

УДК 533.6.013.42

DOI: 10.37069/1683-4720-2025-39-12

©2025. Ю.М. Кононов, А.А. Зарецький, С.В. Сапунов

ПРО КОЛИВАННЯ КРУГОВОЇ ПЛАСТИНИ, ЯКА ГОРИЗОНТАЛЬНО РОЗДІЛЯЄ РІДИНИ РІЗНОЇ ГУСТИНИ У ЦИЛІНДРИЧНОМУ РЕЗЕРВУАРІ

Отримано частотне рівняння вільних коливань кругової пластини, яка горизонтально розділяє ідеальні нестисливі рідини різної густини у циліндричному резервуарі. Проведено дослідження впливу затиснутого, опертого і вільного країв пластини на частотний спектр сумісних коливань пластини і рідини. Розглянуто різні граничні випадки виродження пластини в мембрану, її відсутність, випадок відсутності верхньої або нижньої рідини, а також випадок невагомості. Проведені чисельні дослідження на випадок невагомості та безмасової пластини. Показано, що нестійкість сумісних коливань пластини і рідини може виникнути, коли більш важка рідина знаходиться над менш важкої рідиною.

MSC: 74F10.

Ключові слова: гідропружність, кругова пластина, ідеальна нестислива рідина, циліндрична порожнина, вільні сумісні коливання пластини і рідини.

1. Вступ.

Можливо, що однією з перших статей, у якій було розглянуто рух твердого тіла з ідеальною рідиною з пружною пластиною або мембраною на вільній поверхні, була робота [1], в якій в аналітичному вигляді отримані динамічні характеристики системи тверде тіло – рідина – пластина для загально випадку конфігурації резервуару. Продовженням цієї роботи, з більш складними постановками, були статті [2, 3], монографії [4, 5] та багато інших робіт. У статті [2] розглянуто у лінійній постановці задачу про поступальні і обертальні коливання циліндричного резервуара з пружним дном та ідеальною рідиною з вільною поверхнею. Задачі динаміки твердого тіла і гідропружності зведені до зліченної системи звичайних диференціальних рівнянь. Виведено вирази для приєднаної маси та приєданого моменту інерції рідини. Робота [3] узагальнює задачу Л.М. Сретенського і задачу про коливання фізичного маятника на випадок багатошарової рідини, розділеної пружними пластинами. Монографія [4] присвячена роз'язанню крайових задач теорії руху твердого тіла з порожнинами, які частково заповнені ідеальною рідиною та містять абсолютно жорсткі або пружні ребра-перегородки. У монографії [5] розвинуто варіаційний метод знаходження наближеного роз'язку сингулярно збуреної задачі про вільні коливання довільних тонких оболонок обертання та оболонок обертання з ідеальною рідиною.

Центральною проблемою задачі про рух твердого тіла з рідиною та пружни-

This work was supported by a grant from the Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00017674, Yuriy Kononov, Andrii Zaretskiy, Sergey Sapunov)

ми елементами є проблема отримання власних частот і власних форм спільних коливань цих елементів та рідини [1–10]. У статті [6] досліджені коливання ідеальної рідини в круглому циліндричному резервуарі з пружними основами у вигляді круглих пластин. Запропоновано аналітичний метод, заснований на розкладанні Фур'є–Бесселя і методі Релея–Рітца. Вільні коливання довільної пластини, яка горизонтально розділяє ідеальні нестисливі рідини різної густини в жорсткому циліндричному резервуарі довільного поперечного перерізу з пружними основами, розглянуті у [7]. Робота [8] присвячена дослідженню частотних рівнянь несиметричних і симетричних власних коливань ідеальної двошарової рідини в жорсткому круглому циліндричному резервуарі з пружним верхом і дном у вигляді затиснутих круглих пластин. На прикладі однорідної рідини з вільною поверхнею і пружним дном у вигляді мембрани проаналізовано аналітично і чисельно частотний спектр спільних коливань мембрани і рідини. У роботі [9] розглянута задача про вільні коливання пластини, яка горизонтально розділяє ідеальні рідини різної густини в жорсткому циліндричному резервуарі довільного поперечного перерізу. Для розв'язання ускладненого неоднорідного бігармонічного рівняння було використано фундаментальну систему рішень бігармонічного рівняння (ФСР) та власні форми коливань ідеальної рідини в циліндричній порожнині. На прикладі затиснутої пластини проведено спрощення частотного рівняння за допомогою розкладання однорідного бігармонічного рівняння на два гармонічних рівнянь та за допомогою формули Гріна для оператора Лапласа. Показано, що в цьому випадку частотне рівняння не залежить від ФСР, що значно спростило це рівняння, так як ФСР залежить від невідомої частоти. Отримане рівняння має єдину форму для випадків прямого кругового циліндру та прямокутного каналу і для окремих випадків збігається з раніше отриманими рівняннями. Проведені дослідження несиметричних частот коливань пластини і осесиметричних частот коливань мембрани в круговому циліндрі. Наведено наближену формулу для великих частот, а також наближені умови стійкості коливань пластини і мембрани. Стаття [10] присвячена аналітичному і чисельному дослідженню частотного спектру та стійкості плоских коливань прямокутної пластини, яка поділяє рідини різної густини у нескінченно довгому прямокутному паралелепіпеді.

Дана стаття узагальнює результати статті [10] на випадок просторових коливань кругової пластини, яка горизонтально розділяє ідеальні рідини різної густини у циліндричному резервуарі. Проведені чисельні дослідження впливу способів закріплення на сумісні коливання пластини і рідини.

2. Постановка задачі. Основні рівняння.

Розглянемо коливання пружної кругової пластини, яка горизонтально розділяє ідеальні нестисливі рідини різної густини ρ_i ($i = 1, 2$) в жорсткому циліндричному резервуарі радіусу a . Пластина має постійну згинальну жорсткість D і схильна до розтягуючих зусиль інтенсивності T в серединній поверхні. Контур пластини може бути затиснений, опертий або вільний. Верхня рідина щільності ρ_1 заповнює канал до глибини h_1 , а нижня рідина щільності ρ_2 до глибини h_2 . Систему координат $Oxyz$ розташуємо так, щоб площина Oxy перебувала на незбуреній серединній

поверхні пластини, а вісь Oz – протилежно вектору прискорення сили тяжіння g (рис. 1). Коливання пластини і рідини будемо розглядати в лінійній постановці, вважаючи спільні коливання пластини і рідини безвідривними, а руху рідин потенційним.

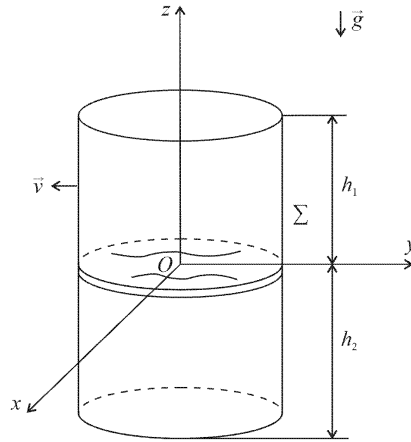


Рис. 1. Циліндричний резервуар з рідиною різної густини, яка розділена пружною пластиною.

Рівняння коливань пружної пластини і рідини мають вигляд (1–2):

$$k_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D \Delta_2^2 W - T \Delta_2 W = \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \quad \text{при } z = 0, \quad (1)$$

$$\Delta \Phi_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

з граничними умовами:

$$\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \right) \Big|_{\gamma} = 0 \quad (i = 1, 2); \quad \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \quad \text{при } z = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = h_1; \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -h_2, \quad (4)$$

$$(\mathcal{L}_l(W))|_{\gamma} = 0 \quad (l = 1, 2) \quad (5)$$

$$\int_S W ds = 0 \quad (6)$$

Тут $k_0 = \rho_0 h_0$; Δ_2 – двовірний оператор Лапласа, а Δ – тривимірний; $W(r, \theta, t)$, ρ_0 , h_0 – відповідно нормальний прогин, густина і товщина пластини; $\Phi_i(r, \theta, z, t)$ – потенціал швидкостей i -ої рідини ($i = 1, 2$); S – площа круга, а γ ($r = a$) –

контур цього круга; L_1 і L_2 – диференціальні оператори граничних умов закріплення кругової пластини по її контуру γ ($r = a$). Так, наприклад, для затиснутого контуру оператор L_1 буде одиничним, а $L_2 = d/dr$; $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$.

У разі виродження пружної пластини в мембрану, яка закріплена по контуру, слід в рівняннях (1) циліндричну жорсткість покласти рівною нулю ($D = 0$), а в граничних умовах (6) оператори L_l вважати $L_1 \equiv 1$, а $L_2 \equiv 0$.

Далі будемо розглядати неосесиметричні спільні коливання пластини і рідини ($m \neq 0$). У цьому разі представимо потенціал швидкостей $\Phi_i(x, z, t)$ у вигляді узагальнених рядів Фур'є

$$\Phi_i(r, \theta, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \left[A_{ipm}(t)e^{k_{pm}z} + B_{ipm}(t)e^{-k_{pm}z} \right] \psi_{pm}(r, \theta) \quad (i = 1, 2). \quad (7)$$

Тут індекси m і p відповідають кутовим і радіальним гармонікам, власні функції $\psi_{pm}(r, \theta)$ мають вигляд

$$\psi_{pm}(r, \theta) = J_m(k_{pm}r) (\cos m\theta + \beta_{pm} \sin m\theta),$$

а відповідні їм власні числа $k_{pm} = \xi_{pm}/a$, де ξ_{pm} – p -ий корінь рівняння $J'_m(\xi_{pm}) = 0$, J_m – функція Бесселя першого роду.

Скориставшись ортогональністю функцій ψ_{pm} , отримаємо лінійну систему рівнянь щодо невідомих A_{ipm} , B_{ipm} і W_{pm}

$$\begin{aligned} A_{1pm} - B_{1pm} &= \frac{1}{k_{pm}} \dot{W}_{pm}, & A_{1pm} - B_{1pm} &= A_{2pm} - B_{2pm} \\ A_{1pm}e^{\kappa_{1pm}} - B_{1pm}e^{-\kappa_{1pm}} &= 0, & A_{2pm}e^{-\kappa_{2pm}} - B_{2pm}e^{\kappa_{2pm}} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Система (8) має розв'язки

$$\begin{aligned} A_{1pm} &= -\frac{\dot{W}_{pm}e^{-\kappa_{1pm}}}{2k_{pm} \sinh \kappa_{1pm}}, & B_{1pm} &= -\frac{\dot{W}_{pm}e^{\kappa_{1pm}}}{2k_{pm} \sinh \kappa_{1pm}} \\ A_{2pm} &= \frac{\dot{W}_{pm}e^{\kappa_{2pm}}}{2k_{pm} \sinh \kappa_{2pm}}, & B_{2pm} &= \frac{\dot{W}_{pm}e^{-\kappa_{2pm}}}{2k_{pm} \sinh \kappa_{2pm}} \end{aligned} \quad (9)$$

Тут

$$W_{pm} = \frac{1}{N_{pm}^2} \int_S W \psi_{pm} ds, \quad (10)$$

де $N_{pm}^2 = \int_S \psi_{nm}^2 ds$, $\kappa_{ipm} = h_i k_{pm}$.

З урахуванням співвідношень (7) і (9) рівняння (1) набуде вигляду

$$k_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D \Delta_2^2 W - T \Delta_2 W + g \Delta \rho W = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_{pm} \ddot{W}_{pm}}{k_{pm}} \psi_{pm}. \quad (11)$$

Тут $a_{pm} = \rho_1 \coth \kappa_{1pm} + \rho_2 \coth \kappa_{2pm}$.

Таким чином, спільні коливання пружної пластини і рідини знаходяться з системи інтегро-диференціальних рівнянь (10) – (11), граничних умов (5), умов збереження обсягу нестисливості рідини (6) і заданих початкових умов.

3. Власні частоти спільних коливань пружної пластини і рідини.

Для знаходження власних частот спільних коливань пружної пластини і рідини покладемо

$$W(r, \theta, t) = w(r, \theta) e^{i\omega t}. \quad (12)$$

Підставивши (12) в (10) – (11), в граничні умови (5) і умови (6), отримаємо

$$\Delta_2^2 w - P \Delta_2 W + q w = \frac{\omega^2}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_{pm} w_{pm}}{k_{pm}} \psi_{pm} \quad (13)$$

$$w_{pm} = \frac{1}{\tilde{N}_{pm}^2} \int_0^a w J_m(k_{pm} r) dr \quad (14)$$

$$(L_l w)|_{\gamma} = 0, \quad (l = 1, 2) \quad (15)$$

$$\int_S w ds = 0 \quad (16)$$

Тут $P = T/D$, $q = (g\Delta\rho - k_0\omega^2)/D$ ($D \neq 0$), $C = C_0/D$.

Отже, власні частоти и форми спільних коливання пружної пластини і рідини знаходяться з системи інтегро-диференціальних рівнянь (13) – (14), граничних умов (15) і умови (16).

Крайова задача (13) – (14) після відокремлення кругової координати отримає вигляд:

$$A_m^2(w) - P A_m(w) + q w = \frac{\omega^2}{D} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_{pm} w_{pm}}{k_{pm}} \tilde{\psi}_{pm}, \quad (17)$$

$$w_{pm} = \frac{1}{\tilde{N}_{pm}^2} \int_0^a \tilde{w} \tilde{\psi}_{pm} r dr, \quad (18)$$

$$(L_l w)|_{\gamma} = 0, \quad (l = 1, 2), \quad (19)$$

$$\int_S w ds = 0, \quad (20)$$

де оператор $A_m = \frac{1}{r} \frac{1}{dr} \left(r \frac{1}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2}$, $\tilde{\psi}_{pm} = J_m(k_{pm} r) / J_m(\xi_{pm})$.

Розв'язок рівняння (17) будемо шукати у вигляді загального рішення однорідного рівняння і частинного неоднорідного

$$w = \sum_{k=1}^2 A_k^0 w_k^0 + \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{C}_{pm} \tilde{\psi}_{pm}, \quad (21)$$

де w_k^0 ($k = 1, 2$) – фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння

$$A_m^2(w) - PA_m(w) + qw = 0, \quad (22)$$

а невідомі константи $\tilde{C}_{pm}$ виразимо через константи A_k^0 , які будуть знайдені з умов закріплення пластини.

У разі виродження пластини в мембрану ($D = 0$) рівняння (17) і (22) запишуться так:

$$A_m w - qw = -\frac{\omega^2}{T} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_{pm} w_{pm}}{k_{pm}} \tilde{\psi}_{pm}, \quad A_m w_k^0 - qw_k^0 = 0 \quad (k = \overline{1, 2})$$

де для мембрани $q = (g\Delta\rho - k_0\omega^2)/T$, $C = -C_0/T$.

Підставивши (21) у рівняння (17) і скориставшись співвідношеннями $A_m \tilde{\psi}_{pm} = -k_{pm}^2 \tilde{\psi}_{pm}$, $A_m^2 \tilde{\psi}_{pm} = k_{pm}^4$ [7], виразимо константу $\tilde{C}_{pm}$ через w_{pm}

$$\tilde{C}_{pm} = \omega^2 a_{pm} w_{pm} / k_{pm} d_{pm}, \quad (23)$$

де $d_{pm} = (Dk_{pm}^2 + T) k_{pm}^2 + g\Delta\rho - k_0\omega^2$.

Підставивши (21) у (18) і враховуючи (23), отримаємо вираз для w_{pm}

$$w_{pm} = \frac{k_{pm} d_{pm}}{k_{pm} d_{pm} - \omega^2 a_{pm}} \sum_{k=1}^2 A_k^0 E_{kpm}^0 \quad (24)$$

Тут

$$\tilde{w}_k^0 = \frac{1}{N_{pm}^2} \int_0^a w_k^\sigma \tilde{\psi}_{pm} r dr \quad (25)$$

$$E_{kpm}^0 = \frac{1}{N_{pm}^2} \int_0^a w_k^\sigma \tilde{\psi}_{pm} r dr$$

З урахуванням (19), (23) і (24) остаточний вираз для прогину пластини w набуде вигляду

$$w = \sum_{k=1}^2 \left(w_k^0 - \tilde{w}_k^0 - \omega^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_{pm} E_{kpm}^0}{\omega^2 \tilde{a}_{pm} - k_{pm} \tilde{d}_{pm}} \tilde{\psi}_{pm} \right) A_k^0, \quad (26)$$

де $\tilde{a}_{pm} = a_{pm} + k_{pm} k_0$, $\tilde{d}_{pm} = (Dk_{pm}^2 + T) k_{pm}^2 + g\Delta\rho$.

У формулу (26) входить дві невідомі константи A_k^0 . З граничних умов закріплення пластини (20) маємо два лінійних однорідних рівняння відносно A_k^0

$$\sum_{k=1}^2 \left(L_{lk}^0 - \omega^2 \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{pm} E_{kpm}^0 L_{lpm} \right) A_k^0 = 0 \quad (l = 1, 2). \quad (27)$$

Тут

$$L_{lk}^0 = (L_l (w_k^0 - \tilde{w}_k^0))|_{\gamma}, \quad L_{lpm} = (L_l (\tilde{\psi}_{pm}))|_{\gamma}, \quad (28)$$

$$\alpha_{pm} = \frac{a_{pm}}{\omega^2 a_{pm} - k_{pm} d_{pm}} = \frac{a_{pm}}{\omega^2 \tilde{a}_{pm} - k_{pm} \tilde{d}_{pm}}. \quad (29)$$

З рівності нулю визначника однорідної системи (27) впливає частотне рівняння власних спільних коливань пружної пластини і рідини

$$\left| \|C_{lk}\|_{l,k=1}^2 \right| = 0, \quad (30)$$

де

$$C_{lk} = L_{lk}^0 - \omega^2 \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{pm} E_{kpm}^0 L_{lpm}, \quad (l, k = 1, 2). \quad (31)$$

4. Різні випадки закріплення контуру пластин.

Розглянемо три основних випадки закріплення контуру пластини: затиснений, опертий і вільний край. Запишемо оператори L_l ($l = 1, 2$) і значення функцій L_{lpm} для затиснутого, опертого і вільного краю. В подальшому будемо позначати оператор для затиснутого краю через B_l , для опертого – M_l і для вільного краю – L_l і відповідні функції через B_{lpm} , M_{lpm} і L_{lpm} .

Затиснутий край. Для найбільш цікавого і практично більш важливого випадку жорсткого защемлення пластинки оператор B_1 буде одиничним, а $B_2 = d/dr$. Згідно з введеними позначеннями (28), отримаємо

$$B_{1pm} = 1, \quad B_{2pm} = (d\tilde{\psi}_{pm}/dr)|_{\gamma}.$$

Таким чином

$$\begin{aligned} C_{1k} &= (w_k^0 - \tilde{w}_k^0)|_{\gamma} - \omega^2 \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{pm} E_{kpm}^0 \\ C_{2k} &= \left(\frac{d}{dr} (w_k^0 - \tilde{w}_k^0) \right)|_{\gamma} - \omega^2 \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{pm} E_{kpm}^0 B_{2pm}, \quad (k = 1, 2). \end{aligned} \quad (32)$$

Опертий край. Для опертого краю прогин і згинальний момент повинні перетворюватися в нуль, тому $M_1 = B_1$ буде одиничним, а $M_2 = \frac{d^2}{dr^2} + v \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right)$, де v – коефіцієнт Пуассону. Згідно з введеними позначеннями (28), маємо:

$$M_{1nm} = 1, \quad M_{2pm} = \left[M_2 \left(\tilde{\psi}_{pm} \right) \right] \Big|_{\gamma}. \quad (33)$$

Таким чином

$$C_{1k} = \left(w_k^0 - \tilde{w}_k^0 \right) \Big|_{\gamma} - \omega^2 \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{pm} E_{kpm}^0, \quad (34)$$

$$C_{2k} = \left[M_2 \left(w_k^0 - \tilde{w}_k^0 \right) \right] \Big|_{\gamma} - \omega^2 \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{pm} E_{kpm}^0 M_{2pm}, \quad (k = 1, 2),$$

де

$$M_2 (J_m(ax)) = \frac{1}{x^2} \left\{ ax(1-v) J_{m+1}(ax) + [m(m-1)(1-v) - a^2 x^2] J_m(ax) \right\}.$$

Вільний край. Для вільного краю необхідно, щоб момент і перерізальна сила перетворювалися в нуль. Розподілені крутні пари статично еквівалентні перерізальній силі, де згідно введеним позначенням (28), отримаємо:

$$L_1 = M_2 = \frac{d^2}{dr^2} + v \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right) \quad (35)$$

$$L_2 = \frac{d^3}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} - \frac{m^2(2-v)}{r^2} \frac{d}{dr} + \frac{m^2(3-v)}{r^3}.$$

Таким чином

$$C_{1k} = \left[M_2 \left(w_k^0 - \tilde{w}_k^0 \right) \right] \Big|_{\gamma} - \omega^2 \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{pm} E_{kpm}^0 M_{2pm}, \quad (36)$$

$$C_{2k} = \left[L_2 \left(w_k^0 - \tilde{w}_k^0 \right) \right] \Big|_{\gamma} - \omega^2 \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{pm} E_{kpm}^0 L_{2pm}, \quad (k = 1, 2),$$

де

$$L_2 (J_m(ax)) = \frac{1}{x^3} \left\{ ax [m^2(1-v) + a^2 x^2] J_{m+1}(ax) - \right. \\ \left. - m [m(m-1)(1-v) + a^2 x^2] J_m(ax) \right\}.$$

5. Деякі окремі випадки вихідної задачі.

Розглянемо ряд окремих випадків вихідної задачі, а саме: відсутність верхньої або нижньої рідини, відсутність гравітації й випадок відсутності пластини.

Випадок відсутності верхньої рідини ($\rho_1 = 0$). Поклавши в основному рівнянні (30) густину верхньої рідини рівною нулю $\rho_1 = 0$, отримаємо розв'язок даної задачі.

В разі затиснутого, опертого і вільного країв коефіцієнти частотного рівняння (30) будуть мати відповідно вигляд (32), (34) і (36), де $\rho_1 = 0$, $a_{pm} = \rho_2 \coth \kappa_{2pm}$, $\Delta\rho = \rho_2$.

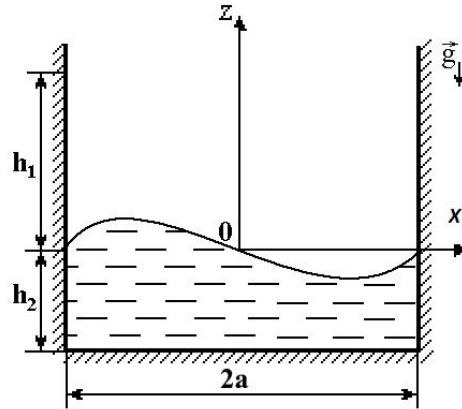


Рис. 2. Випадок відсутності верхньої рідини ($\rho_1 = 0$).

Випадок відсутності нижньої рідини ($\rho_2 = 0$). Цей випадок цікавий тим, що дозволяє розглянути нову задачу про власні коливання пластини і рідини в циліндричному резервуарі з жорсткою верхньою і пружною нижньою основами. Надалі такий випадок будемо називати випадок «перекинутого» циліндричного резервуару.

Поклавши в основному рівнянні (30) густину нижньої рідини рівною нулю ($\rho_2 = 0$), отримаємо розв'язок даної задачі.

Як і раніше, в разі затиснутого, опертого і вільного країв коефіцієнти частотного рівняння (30) будуть мати відповідно вигляд (32), (34) і (36), де $\rho_2 = 0$, $a_{pm} = \rho_1 \coth \kappa_{1pm}$, $\Delta\rho = -\rho_1$.

Цікаво відзначити, що дана задача також впливає з частотного рівняння (30) з коефіцієнтами (32), $a_{pm} = \rho_2 \coth \kappa_{2pm}$, $\Delta\rho = \rho_2$, якщо в них формально покласти $g := -g$, тобто розглянути «перекинутий» циліндричний резервуар (див. рис. 2 і рис. 3).

Пластина, що розділяє рідини, відсутня ($D = 0$, $T = 0$, $k_{01} = 0$). У цьому випадку рівняння і граничні умови (1) – (6) вироджуються в наступну систему рівнянь і граничних умов:

$$g\Delta\rho W = \rho_1 \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial\Phi_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} \quad \text{при } z = 0, \quad \Delta\Phi_i = 0,$$

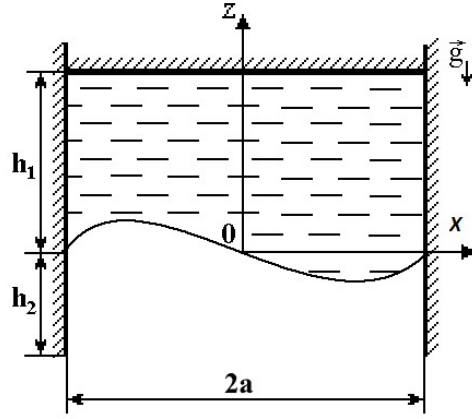


Рис. 3. Випадок відсутності нижньої рідини ($\rho_2 = 0$) «перекинутий» циліндричний резервуар.

$$\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \right) \Big|_{\gamma} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = h_1, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = h_2.$$

Рівняння (11) з урахуванням співвідношення (10) зводиться до наступного диференціального рівняння $\ddot{W}_{pm} + \omega_{pm}^2 W_{pm} = 0$, де $z = W(r, \theta, t)$ – поверхня розділу рідин; $\omega_{pm}^2 = g\Delta\rho/a_{pm}$ – квадрат частоти коливань двохшарової ідеальної рідини в циліндричному резервуарі. З останнього виразу випливає, що при $\rho_1 \leq \rho_2$ положення рівноваги розглянутої механічної системи буде стійким.

6. Чисельні дослідження.

Проведемо чисельні дослідження на випадок невагомості та безмасової пластини ($g = 0$, $k_0 = 0$). В цьому разі рівняння (22) має розв'язки $w_k^0 = \{(r/a)^m, I_m(\gamma_0 r/a)/I_m(\gamma_0)\}$, $\gamma_0^2 = Ta^2/D$.

Нехай $Y_{pm}(\xi_{pm}\xi) = J_m(\xi_{pm}\xi)/J_m(\xi_{pm})$, де $\xi = r/a$, тоді

$$E_{1pm}^0 = \frac{1}{\tilde{N}_{pm}^2} \int_0^1 \xi^{m+1} Y_{pm}(\xi_{pm}\xi) d\xi,$$

$$E_{2pm}^0 = \frac{1}{I_m(\gamma_0) \tilde{N}_{pm}^2} \int_0^1 \xi I_m(\gamma_0 \xi) Y_{pm}(\xi_{pm}\xi) d\xi,$$

$$\tilde{N}_{pm}^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \xi Y_{pm}^2(\xi_{pm}\xi) d\xi = \frac{1}{2\xi_{pm}^2 J_m^2(\xi_{pm})} (\xi_{pm}^2 - m^2), \quad m \neq 0.$$

Провівши необхідні обчислення, отримуємо:

$$E_{1pm}^0 = \frac{2\xi_{pm} Y_{p,m+1}(\xi_{pm})}{\tilde{N} p_{pm}^2}, \quad (37)$$

$$E_{2pm}^0 = \frac{\xi_{pm} Y_{p,m+1}(\xi_{pm}) I_m(\gamma_0) + \gamma_0 Y_{pm}(\xi_{pm}) I_{m+1}(\gamma_0)}{I_m(\gamma_0) (\xi_{pm}^2 + \gamma_0^2) \tilde{N} p_{pm}^2}$$

Таким чином:

для *затиснутого* края пластини коефіцієнти (32) частотного рівняння (30) будуть мати вигляд:

$$C_{11} = 1 - x \sum_{p=1}^{\infty} \frac{E_{1pm}^0}{x - \alpha_{pm}}, \quad C_{12} = 1 - x \sum_{p=1}^{\infty} \frac{E_{2pm}^0}{x - \alpha_{pm}} \quad (38)$$

$$C_{21} = m, \quad C_{22} = m + \gamma_0 I_{m+1}(\gamma_0) / I_m(\gamma_0),$$

для *опертого* края пластини коефіцієнти (34) частотного рівняння (30) запишуться так:

$$C_{11} = 1 - x \sum_{p=1}^{\infty} \frac{E_{1pm}^0}{x - \alpha_{pm}}, \quad C_{12} = 1 - x \sum_{p=1}^{\infty} \frac{E_{2pm}^0}{x - \alpha_{pm}} \quad (39)$$

$$C_{21} = M_1 - x \sum_{p=1}^{\infty} \frac{E_{1pm}^0}{x - \alpha_{pm}} M_{pm}, \quad C_{22} = M_2 - x \sum_{p=1}^{\infty} \frac{E_{2pm}^0}{x - \alpha_{pm}} M_{pm}$$

і для *вільного* края пластини коефіцієнти (36) частотного рівняння (30) будуть мати наступний вигляд:

$$C_{11} = M_1 - x \sum_{p=1}^{\infty} \frac{E_{1pm}^0}{x - \alpha_{pm}} M_{pm}, \quad C_{12} = M_2 - x \sum_{p=1}^{\infty} \frac{E_{2pm}^0}{x - \alpha_{pm}} M_{pm}, \quad (40)$$

$$C_{21} = L_1 - x \sum_{p=1}^{\infty} \frac{E_{1pm}^0}{x - \alpha_{pm}} L_{pm}, \quad C_{22} = L_2 - x \sum_{p=1}^{\infty} \frac{E_{2pm}^0}{x - \alpha_{pm}} L_{pm}.$$

Тут

$$\begin{aligned}
 x &= \sigma_m^2, \quad \alpha_{pm} = \rho_{12} \coth(\kappa_{1pm}) + \coth(\kappa_{2pm}), \quad \rho_{12} = \rho_1/\rho_2, \\
 \kappa_{ipm} &= \tilde{h}_i \xi_{pm}, \quad \tilde{h}_i = h_i/a, \\
 M_1 &= m(1-v)(1-m), \quad M_2 = M_1 + \gamma_0^2 - \gamma_0(1-v) \frac{I_{m+1}(\gamma_0)}{I_m(\gamma_0)}, \\
 M_{pm} &= M_1 - \xi_{pm}^2 + \xi_{pm}(1-v) \frac{J_{m+1}(\xi_{pm})}{J_m(\xi_{pm})}, \\
 L_1 &= -mM_1, \quad L_2 = L_1 + m\gamma_0^2 - \gamma_0(\gamma_0^2 - m^2(1-v)) \frac{I_{m+1}(\gamma_0)}{I_m(\gamma_0)}, \\
 L_{pm} &= L_1 - m\xi_{pm}^2 + \xi_{pm} [m^2(1-v) + \xi_{pm}^2] \frac{J_{m+1}(\xi_{pm})}{J_m(\xi_{pm})}.
 \end{aligned} \tag{41}$$

Зв'язок із розмірною частотою виражатиметься формулою

$$(\omega_m^2)_{\text{роз}} = \frac{D}{\rho_2 a^5} \sigma_m^2. \tag{42}$$

З формули (42) випливає, що розмірна частота прямо пропорційна величині циліндричної жорсткості, обернено пропорційно густині нижньої рідини і обернено пропорційна п'ятого ступеня радіуса циліндра.

У разі виродження пластини в мембрану ($D = 0$) частотне рівняння (30) у безрозмірному вигляді буде мати вигляд

$$\frac{1}{\sigma_m^2} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{E_{pm}^0}{\sigma_m^2 - \xi_{pm}^3/\rho_{12}} = 0. \tag{43}$$

Тут $\tilde{\rho}_{12} = \rho_{12} \coth \kappa_{1pm} + \coth \kappa_{2pm}$.

Зв'язок із розмірною частотою виражатиметься формулою

$$(\omega_m^2)_{\text{роз}} = \frac{T}{\rho_2 a^3} \sigma_m^2. \tag{44}$$

З формули (44) випливає, що розмірна частота прямо пропорційна величині натягу, обернено пропорційно густині нижньої рідини і обернено пропорційна кубу радіуса циліндра.

Чисельні дослідження частотного рівняння (30) з коефіцієнтами (32), (34) і (36) були проведені для трьох способів закріплення пластини і найбільш цікавого випадку одновузлого коливання пластини і рідини ($m = 1$) при наступних значень безрозмірних параметрів: $\rho_{12} = 0, 0.5, 1, 2$; $\gamma_0 = 1..50$; $\tilde{h}_i = 0.1, 0.5, 1.0, 1.5$ з урахуванням п'яти членів в рядах цих рівнянь.

Випадок відсутності верхньої рідини ($\rho_1 = 0$). Слід зазначати, що в цьому випадку для затиснутого краю частотного рівняння (30) з коефіцієнтами (38) співпадає з рівнянням роботи [1].

На рис. 4–6 представлені графіки залежності квадрата першої безрозмірної частоти від безрозмірної величини γ_0 для затиснутого краю (рис. 4), опертого (рис. 5) і вільного (рис. 6) для трьох значень безрозмірної глибини $\tilde{h}_2 = 0.1, 0.5, 1.0$. На цих рисунках $\tilde{h}_2$ позначається як h_2 .

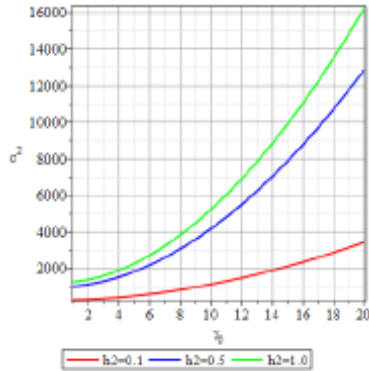


Рис. 4.

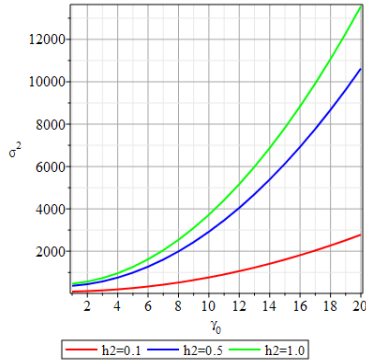


Рис. 5.

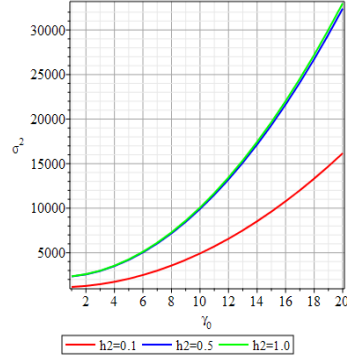


Рис. 6.

З рис. 4–6 випливає, що при зростанні γ_0 частоти зростають нелінійно. Це означає, що при збільшенні попереднього натягу пластини або при зменшенні жорсткості пластини частоти будуть зростати. При зростанні глибини заповнення рідини частоти зростають і при $\tilde{h}_2 > 1.0$ практично не змінюються, а для вільного краю і при $\tilde{h}_2 > 0.5$. При малих глибинах $0.5 < \tilde{h}_2 < 1.0$ частоти для затиснутого краю і опертого близькі, а для вільного краю значно вище. Найбільші частоти будуть для вільного краю, трохи менші для затиснутого і найменші – для опертого краю.

Випадок відсутності нижньої рідини ($\rho_2 = 0$). Оскільки $g = 0$, то в цьому випадку і частотне рівняння і усі виводи збігаються з виводами, які були отримані для випадку відсутності верхньої рідини ($\rho_1 = 0$).

Загальний випадок ($\rho_1 \neq 0$ і $\rho_2 \neq 0$). На рис. 7–9 представлені графіки залежності квадрата першої безрозмірної частоти від безрозмірної величини ρ_{12} для затиснутого краю, опертого (рис. 8) і вільного (рис. 9) для трьох значень $\gamma_0 = 5.0$ (рис. 7), $\gamma_0 = 10.0$ (рис. 8) і $\gamma_0 = 50.0$ (рис. 9) при $\tilde{h}_1 = \tilde{h}_2 = 1.0$.

З рис. 7–9 випливає, що при зростанні ρ_{12} частоти зменшуються нелінійно. Це означає, що при зменшенні попереднього натягу пластини або при збільшенні жорсткості пластини частоти будуть зменшуватися і при малих значеннях γ_0 можуть наблизитися до нуля, що буде пов'язано з нестійкістю сумісних коливань пластини і рідини. Таким чином показано, що нестійкість сумісних коливань пластини і рідини може виникнути, коли більш важка рідина знаходиться над менш важкою рідиною. Як і раніше, при зростанні γ_0 частоти зростають і найбільші ча-

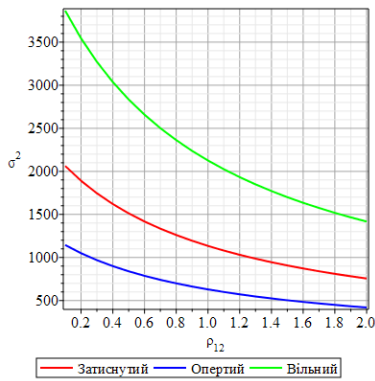


Рис. 7.

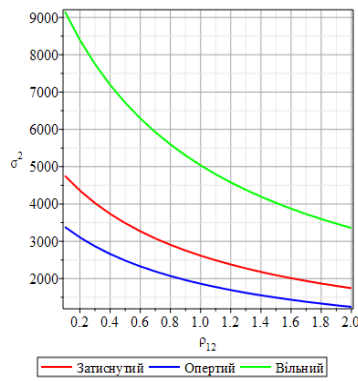


Рис. 8.

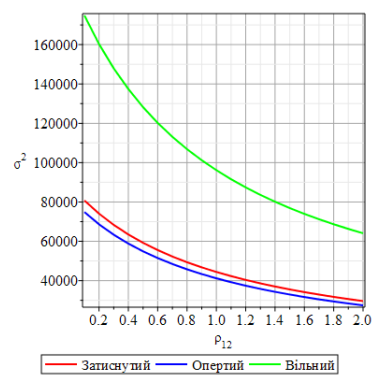


Рис. 9.

стоти будуть для вільного краю, трохи менші для затиснутого та найменші — для опертого краю.

На основі проведених чисельних досліджень можна зробити наступні загальні висновки:

1. При зростанні γ_0 ($\gamma_0^2 = Ta^2/D$) частоти сумісних коливань пластини і рідини нелінійно зростають. Це означає, що при збільшенні попереднього натягу пластини або при зменшенні жорсткості пластини частоти будуть зростати.

2. Глибини заповнення рідин при $\tilde{h} \geq 1$ ($i = 1, 2$) майже не впливають на частоти коливань.

3. При зростанні ρ_{12} ($\rho_{12} = \rho_1/\rho_2$) частоти зменшуються. Це означає, що при зменшенні попереднього натягу пластини або при збільшенні жорсткості пластини частоти будуть зменшуватися і при малих значеннях γ_0 можуть наблизитися до нуля, що буде пов'язано з нестійкістю сумісних коливань пластини і рідини. Таким чином, нестійкість коливань пластини і рідини виникає, коли більш важка рідина знаходиться над менш важкої рідиною.

4. Найбільші частоти будуть для вільного краю, трохи менші для затиснутого і найменші — для опертого краю.

7. Висновки.

У лінійній постановці розглянуто задачу про коливання кругової пластини, яка горизонтальною розділяє ідеальні нестисливі рідини різної густини в жорсткому циліндричному резервуарі. Для довільних випадків закріплення контурів пластини отримано частотне рівняння власних спільних коливань пластини і рідини. Детально розглянуті три основні випадки закріплення контурів пластини: затиснений, опертий і вільний край. Розглянуто різні граничні випадки: виродження пластини в мембрану, її відсутність, випадок відсутності верхньої або нижньої рідини, випадок невагомості. На підставі чисельних досліджень випадку невагомості і без масової пластини показано, що при збільшенні попереднього натягу пластини або при зменшенні жорсткості пластини частоти спільних коливань пластини

і рідини будуть зростати. Глибини заповнення рідин майже не впливають на частоти коливань, коли вони більше за радіус циліндра. При зростанні ваги верхньої рідини частоти зменшуються і при малих значеннях натягу пластини можуть наблизитися до нуля, що буде пов'язано з нестійкістю сумісних коливань пластини і рідини.

Цитована література

1. Докучаев Л.В. О колебаниях резервуара с жидкостью, на свободной поверхности которой расположена мембрана // Строительная механика и расчет сооружений. – 1972. – № 1. – С. 49–54.
2. Дидок Н.К., Кононов Ю.Н. Динамика и устойчивость колебаний цилиндрического резервуара с упругим дном и жидкостью со свободной поверхностью // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2013. – № 5. – С. 30–34.
3. Kononov Yu.M. Stability of the Equilibrium State of a Rigid Body with a Multilayer Ideal Liquid Separated by Elastic Plates // Ukrainian Mathematical Journal. – 2022. – Vol. 73, Is. 10. – P. 1551–1565.
4. Троценко В.А. Колебания жидкости в подвижных емкостях с перегородками. – К.: Ин-т математики НАН, 2006.
5. Троценко В.А., Троценко В.А. Застосування варіаційних методів у спектральних задачах тонкостійких оболонок і гідропружність. – К.: Наукова думка, 2023.
6. Tariverdilo S., Shahmardani M., Mirzapour J., Shabani R. Asymmetric free vibration of circular plate in contact with incompressible fluid // Applied Mathematical Modelling. – 2013. – Vol. 37, Is. 1–2. – P. 228–239.
7. Карнауш А.Ю. Колебания упругой пластинки, разделяющей жидкости в цилиндрическом сосуде с упругими основаниями // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2013. – № 2. – С. 33–36.
8. Kononov Y.M., Dzhukha Y.O. Vibrations of Two-Layer Ideal Liquid in a Rigid Cylindrical Vessel with Elastic Bases // Journal of Mathematical Sciences. – 2020. – Vol. 246, Is. 4. – P. 365–383.
9. Kononov Yu.M. On the solution of a complicated biharmonic equation in a hydroelasticity problem // Journal of Mathematical Science. – 2023. – Vol. 274, Is. 3. – P. 1–12.
10. Kononov Y., Lyman O. Investigating the stability of oscillations of rectangular plates in an infinitely long rectangular parallelepiped with an ideal fluid // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2025. – Vol. 1, Is. 7 (133). – P. 14–21.

References

1. Dokuchaev, L.V. (1972). O kolebaniyakh rezervuara s zhidkost'yu, na svobodnoy poverkhnosti kotoroy raspolozhena membrana [On vibrations of a reservoir with liquid, on the free surface of which a membrane is located]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Structural Mechanics and Analysis of Constructions], 1, 49–54.
2. Didok, N.K., & Kononov, Yu.N. (2013). Dinamika i ustoychivost' kolebaniy tsilindricheskogo rezervuara s uprugim dnom i zhidkost'yu so svobodnoy poverkhnost'yu [Dynamics and stability of vibrations of a cylindrical reservoir with an elastic bottom and liquid with a free surface]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Yestestvennyye nauki* [Bulletin of higher education institutes North Caucasus region. Natural Sciences], 5, 30–34.
3. Kononov, Yu.M. (2022). Stability of the Equilibrium State of a Rigid Body with a Multilayer Ideal Liquid Separated by Elastic Plates. *Ukrainian Mathematical Journal*, 73(10), 1551–1565. <https://doi.org/10.1007/s11253-022-02013-5>.
4. Trotsenko, V.A. (2006). *Kolebaniya zhidkosti v podvizhnykh yemkostyakh s peregorodkami* [Vibrations of liquid in moving containers with partitions]. Kyiv: Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine.

5. Trotsenko, V.A., & Trotsenko, Yu.A. (2023). *Zastosuvannia variatsiinykh metodiv u spektralnykh zadachakh tonkostinnykh obolonok i hidropruzhnist [Application of variational methods in spectral problems of thin-walled shells and hydroelasticity]*. Kyiv: Naukova dumka.
6. Tariverdilo S., Shahmardani M., Mirzapour J., & Shabani R. (2013). Asymmetric free vibration of circular plate in contact with incompressible fluid. *Applied Mathematical Modelling*, 37(1-2), 228–239. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.02.025>
7. Karnauh, A.Yu. (2013). Kolebaniya uprugoy plastinki, razdelyayushej zhidkosti v cilindricheskom sosude s uprugimi osnovaniami [Oscillations of an elastic plate separating liquids in a cylindrical vessel with elastic bases] *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Yestestvennyye nauki [Bulletin of higher education institutes North Caucasus region. Natural Sciences]*, 2, 33–36.
8. Kononov, Y.M., & Dzhukha, Y.O. (2020) Vibrations of Two-Layer Ideal Liquid in a Rigid Cylindrical Vessel with Elastic Bases. *Journal of Mathematical Sciences*, 246(4), 365–383. <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04745-w>.
9. Kononov, Yu.M. (2023). On the solution of a complicated biharmonic equation in a hydroelasticity problem. *Journal of Mathematical Science*, 274(3), 1–12. <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06604-w>
10. Kononov, Y., & Lymar O. (2025). Investigating the stability of oscillations of rectangular plates in an infinitely long rectangular parallelepiped with an ideal fluid. *Easten-European Journal of Enterprise Technologies*, 1(7), 14–21. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2025.323200>.

Yu.M. Kononov, A.A. Zaretsky, S.V. Sapunov

On the oscillations of a circular plate that horizontally separates liquids of different densities in a cylindrical tank.

The frequency equation of free oscillations of a circular plate that horizontally separates ideal incompressible fluids of different densities in a cylindrical tank is obtained. The influence of the clamped, supported, and free edges of the plate on the frequency spectrum of coupled oscillations of the plate and the fluid is studied. Various limiting cases of the plate degenerating into a membrane, its absence, the case of the absence of an upper or lower fluid, and the case of weightlessness are considered. Numerical studies are carried out for the case of weightlessness and a massless plate. It is shown that instability of coupled oscillations of the plate and the fluid can occur when a heavier fluid is above a lighter fluid.

Keywords: *hydroelasticity, circular plate, ideal incompressible fluid, cylindrical cavity, free coupled oscillations of the plate and fluid..*

Ин-т прикл. математики і механіки НАН України, Слов'янськ
 kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com
 zareckijandrej1@gmail.com
 sapunov_sv@ukr.net

Отримано 01.10.25