

УДК 517.5

DOI: 10.37069/1683-4720-2025-39-14

©2025. М.В. Стефанчук

ПРО ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНУ АСИМПТОТИКУ НИЖНІХ Q-ГОМЕОМОРФІЗМІВ У ТОЧЦІ КОМПЛЕКСНОЇ ПЛОЩИНИ

У роботі досліджено асимптотичну поведінку експоненціального типу у точці комплексної площини нижніх Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля при $1 < p < 2$. Крім цього отримано нижні оцінки експоненціального типу площі образу круга при даних відображеннях. Побудовано приклади, які показують точність отриманих результатів.

MSC: 30C65.

Ключові слова: p -модуль сім'ї кривих, кільцеві Q -гомеоморфізми відносно p -модуля, нижні Q -гомеоморфізми відносно p -модуля.

1. Вступ. Робота присвячена дослідженню локальних та асимптотичних властивостей нижніх Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля, $1 < p < 2$, на комплексній площині. Використовуючи метод неконформного модуля, ми отримуємо нижні оцінки експоненціального типу площі образу круга при даних відображеннях. Також знаходимо достатню умову, яка забезпечує експоненціальний ріст відображення у точці, та будуємо приклади, що показують точність отриманих оцінок.

Нагадаємо деякі означення. Для простоти викладу обмежимося тільки плоским випадком. Нехай задано сім'ю Γ кривих γ у комплексній площині $\mathbb{C}$. Борелеву функцію $\rho : \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty]$ називають *допустимою* для Γ (пишуть $\rho \in \text{adm } \Gamma$), якщо

$$\int_{\gamma} \rho(z) |dz| \geq 1 \quad (1)$$

для кожної (локально спрямлюваної) кривої $\gamma \in \Gamma$.

Нехай $p \in (1, \infty)$. Тоді p -модулем сім'ї Γ називається величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_{\mathbb{C}} \rho^p(z) dx dy,$$

див. [1].

Для довільних множин E , F і G комплексної площини $\mathbb{C}$ позначимо через $\Delta(E, F, G)$ сім'ю всіх неперервних кривих $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, які з'єднують E і F у G , тобто $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$.

Ця робота була підтримана грантом від Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00014586, М.В.С.).

Робота була підтримана бюджетною програмою "Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень" (КПКВК 6541230).

Нехай $z_0 \in \mathbb{C}$. Введемо наступні позначення

$$\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\},$$

$$S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}, \quad B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\},$$

$$B_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}, \quad \overline{B}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}, \quad \mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Нехай D – область у комплексній площині $\mathbb{C}$ та $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ – вимірна за Лебегом функція. Гомеоморфізм $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ називається *кільцевим Q -гомеоморфізмом відносно p -модуля у точці $z_0 \in D$* , якщо співвідношення

$$M_p(\Delta(fS_1, fS_2, fD)) \leq \int_{\mathbb{A}} Q(z) \eta^p(|z - z_0|) dx dy \quad (2)$$

виконується для будь-якого кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$ та кіл $S_i = S(z_0, r_i)$, $i = 1, 2$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$, і для кожної вимірної функції $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такої, що

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr = 1.$$

Надалі будемо вважати, що

$$q_{z_0}(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{S(z_0, r)} Q(z) |dz|$$

є середнім інтегральним значенням функції Q по колу $S(z_0, r)$.

Нижче наведено твердження про співвідношення між площами образів двох концентричних кругів при кільцевих Q -гомеоморфізмах відносно p -модуля, $p > 2$, див. [2, лема 2.1].

Лема 1. *Нехай D – область у комплексній площині $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$. Припустимо, що $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ – кільцевий Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці z_0 , $p > 2$, та для деяких чисел $r_0 \in (0, d_0)$, $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$, $\kappa = \kappa(z_0) > 0$ та $\alpha > 0$*

$$q_{z_0}(t) \leq \kappa t^{2p-3} e^{\frac{\alpha}{t}}$$

для м.в. (майже всіх) $t \in (0, r_0)$. Тоді для довільних r_1, r_2 таких, що $0 < r_1 < r_2 < r_0$ виконується наступна оцінка

$$|fB(z_0, r_2)|^{\frac{p-2}{2(p-1)}} \geq |\overline{fB(z_0, r_1)}|^{\frac{p-2}{2(p-1)}} + \lambda_p \kappa^{-\frac{1}{p-1}} \alpha^{-1} \left(e^{-\frac{\alpha}{(p-1)r_2}} - e^{-\frac{\alpha}{(p-1)r_1}} \right),$$

де $\lambda_p = \pi^{\frac{p-2}{2(p-1)}} (p-2)$.

Теорія кільцевих Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, при $p = n$ досліджувалась у роботах [3–5], при $1 < p < n$ див. [6–10] та при

$p > n$ див. [11–16], а також на комплексній площині при $p > 2$ див. [2, 17–20]. На комплексній площині теорія кільцевих Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля використовується при дослідженні локальних та асимптотичних властивостей регулярних розв'язків нелінійних рівнянь Бельтрамі, див. [21–23].

Вельми корисним інструментом при дослідженні відображень виявилися також так звані нижні Q -гомеоморфізми, що були вперше введені при $p = n$ у роботі Д. Ковтонюка і В. Рязанова, див. [24] або розд. 9 у монографії [3], та при $p \neq n$ у роботі [25].

Кажуть, що деяка властивість виконується для p -майже всіх кривих γ сім'ї Γ , якщо підсім'я кривих сім'ї Γ , для яких ця властивість порушується, має p -модуль нуль. Вимірну за Лебегом функцію $\rho : \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty]$ називають *узагальнено p -допустимою* для сім'ї кривих Γ і пишуть $\rho \in \text{ext}_p \text{adm } \Gamma$, якщо нерівність (1) виконується для p -майже всіх $\gamma \in \Gamma$.

Нехай $Q : D \rightarrow (0, \infty)$ – вимірна за Лебегом функція. Гомеоморфізм $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ називають *нижнім Q -гомеоморфізмом відносно p -модуля у точці $z_0 \in D$* , якщо нерівність

$$M_p(f\Sigma_{\mathbb{A}}) \geq \inf_{\rho \in \text{ext}_p \text{adm } \Sigma_{\mathbb{A}}} \int_{\mathbb{A}} \frac{\rho^p(z)}{Q(z)} dx dy \quad (3)$$

виконується для кожного кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < d_0$, $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$, де $\Sigma_{\mathbb{A}}$ – сім'я всіх кіл $S(z_0, r)$, $r \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Теорія нижніх Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, при $p = n$ досліджувалась у роботах [3, 24], при $p > n - 1$ див. [25], при $p > n$ див. [26, 27], а також на комплексній площині при $1 < p < 2$ див. [28, 29].

У наступній теоремі встановлено зв'язок між нижніми і кільцевими Q -гомеоморфізмами відносно p -модуля, див. [25, теорема 7.1].

Теорема 1. *Нехай D – область у комплексній площині $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$. Припустимо, що $Q : D \rightarrow (0, \infty)$ – вимірна за Лебегом функція така, що*

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, r) := \left(\int_{S(z_0, r)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z) |dz| \right)^{p-1} \neq \infty$$

для м.в. $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$, і $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ – нижній Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці z_0 , $p > 1$. Тоді f є кільцевим Q_* -гомеоморфізмом відносно $\tilde{p}$ -модуля у точці z_0 при $\tilde{p} = \frac{p}{p-1}$ та $Q_*(z) = Q^{\frac{1}{p-1}}(z)$.

2. Оцінки площі образу круга. У цьому розділі отримано нижні оцінки експоненціального типу площі образу круга при нижніх Q -гомеоморфізмах відносно p -модуля, $1 < p < 2$.

Лема 2. *Нехай D – область у комплексній площині $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$. Припустимо, що $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ – нижній Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці z_0 , $1 < p < 2$, та для деяких чисел $r_0 \in (0, d_0)$, $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$, $C_0 = C_0(z_0) > 0$ і $\beta > 0$*

виконується умова

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t) \leq C_0 t^2 e^{\frac{\beta}{t}}$$

для м.в. $t \in (0, r_0)$. Тоді для довільних r_1, r_2 таких, що $0 < r_1 < r_2 < r_0$ справедлива оцінка

$$|f(B(z_0, r_2))|^{\frac{2-p}{2}} \geq |f(\overline{B(z_0, r_1)})|^{\frac{2-p}{2}} + \mu_p C_0^{-1} \beta^{-1} \left(e^{-\frac{\beta}{r_2}} - e^{-\frac{\beta}{r_1}} \right), \quad (4)$$

де $\mu_p = 2^{p-1} \pi^{\frac{p}{2}} (2-p)$.

Доведення. Дійсно, за теоремою 1 нижній Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці z_0 , $1 < p < 2$, є кільцевим Q_* -гомеоморфізмом відносно $\tilde{p}$ -модуля у точці z_0 при $\tilde{p} = \frac{p}{p-1} > 2$ та $Q_*(z) = Q^{\frac{1}{p-1}}(z)$. Застосувавши лему 1 з параметрами

$\kappa = \frac{C_0^{\frac{1}{p-1}}}{2\pi}$ та $\alpha = \frac{\beta}{p-1}$, отримуємо оцінку (4). $\square$

Поклавши у лемі 2 $D = \mathbb{B}$ та $z_0 = 0$, приходимо до наступного твердження.

Наслідок 1. Нехай $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ – нижній Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці $z_0 = 0$, $p > 2$, та для деяких чисел $r_0 \in (0, 1)$, $C_0 > 0$ і $\beta > 0$

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t) \leq C_0 t^2 e^{\frac{\beta}{t}}$$

для м.в. $t \in (0, r_0)$. Тоді для довільних r_1, r_2 таких, що $0 < r_1 < r_2 < r_0$ виконується наступна умова

$$|f(B_{r_2})|^{\frac{2-p}{2}} \geq |f(\overline{B_{r_1}})|^{\frac{2-p}{2}} + \mu_p C_0^{-1} \beta^{-1} \left(e^{-\frac{\beta}{r_2}} - e^{-\frac{\beta}{r_1}} \right),$$

де $\mu_p = 2^{p-1} \pi^{\frac{p}{2}} (2-p)$.

Теорема 2. Нехай D – область у комплексній площині $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$. Припустимо, що $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ – нижній Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці z_0 , $1 < p < 2$, та для деяких чисел $r_0 \in (0, d_0)$, $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$, $C_0 = C_0(z_0) > 0$ і $\beta > 0$ виконується умова

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t) \leq C_0 t^2 e^{\frac{\beta}{t}}$$

для м.в. $t \in (0, r_0)$. Тоді для довільного $r \in (0, r_0)$ справедлива оцінка

$$|f(B(z_0, r))| \geq \mu_p^{\frac{2}{2-p}} C_0^{-\frac{2}{2-p}} \beta^{-\frac{2}{2-p}} e^{-\frac{2\beta}{(2-p)r}}, \quad (5)$$

де $\mu_p = 2^{p-1} \pi^{\frac{p}{2}} (2-p)$.

Доведення. Дійсно, поклавши у лемі 2 $r_1 = \varepsilon$ та $r_2 = r$, приходимо до нерівності

$$\begin{aligned} |f(B(z_0, r))|^{\frac{2-p}{2}} &\geq |f(\overline{B(z_0, \varepsilon)})|^{\frac{2-p}{2}} + \mu_p C_0^{-1} \beta^{-1} \left(e^{-\frac{\beta}{r}} - e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}} \right) \\ &\geq \mu_p C_0^{-1} \beta^{-1} \left(e^{-\frac{\beta}{r}} - e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}} \right), \end{aligned}$$

де $\mu_p = 2^{p-1} \pi^{\frac{p}{2}} (2-p)$. Перейшовши в останній нерівності до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$ та виконавши елементарні перетворення, приходимо до оцінки (5). $\square$

Наслідок 2. Припустимо, що $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ – нижній Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці $z_0 = 0$, $1 < p < 2$, та для деяких чисел $r_0 \in (0, 1)$, $C_0 > 0$ і $\beta > 0$ виконується умова

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t) \leq C_0 t^2 e^{\frac{\beta}{t}}$$

для м.в. $t \in (0, r_0)$. Тоді для довільного $r \in (0, r_0)$ справедлива оцінка

$$|f(B_r)| \geq \mu_p^{\frac{2}{2-p}} C_0^{-\frac{2}{2-p}} \beta^{-\frac{2}{2-p}} e^{-\frac{2\beta}{(2-p)r}}, \quad (6)$$

де $\mu_p = 2^{p-1} \pi^{\frac{p}{2}} (2-p)$.

ПРИКЛАД 1. Припустимо, що $1 < p < 2$, $\beta > 0$ та $C_0 > 0$. Нехай $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) = \begin{cases} k_0 e^{-\frac{\beta}{(2-p)|z|}} \frac{z}{|z|}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0, \end{cases} \quad (7)$$

де $k_0 = (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left(\frac{2-p}{C_0 \beta} \right)^{\frac{1}{2-p}}$.

Гомеоморфізм f відображає круг B_r на круг B_{r_*} , де $r_* = k_0 e^{-\frac{\beta}{(2-p)r}}$, $r \in (0, 1)$. Легко бачити, що для довільного $r \in (0, 1)$

$$|f(B_r)| = |B_{r_*}| = \pi r_*^2 = \left(2^{p-1} \pi^{\frac{p}{2}} (2-p) \right)^{\frac{2}{2-p}} C_0^{-\frac{2}{2-p}} \beta^{-\frac{2}{2-p}} e^{-\frac{2\beta}{(2-p)r}}.$$

Нескладно показати, що f належить класу Соболева $W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{B})$ та є гомеоморфізмом зі скінченним спотворенням. Тому за лемою 2.1 у [22] f є нижнім Q -гомеоморфізмом відносно p -модуля при $p > 1$ у точці $z_0 = 0$ з функцією $Q(z) = K_{f,p}^T(z, z_0)$. Тут $K_{f,p}^T(z, z_0)$ – дотична p -дилатація відображення f у точці z відносно точки $z_0 = 0$, що обчислюється за формулою

$$K_{f,p}^T(z, z_0) = \frac{|\partial_T^{z_0} f(z)|^p}{|J_f(z)|},$$

де $\partial_T^{z_0} f(z)$ – похідна f у точці z за дотичним напрямком $\tau = i \frac{z - z_0}{|z - z_0|}$, див. [22, (11)].

Дане відображення у полярній системі координат (r, θ) має вигляд:

$$f(re^{i\theta}) = (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left(\frac{2-p}{C_0 \beta} \right)^{\frac{1}{2-p}} e^{-\frac{\beta}{(2-p)r}} e^{i\theta}, \quad f(0) = 0.$$

Далі знайдемо частинні похідні відображення f по r і θ

$$f_r = (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} C_0^{-\frac{1}{2-p}} \left(\frac{2-p}{\beta} \right)^{\frac{p-1}{2-p}} r^{-2} e^{-\frac{\beta}{(2-p)r}} e^{i\theta},$$

$$f_\theta = i (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left(\frac{2-p}{C_0 \beta} \right)^{\frac{1}{2-p}} e^{-\frac{\beta}{(2-p)r}} e^{i\theta}$$

та якобіан

$$J_f(re^{i\theta}) = \frac{1}{r} \operatorname{Im} (\overline{f_r} f_\theta) = (2\pi)^{\frac{2(p-1)}{2-p}} C_0^{-\frac{2}{2-p}} \left(\frac{2-p}{\beta} \right)^{\frac{p}{2-p}} r^{-3} e^{-\frac{2\beta}{(2-p)r}},$$

див. [30, (21.52)]. Оскільки

$$\partial_T^{z_0} f(z) = i \cdot \left(\frac{z - z_0}{|z - z_0|} \cdot f_z - \frac{\overline{z - z_0}}{|z - z_0|} \cdot f_{\bar{z}} \right)$$

(див. формулу (10) у [22]) та

$$f_\theta = i((z - z_0)f_z - \overline{(z - z_0)}f_{\bar{z}})$$

(див. формулу (21.51) у [30]), то

$$K_{f,p}^T(z, z_0) = \frac{|f_\theta|^p}{r^p J_f(re^{i\theta})} = (2\pi)^{1-p} C_0 |z|^{3-p} e^{\frac{\beta}{|z|}}.$$

Звідки випливає, що відображення f є нижнім Q -гомеоморфізмом відносно p -модуля, $1 < p < 2$, у точці $z_0 = 0$ з функцією

$$Q(z) = (2\pi)^{1-p} C_0 |z|^{3-p} e^{\frac{\beta}{|z|}}$$

та

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t) = \left(\int_{S(z_0, t)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z) |dz| \right)^{p-1} = C_0 t^2 e^{\frac{\beta}{t}}, \quad t \in (0, 1).$$

ЗАУВАЖЕННЯ 1. Оцінка (6) у наслідку 2 є точною і досягається на гомеоморфізмі $f: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$, заданому формулою

$$f(z) = \begin{cases} k_0 e^{-\frac{\beta}{(2-p)|z|}} \frac{z}{|z|}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0, \end{cases}$$

де $k_0 = (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left(\frac{2-p}{C_0 \beta} \right)^{\frac{1}{2-p}}$, $1 < p < 2$, $\beta > 0$ та $C_0 > 0$.

3. Експоненціальна асимптотика у точці. У даному розділі досліджено експоненціальну асимптотику у термінах верхніх границь нижніх Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля при $1 < p < 2$ у точці комплексної площини. Дані результати є аналогами відомої леми Ікоми-Шварца, див. наслідок 3 у [31].

Теорема 3. Нехай D – область у комплексній площині $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$. Припустимо, що $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ – нижній Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці z_0 ,

$1 < p < 2$, та для деяких чисел $r_0 \in (0, d_0)$, $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$, $C_0 = C_0(z_0) > 0$ і $\beta > 0$ виконується умова

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t) \leq C_0 t^2 e^{\frac{\beta}{t}}$$

для м.в. $t \in (0, r_0)$. Тоді

$$\limsup_{z \rightarrow z_0} |f(z) - f(z_0)| e^{\frac{\beta}{(2-p)|z-z_0|}} \geq (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left(\frac{2-p}{C_0 \beta} \right)^{\frac{1}{2-p}}.$$

Доведення. Згідно теореми 2 для довільного $r \in (0, r_0)$ справедлива оцінка

$$|f(B(z_0, r))| \geq \mu_p^{\frac{2}{2-p}} C_0^{-\frac{2}{2-p}} \beta^{-\frac{2}{2-p}} e^{-\frac{2\beta}{(2-p)r}}, \quad (8)$$

де $\mu_p = 2^{p-1} \pi^{\frac{p}{2}} (2-p)$. Оскільки відображення f є гомеоморфізмом, то

$$|f(B(z_0, r))| \leq \pi \left(\max_{|z-z_0|=r} |f(z) - f(z_0)| \right)^2.$$

Звідси та з оцінки (8) випливає, що

$$M_f(z_0, r) \geq (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left(\frac{2-p}{C_0 \beta} \right)^{\frac{1}{2-p}} e^{-\frac{\beta}{(2-p)r}},$$

де $M_f(z_0, r) = \max_{|z-z_0|=r} |f(z) - f(z_0)|$.

Помноживши останню нерівність на $e^{\frac{\beta}{(2-p)r}}$ та перейшовши до верхньої границі при $r \rightarrow 0$, приходимо до оцінки

$$\limsup_{z \rightarrow z_0} |f(z) - f(z_0)| e^{\frac{\beta}{(2-p)|z-z_0|}} = \limsup_{r \rightarrow 0} M_f(z_0, r) e^{\frac{\beta}{(2-p)r}} \geq (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left(\frac{2-p}{C_0 \beta} \right)^{\frac{1}{2-p}}.$$

Таким чином, теорема 3 доведена. $\square$

Наслідок 3. Припустимо, що $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ – нижній Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці $z_0 = 0$ при $1 < p < 2$, $f(0) = 0$, та для деяких чисел $r_0 \in (0, 1)$, $C_0 > 0$ і $\beta > 0$ виконується умова

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t) \leq C_0 t^2 e^{\frac{\beta}{t}}$$

для м.в. $t \in (0, r_0)$. Тоді

$$\limsup_{z \rightarrow 0} |f(z)| e^{\frac{\beta}{(2-p)|z|}} \geq (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left(\frac{2-p}{C_0 \beta} \right)^{\frac{1}{2-p}}. \quad (9)$$

ЗАУВАЖЕННЯ 2. Оцінка (9) є точною. Вона досягається на нижньому Q -гомеоморфізмі $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ відносно p -модуля у точці $z_0 = 0$ при $1 < p < 2$ з функцією $Q(z) = (2\pi)^{1-p} C_0 |z|^{3-p} e^{-\frac{\beta}{|z|}}$, $\beta > 0$, $C_0 > 0$, який задається формулою

$$f(z) = \begin{cases} k_0 e^{-\frac{\beta}{(2-p)|z|}} \frac{z}{|z|}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0, \end{cases}$$

де $k_0 = (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left(\frac{2-p}{C_0 \beta} \right)^{\frac{1}{2-p}}$.

Легко бачити, що $\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t) = C_0 t^2 e^{\frac{\beta}{t}}$, $t \in (0, 1)$, та

$$\lim_{z \rightarrow 0} |f(z)| e^{\frac{\beta}{(2-p)|z|}} = (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left(\frac{2-p}{C_0 \beta} \right)^{\frac{1}{2-p}}.$$

Твердження 1. Нехай $\beta > 0$ та $1 < p < 2$. Тоді існує нижній Q -гомеоморфізм $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ відносно p -модуля у точці $z_0 = 0$ такий, що $f(0) = 0$ та

$$|f(z)| e^{\frac{\beta}{(2-p)|z|}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow 0.$$

Крім того,

$$t^{-2} e^{-\frac{\beta}{t}} \|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0.$$

Доведення. Нехай $\beta > 0$, $1 < p < 2$ та $k > 1$. Розглянемо відображення $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$, що задається формулою

$$f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{k\beta}{(2-p)|z|}} \frac{z}{|z|}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0, \end{cases}$$

Легко бачити, що

$$\lim_{z \rightarrow 0} |f(z)| e^{\frac{\beta}{(2-p)|z|}} = \lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{\beta(1-k)}{(2-p)|z|}} = 0.$$

Аналогічно, як у прикладі 1, можна показати, що відображення f є нижнім Q -гомеоморфізмом відносно p -модуля, $1 < p < 2$, у точці $z_0 = 0$ з функцією

$$Q(z) = \frac{2-p}{k\beta} |z|^{3-p} e^{\frac{k\beta}{|z|}}.$$

Звідси

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t) = \left(\int_{S(z_0, t)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z) |dz| \right)^{p-1} = \frac{(2\pi)^{p-1} (2-p)}{k\beta} t^2 e^{\frac{k\beta}{t}}, \quad t \in (0, 1).$$

Крім цього, очевидно, що

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-2} e^{-\frac{\beta}{t}} \|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t) = \frac{(2\pi)^{p-1}(2-p)}{k\beta} \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{\beta(k-1)}{t}} = \infty.$$

Таким чином, твердження 1 доведено. $\square$

Наступне твердження дає достатні умови для неіснування нижніх Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля при $1 < p < 2$ у точці комплексної площини.

Твердження 2. *Нехай D – область у комплексній площині $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$ та для деяких чисел $r_0 \in (0, d_0)$, $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$, $1 < p < 2$, $C_0 = C_0(z_0) > 0$ і $\beta > 0$ виконується умова*

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t) \leq C_0 t^2 e^{\frac{\beta}{t}}$$

для м.в. $t \in (0, r_0)$. Тоді не існує нижнього Q -гомеоморфізму $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ відносно p -модуля в точці z_0 з асимптотичною умовою

$$\limsup_{z \rightarrow z_0} |f(z) - f(z_0)| e^{\frac{\beta}{(2-p)|z-z_0|}} = 0. \quad (10)$$

Доведення. Припустимо, що існує нижній Q -гомеоморфізм $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ відносно p -модуля в точці z_0 , для якого

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t) \leq C_0 t^2 e^{\frac{\beta}{t}}$$

для м.в. $t \in (0, r_0)$ та виконується асимптотична умова (10). Тоді за теоремою 3 маємо оцінку

$$\limsup_{z \rightarrow z_0} |f(z) - f(z_0)| e^{\frac{\beta}{(2-p)|z-z_0|}} \geq (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left(\frac{2-p}{C_0 \beta} \right)^{\frac{1}{2-p}} > 0,$$

що суперечить асимптотичній умові (10). $\square$

Цитована література

1. Väisälä J. Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings. – Lecture Notes in Math. – Berlin: Springer-Verlag, 1971. – Vol. 229.
2. Stefanchuk M.V. On exponential asymptotics of one class of homeomorphisms at a point of the complex plane // Proceedings of the International Geometry Center. – 2024. – Vol. 17, no. 2. – P. 158–170.
3. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
4. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. On ring solutions of Beltrami equation // J. Anal. Math. – 2005. – Vol. 96. – P. 117–150.
5. Salimov R.R., Smolovaya E.S. On the order of growth of ring Q -homeomorphisms at infinity // Ukrainian Mathematical Journal. – 2010. – Vol. 62, no. 6. – P. 961–969.
6. Golberg A. Differential properties of (α, Q) -homeomorphisms // Further Progress in Analysis, Proc. 6th ISAAC Congr. – 2009. – P. 218–228.

7. Golberg A., Salimov R. Logarithmic Holder continuity of ring homeomorphisms with controlled p -module // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2014. – Vol. 59, no. 1. – P. 91–98.
8. Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E. Distortion estimates under mappings with controlled p -module // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math. – 2014. – Vol. 5 (LXIII). – P. 95–114.
9. Salimov R.R. One property of ring Q -homeomorphisms with respect to a p -module // Ukrainian Mathematical Journal. – 2013. – Vol. 65, no. 5. – P. 806–813.
10. Salimov R.R. To a theory of ring Q -homeomorphisms with respect to a p -modulus // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – Vol. 196. – P. 679–692.
11. Salimov R., Klishchuk B. An extremal problem for the volume functional // Matematychni Studii. – 2018. – Vol. 50, no. 1. – P. 36–43.
12. Salimov R., Klishchuk B. Lower bounds for the volume of the image of a ball // Ukrainian Mathematical Journal. – 2019. – Vol. 71. – P. 883–895.
13. Salimov R., Klishchuk B. On the asymptotic behavior at infinity of ring Q -homeomorphisms with respect to p -modulus // Праці ІПММ НАН України. – 2022. – Т. 36, № 1. – С. 26–35.
14. Salimov R., Klishchuk B. On the behavior at infinity of one class of homeomorphisms // Current Trends in Analysis, its Applications and Computation. Trends in Mathematics. – 2022. – P. 173–180.
15. Salimov R., Klishchuk B., Stefanchuk M. On the asymptotic behavior at infinity of one mapping class // Proceedings of the International Geometry Center. – 2023. – Vol. 16, no. 1. – P. 50–58.
16. Klishchuk B., Salimov R., Stefanchuk M. On the asymptotic behavior of the diameter of the image of a ball at infinity // Ukrainian Mathematical Journal. – 2025. – Vol. 77, no. 6. – P. 867–889.
17. Stefanchuk M.V. On exponential asymptotics of ring Q -homeomorphisms at infinity // Journal of Mathematical Sciences. – 2024. – Vol. 282, no. 1. – P. 83–92.
18. Klishchuk B. On power-law behavior of some mapping class at infinity // Journal of Mathematical Sciences. – 2022. – Vol. 268, no. 2. – P. 192–198.
19. Salimov R., Klishchuk B. Extremal problem for the area of the image of a disk // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – Vol. 234, no. 3. – P. 373–380.
20. Petkov I.V., Salimov R.R., Stefanchuk M.V. On the distortion of the disk image diameter // Journal of Mathematical Sciences. – 2023. – Vol. 274, no. 3. – P. 352–369.
21. Golberg A., Salimov R. Nonlinear Beltrami equation // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2019. – Vol. 65, no. 1. – P. 6–21.
22. Salimov R., Stefanchuk M. Finite Lipschitzness of regular solutions to nonlinear Beltrami equation // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2024. – Vol. 69, no. 6. – P. 913–923.
23. Petkov I., Salimov R., Stefanchuk M. On local Hölder and Lipschitz continuities of solutions to nonlinear Beltrami equation // New Tools in Mathematical Analysis and Applications. Trends in Mathematics. – 2025. – P. 109–119.
24. Ковтонюк Д., Рязанов В. К теории нижних Q -гомеоморфизмов // Український математичний вісник. – 2008. – Т. 5, № 2. – С. 157–181.
25. Golberg A., Salimov R. Topological mappings of integrally bounded p -moduli // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math. – 2012. – Vol. 3 (LXI). – P. 49–66.
26. Salimov R.R. The lower Q -homeomorphisms relative to a p -modulus // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 218. – P. 47–68.
27. Салимов Р.Р. Об оценке меры образа шара для нижних Q -гомеоморфизмов // Доповіді НАН України. – 2016. – № 1. – С. 19–25.
28. Стефанчук М.В. Про асимптотичну поведінку на нескінченності нижніх Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля на комплексній площині // Праці ІПММ НАН України. – 2024. – Т. 38, № 2. – С. 103–118.
29. Стефанчук М.В. Про експоненціальну асимптотику на нескінченності нижніх Q -гомеоморфізмів на комплексній площині // Праці ІПММ НАН України. – 2025. – Т. 39, № 1. – С. 53–66.
30. Astala K., Iwaniec T., Martin G. Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane. – Princeton Mathematical Series. – Princeton: Princeton University Press, NJ, 2009. – 48.
31. Ikoma K. On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space. – Nagoya

- Math. J. – 1965. – Vol. 25. – P. 175–203.
32. Ahlfors L.V. Lectures on quasiconformal mappings. – Van Nostrand Mathematical Studies. – Toronto, Ont.-New York-London: D. Van Nostrand Co., 1966. – Vol. 10.
33. Gehring F.W. Lipschitz mappings and the p -capacity of ring in n -space // Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, N.Y., 1969). – Ann. of Math. Studies. – 1971. – Vol. 66. – P. 175–193.
34. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Mappings with finite length distortion // J. Anal. Math. – 2004. – Vol. 93. – P. – 215–236.
35. Gehring F.W. Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – Vol. 103. – P. 353–393.
36. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Degenerate Beltrami equation and radial Q -homeomorphisms. – Helsinki: University of Helsinki, 2003. – Vol. 369. – (Preprint / Department of Mathematics, University of Helsinki).
37. Golberg A., Salimov R., Sevost'yanov E. Poletskii type inequality for mappings from the Orlicz-Sobolev classes // Complex Analysis and Operator Theory. – 2016. – Vol. 10. – P. 881–901.
38. Ryazanov V., Salimov R., Srebro U., Yakubov E. On boundary value problems for the Beltrami equations // Contemporary Mathematics. – 2013. – Vol. 591. – P. 211–242.
39. Salimov R. On regular homeomorphisms in the plane // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 2010. – Vol. 35. – P. 285–289.
40. Afanas'eva E.S., Ryazanov V.I., Salimov R.R. To the theory of mappings of the Sobolev class with the critical index // Journal of Mathematical Sciences. – 2019. – Vol. 239. – P. 1–16.
41. Афанасьева Е.С., Рязанов В.И., Салимов Р.Р. К теории классов Соболева с критическим показателем // Доповіді НАН України. – 2019. – № 8. – С. 3–8.
42. Афанасьева Е.С., Салимов Р.Р. Асимптотическое поведение на бесконечности решений уравнения Бельтрами // Збірник праць Інституту математики НАНУ. – 2015. – Т. 12, № 3. – С. 9–16.
43. Ryazanov V.I., Salimov R.R., Sevost'yanov E.A. On the Orlicz-Sobolev classes and mappings with bounded Dirichlet integral // Ukrainian Mathematical Journal. – 2014. – Vol. 65. – P. 1394–1405.
44. Ryazanov V.I., Salimov R.R., Sevost'yanov E.A. Normality of the Orlicz-Sobolev classes // Ukrainian Mathematical Journal. – 2016. – Vol. 68. – P. 115–126.
45. Салимов Р.Р. Асимптотическое поведение классов Орлича-Соболева на бесконечности // Збірник праць Інституту математики НАНУ. – 2015. – Т. 12, № 4. – С. 273–284.
46. Салимов Р.Р. О новом условии конечной липшицевости классов Орлича-Соболева // Математичні Студії. – 2015. – Т. 44, № 1. – С. 27–35.
47. Salimov R.R. Metric properties of Orlicz-Sobolev classes // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 220. – P. 633–642.
48. Golberg A. Integrally quasiconformal mappings in space // Збірник праць Інституту математики НАНУ. – 2010. – Т. 7, № 2. – С. 53–64.
49. Kruglikov V.I. Capacity of condensers and spatial mappings quasiconformal in the mean // Mathematics of the USSR-Sbornik. – 1987. – Vol. 58, no. 1. – P. 185–205.

References

1. Väisälä, J. (1971). *Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings*. Lecture Notes in Math. Berlin: Springer-Verlag, 229.
2. Stefanchuk, M.V. (2024). On exponential asymptotics of one class of homeomorphisms at a point of the complex plane. *Proceedings of the International Geometry Center*, 17(2), 158–170.
3. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2009). *Moduli in modern mapping theory*. New York: Springer Science + Business Media, LLC.
4. Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2005). On ring solutions of Beltrami equation. *J. Anal. Math.*, 96, 117–150.
5. Salimov, R.R., Smolovaya, E.S. (2010). On the order of growth of ring Q -homeomorphisms at infinity. *Ukrainian Mathematical Journal*, 62(6), 961–969.

6. Golberg, A. (2009). Differential properties of (α, Q) -homeomorphisms. *Further Progress in Analysis, Proc. 6th ISAAC Congr.*, 218–228.
7. Golberg, A., Salimov, R. (2014). Logarithmic Holder continuity of ring homeomorphisms with controlled p -module. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 59(1), 91–98.
8. Golberg, A., Salimov, R., Sevost'yanov, E. (2014). Distortion estimates under mappings with controlled p -module. *Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math.*, 5 (LXIII), 95–114.
9. Salimov, R.R. (2013). One property of ring Q -homeomorphisms with respect to a p -module. *Ukrainian Mathematical Journal*, 65(5), 806–813.
10. Salimov, R.R. (2014). To a theory of ring Q -homeomorphisms with respect to a p -modulus. *Journal of Mathematical Sciences*, 196, 679–692.
11. Salimov, R., Klishchuk, B. (2018). An extremal problem for the volume functional. *Matematychni Studii*, 50(1), 36–43.
12. Salimov, R., Klishchuk, B. (2019). Lower bounds for the volume of the image of a ball. *Ukrainian Mathematical Journal*, 71, 883–895.
13. Salimov, R., Klishchuk, B. (2022). On the asymptotic behavior at infinity of ring Q -homeomorphisms with respect to p -modulus. *Proceedings of IAMM of NASU*, 36(1), 26–35.
14. Salimov, R., Klishchuk, B. (2022). On the behavior at infinity of one class of homeomorphisms. *Current Trends in Analysis, its Applications and Computation. Trends in Mathematics*, 173–180.
15. Salimov, R., Klishchuk, B., Stefanchuk, M. (2023). On the asymptotic behavior at infinity of one mapping class. *Proceedings of the International Geometry Center*, 16(1), 50–58.
16. Klishchuk, B., Salimov, R., Stefanchuk, M. (2025). On the asymptotic behavior of the diameter of the image of a ball at infinity. *Ukrainian Mathematical Journal*, 77(6), 867–889.
17. Stefanchuk M.V. (2024). On exponential asymptotics of ring Q -homeomorphisms at infinity. *Journal of Mathematical Sciences*, 282(1), 83–92.
18. Klishchuk, B. (2022). On power-law behavior of some mapping class at infinity. *Journal of Mathematical Sciences*, 268(2), 192–198.
19. Salimov, R., Klishchuk, B. (2018). Extremal problem for the area of the image of a disk. *Journal of Mathematical Sciences*, 234(3), 373–380.
20. Petkov, I.V., Salimov, R.R., Stefanchuk, M.V. (2023). On the distortion of the disk image diameter. *Journal of Mathematical Sciences*, 274(3), 352–369.
21. Golberg, A., Salimov, R. (2019). Nonlinear Beltrami equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 65(1), 6–21.
22. Salimov, R., Stefanchuk, M. (2024). Finite Lipschitzness of regular solutions to nonlinear Beltrami equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 69(6), 913–923.
23. Petkov, I., Salimov, R., Stefanchuk, M. (2025). On local Hölder and Lipschitz continuities of solutions to nonlinear Beltrami equation. *New Tools in Mathematical Analysis and Applications. Trends in Mathematics*, 109–119.
24. Kovtonyuk, D., Ryazanov, V. (2008). To the theory of lower Q -homeomorphisms. *Ukrainian Mathematical Bulletin*, 5(2), 157–181.
25. Golberg, A., Salimov, R. (2012). Topological mappings of integrally bounded p -moduli. *Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math.*, 3 (LXI), 49–66.
26. Salimov, R.R. (2016). The lower Q -homeomorphisms relative to a p -modulus. *Journal of Mathematical Sciences*, 218, 47–68.
27. Salimov, R.R. (2016). On estimation of the measure of the image of a ball under lower Q -homeomorphisms. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, (1), 19–25.
28. Stefanchuk, M.V. (2024). On asymptotic behavior at infinity of lower Q -homeomorphisms with respect to p -modulus on the complex plane. *Proceedings of IAMM of NASU*, 38(2), 103–118.
29. Stefanchuk, M.V. (2025). On exponential asymptotics at infinity of lower Q -homeomorphisms on the complex plane. *Proceedings of IAMM of NAS of Ukraine*, 39(1), 53–66.
30. Astala, K., Iwaniec, T., Martin, G. (2009). *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane*. Princeton Mathematical Series. Princeton: Princeton University Press, NJ, 48.
31. Ikoma, K. (1965). On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space.

Nagoya Math. J., 25, 175–203.

32. Ahlfors, L.V. (1966). *Lectures on quasiconformal mappings*. Van Nostrand Mathematical Studies. Toronto, Ont.-New York-London: D. Van Nostrand Co., 10.
33. Gehring, F.W. (1971). Lipschitz mappings and the p -capacity of ring in n -space. *Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, N.Y., 1969)*. *Ann. of Math. Studies*, 66, 175–193.
34. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2004). Mappings with finite length distortion. *J. Anal. Math.*, 93, 215–236.
35. Gehring, F.W. (1962). Rings and quasiconformal mappings in space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 103, 353–393.
36. Ryazanov, V., Srebro, U., Yakubov, E. (2003). *Degenerate Beltrami equation and radial Q -homeomorphisms*. Preprint, Department of Mathematics, University of Helsinki, 369.
37. Golberg, A., Salimov, R., Sevost'yanov, E. (2016). Poletskii type inequality for mappings from the Orlicz-Sobolev classes. *Complex Analysis and Operator Theory*, 10, 881–901.
38. Ryazanov, V., Salimov, R., Srebro, U., Yakubov, E. (2013). On boundary value problems for the Beltrami equations. *Contemporary Mathematics*, 591, 211–242.
39. Salimov, R. (2010). On regular homeomorphisms in the plane. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math.*, 35, 285–289.
40. Afanas'eva, E.S., Ryazanov, V.I., Salimov, R.R. (2019). To the theory of mappings of the Sobolev class with the critical index. *Journal of Mathematical Sciences*, 239, 1–16.
41. Afanas'eva, O.S., Ryazanov, V.I., Salimov, R.R. (2019). Toward the theory of the Sobolev classes with critical exponent. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, (8), 3–8.
42. Afanas'eva, O.S., Salimov, R.R. (2015). The asymptotic behaviour of solutions of the Beltrami equation. *Transactions of Institute of Mathematics, the NAS of Ukraine*, 12(3), 9–16.
43. Ryazanov, V.I., Salimov, R.R., Sevost'yanov, E.A. (2014). On the Orlicz-Sobolev classes and mappings with bounded Dirichlet integral. *Ukrainian Mathematical Journal*, 65, 1394–1405.
44. Ryazanov, V.I., Salimov, R.R., Sevost'yanov, E.A. (2016). Normality of the Orlicz-Sobolev classes. *Ukrainian Mathematical Journal*, 68, 115–126.
45. Salimov, R.R. (2015). Asymptotic behavior of the Orlicz-Sobolev classes at infinity. *Transactions of Institute of Mathematics, the NAS of Ukraine*, 12(4), 273–284.
46. Salimov, R.R. (2015). On a new condition of finite Lipschitz of Orlicz-Sobolev class. *Matematychni Studii*, 44(1), 27–35.
47. Salimov, R.R. (2017). Metric properties of Orlicz-Sobolev classes. *Journal of Mathematical Sciences*, 220, 633–642.
48. Golberg, A. (2010). Integrally quasiconformal mappings in space. *Transactions of Institute of Mathematics, the NAS of Ukraine*, 7(2), 53–64.
49. Kruglikov, V.I. (1987). Capacity of condensers and spatial mappings quasiconformal in the mean. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 58(1), 185–205.

M.V. Stefanchuk

On exponential asymptotics of lower Q -homeomorphisms at a point of the complex plane.

The notion of a Q -homeomorphism with respect to the p -module extends the classical geometric definition of a quasiconformal mapping. In particular, if $Q(z) \leq K < \infty$ almost everywhere, then for $p = 2$ the mapping f is quasiconformal in the complex plane $\mathbb{C}$ (see Definition A, pp. 21–22 in [32]). When $1 < p < 2$, the mapping f is locally Lipschitz continuous, while for $p > 2$ the same property holds for its inverse f^{-1} . Moreover, these bounds for p are known to be exact, see [33]. Mappings of this type with $p = 2$ were first studied in [34]. The concept of a ring Q -homeomorphism with respect to the p -module generalizes and localizes the above notion and originates from Gehring's ring definition of quasiconformality (see [35]). It was initially proposed by V. Ryazanov, U. Srebro, and E. Yakubov

for the case $p = 2$ on the complex plane, see [36]. The idea of lower Q -homeomorphisms with respect to the p -module has proved to be an effective geometric framework for analyzing planar and spatial mappings. This concept also stems from Gehring's ring approach to quasiconformal mappings. The corresponding theory has found numerous applications in the analysis of boundary value problems for Beltrami-type equations in the complex plane, as well as for spatial homeomorphisms belonging to Sobolev and Orlicz-Sobolev classes (see [37–47]). Furthermore, the theory of lower and ring Q -homeomorphisms with respect to the p -module can be extended to mappings quasiconformal on average (see [48, 49]). More recently, it has also been employed to investigate regular solutions of nonlinear Beltrami equations involving nonconformal moduli (see [21–23]). In this paper, the asymptotic behavior of exponential type at a point of the complex plane for lower Q -homeomorphisms with respect to the p -module, $1 < p < 2$, has been investigated. In addition, lower exponential-type estimates for the area of the image of a disk under such mappings are obtained. Examples are constructed to demonstrate the sharpness of the obtained results.

Keywords: p -modulus of a family of curves, ring Q -homeomorphisms with respect to p -modulus, lower Q -homeomorphisms with respect to p -modulus.

Ін-т математики НАН України, Київ
stefanmv43@gmail.com

Отримано 01.11.25