 80th Birthday (Trends in Mathematics)*, Birkhäuser, P. 193–211.
10. Gryshchuk, S.V., Plaksa, S.A. (2021). *A Hypercomplex Method for Solving Boundary Value Problems for Biharmonic Functions*. In: Š. Hošková-Mayerová, C. Flaut, F. Maturo (eds), *Algorithms as a Basis of Modern Applied Mathematics (Studies in Fuzziness and Soft Computing), 404*, Springer, Cham, P. 231–255.
11. Gryshchuk, S.V., Plaksa S.A. (2017). Reduction of a Schwartz-type boundary value problem for biharmonic monogenic functions to Fredholm integral equations. *Open Math.* 15(1), P. 374–381.
12. Kovalev V. F., Mel'nichenko I. P. (1981). Biharmonic functions on the biharmonic plane *Reports Acad. Sci. USSR Ser. A*, 8, P. 25–27 (in Russian).
13. Mel'nichenko I. P. (1986). Biharmonic bases in algebras of the second rank. *Ukr. Math. J.*, 38(2), P. 224–214.
14. Sobrero L. (1934). Nuovo metodo per lo studio dei problemi di elasticità, con applicazione al problema della piastra forata. *Ricerche di Ingegneria*, 13(2), 255–264 .
15. Douglis A. (1953). A function-theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables. *Communications on Pure and Applied Mathematics.* 6 (2), P. 259–289.
16. Gryshchuk, S.V., Plaksa, S.A. (2009). Monogenic functions in a biharmonic algebra. *Ukr. Mat. Zh.*

- 61(12), P. 1587–1596 (in Russian); English transl. (2009) in *Ukr. Math. J.* 61(12), P. 1865–1876.
17. Gryshchuk, S.V., Plaksa, S.A. (2009). Monogenic functions in a biharmonic plane. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr.* No. 12, P. 13–20 (in Russian).
18. Gryshchuk, S.V., Plaksa, S.A. (2013). *Basic Properties of Monogenic Functions in a Biharmonic Plane*. In: Agranovskii, M.L., Ben-Artzi, M., Galloway, G., Karp, L., Maz'ya, V. (eds.), "Complex Analysis and Dynamical Systems V". Contemporary Mathematics, Vol. 591, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 127–134.
19. Kovalev, V.F. (1986). *Biharmonic Schwarz problem*. Preprint No. 86.16. Institute of Mathematics, Academy of Sciences USSR, Kiev: Institute of Mathematical Publications, 19 p.
20. Gryshchuk, S.V., Plaksa, S.A. (2025). A hypercomplex method for solving piecewise continuous biharmonic problem in domains with corner points. *ArXiv preprint (arXiv:2504.17351 [math.CV])*, 30 p.
21. Gryshchuk, S.V., Plaksa, S.A. (2025). A hypercomplex method for solving piecewise continuous biharmonic problem in domains with corner points. *Ukr. Mat. Zh.* 77(11), P. 659–691 (in Ukrainian); English transl. (2025) in *Ukr. Math. J.* 77(11), P. 1446–1481.
22. Walsh, J.L., Sewell, W.E. (1940). Sufficient conditions for various degrees of approximation by polynomials. *Duke Math. J.*, 6, P. 658–705.
23. Tamrazov, P.M. (1975). *Smoothnesses and polynomial approximations*. Kiev: Naukova Dumka, 271 p.
24. Dzyadyk, V.K., Shevchuk, I.A., *Theory of uniform approximation of functions by polynomials*. Berlin: De Gruyter, 2008.

S.V. Gryshchuk, S.A. Plaksa

Piecewise-continuous Schwarz type problem in domains with corner points for monogenic functions in a biharmonic algebra.

A piecewise continuous biharmonic problem in domains with corner points for monogenic functions in a commutative biharmonic algebra, associated with the displacements-type boundary value problem for an isotropic plane medium, is considered. A method of finding solutions for these boundary value problems is based on representing the solutions by hypercomplex integrals analogously to the classical Schwarz integrals and Cauchy-type integrals and using conformal mapping from the unit disk onto the domain which is congruent to the given domain with corner points. This hypercomplex method reduces these boundary value problems directly to a system of integral equations bypassing integro-differential equations which is usually appears in the theory of elasticity. This system of integral equations has a Fredholm property at the points of the unit circle without some discs centered in the corner points.

Keywords: biharmonic equation, biharmonic algebra, biharmonic plane, monogenic function, Schwarz-type boundary value problem for monogenic functions, displacement type boundary value problem.

Інститут математики НАН України,
Київ

Отримано 18.09.25

serhii.gryshchuk@gmail.com, plaksa@imath.kiev.ua