

УДК 537.8

**М. Г. Пантелют**, канд. физ.-мат. наук**А. Н. Сафонов****Е. К. Руденко**, канд. техн. наук**Н. Г. Шульженко**, д-р техн. наук

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины  
(г. Харьков, E-mail: shulzh@ipmach.kharkov.ua)

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ФРАГМЕНТАХ РОТОРА СИНХРОННОГО ТУРБОГЕНЕРАТОРА**

*Описана методика конечноэлементного анализа нестационарных электромагнитных полей в трёхмерной постановке. Впервые проведено численное исследование и установлены особенности электромагнитного поля, плотности вихревых токов и добавочных потерь в стыках клиньев ротора турбогенератора.*

*Описано методіку скінченноелементного аналізу нестационарних електромагнітних полів у тривимірній постановці. Вперше проведено чисельне дослідження та встановлено особливості електромагнітного поля, густини вихрових струмів та додаткових втрат в стиках клинів ротора турбогенератора.*

### **Постановка задачи**

Современные мощные синхронные турбогенераторы тепловых и атомных электростанций представляют собой [1, 2] сложные пространственные конструкции с существенно трёхмерным распределением электромагнитного поля. Ротор является наиболее нагруженным конструктивным элементом синхронного турбогенератора. Исследование электромагнитного, теплового, вибрационного и термочувствительного состояния роторов и оценка срабатывания их ресурса на аварийных и переходных режимах является актуальной задачей [1, 2].

На указанных режимах эксплуатации турбогенератора в воздушном зазоре между статором и ротором возникает бегущая волна электромагнитного поля обратной последовательности. Это электромагнитное поле перемещается относительно ротора турбогенератора в направлении, противоположном направлению его вращения, и наводит в нём значительные вихревые токи частоты 100 Гц [3, 4]. Они сосредоточиваются в основном в поверхностном слое толщиной несколько миллиметров (явление скин-эффекта). Вихревые токи вызывают значительные потери, существенно неравномерное распределение температуры по сечению ротора, а также интенсивный локальный нагрев ряда важных конструктивных элементов ротора и в первую очередь клиньев, удерживающих обмотку возбуждения в пазах ротора. Это приводит [1] к появлению теплового небаланса, который может быть причиной повышенных вибраций ротора и возникновения трещин, снижающих ресурс турбогенератора.

Математическое моделирование электромагнитного поля ротора турбогенератора и последующий расчёт его термонапряжённого состояния представляются актуальными для оценки его ресурса.

Методики компьютерного моделирования двумерного электромагнитного поля [3–7] не позволяют проводить численный анализ электромагнитных процессов в конструкциях электрических машин. Для моделирования электромагнитных полей в последнее время широко используется метод конечных элементов [7–12], однако анализ процессов в конструкции всего турбогенератора пока невозможен ввиду сложности задачи.

В данной работе описывается методика моделирования методом конечных элементов нестационарных электромагнитных полей в фрагментах электрических машин в трёхмерной постановке. Проводится численный анализ электромагнитных процессов в стыках пазовых клиньев ротора синхронного турбогенератора ТГВ-300.

**Математическая модель трёхмерного нестационарного электромагнитного поля**

Электромагнитные процессы в электрических машинах описываются системой уравнений Максвелла в дифференциальной форме без учёта токов смещения [8, 9]

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1)$$

дополненной материальными уравнениями, определяющими электрофизические свойства материалов

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \quad \mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{H}$  – вектор напряжённости магнитного поля;  $\mathbf{B}$  – вектор индукции магнитного поля;  $\mathbf{E}$  – вектор напряжённости электрического поля;  $\mathbf{J}$  – вектор плотности токов проводимости, представляющий собой сумму векторов плотностей сторонних токов  $\mathbf{J}_s$  и вихревых токов  $\mathbf{J}_e$ :  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_e$ ;  $\mu$  – магнитная проницаемость;  $\gamma$  – удельная электрическая проводимость. В общем случае, магнитная проницаемость  $\mu$  может зависеть от напряжённости магнитного поля  $\mathbf{H}$  [10]. Явления магнитного гистерезиса и анизотропии магнитных свойств материалов не учитываются.

Решение большинства прикладных задач расчёта электромагнитных полей методом конечных элементов выполняется с использованием представления распределений векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в виде функций потенциалов [8–11]. Наибольшее распространение получили векторный магнитный потенциал  $\mathbf{A}$  и скалярный электрический потенциал  $V$ , которые определяются следующим образом:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}; \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V. \quad (3)$$

В данной работе система уравнений (1), (2) решается с использованием калибровки Лоренца

$$V = -\frac{1}{\mu\gamma} \operatorname{div} \mathbf{A},$$

которая определяет дивергенцию векторного магнитного потенциала  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  в терминах скалярного электрического потенциала  $V$  и позволяет полностью исключить скалярный электрический потенциал  $V$  из рассмотрения [8, 11].

Система уравнений (1), (2) решается в терминах векторного магнитного потенциала  $\mathbf{A}$ , который в декартовой системе координат имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}.$$

Рассматривается решение линейной задачи расчёта электромагнитного поля, т.е. зависимость магнитной проницаемости  $\mu$  от напряжённости магнитного поля  $\mathbf{H}$  не учитывается.

Нестационарная линейная векторная краевая задача, решаемая в терминах векторного магнитного потенциала  $\mathbf{A}$  (3), приобретает вид

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{A} + \mu \mathbf{J}_s = \gamma \mu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \text{ в } \Omega, 0 < t \leq \tau \\ -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \nu} = \alpha_A (\mathbf{A} - \mathbf{A}_\infty) \text{ на } \Gamma, 0 < t \leq \tau. \\ \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \text{ в } \Omega, t = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} A_{x0} \\ A_{y0} \\ A_{z0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}; \quad \mathbf{A}_\infty = \begin{pmatrix} A_{x\infty} \\ A_{y\infty} \\ A_{z\infty} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1},$$

где  $\mathbf{J}_s$  – заданные в одной или нескольких подобластях вектора плотности тока стороннего источника;  $\Omega$  – область решения задачи;  $\Gamma$  – граница области  $\Omega$ ;  $\nu$  – внешняя нормаль к боковой поверхности  $\Gamma$ ;  $\alpha_A$  – штрафной множитель в граничных условиях III рода;  $\mathbf{A}_0$  – вектор начальных условий для компонент векторного магнитного потенциала (при решении прикладных задач все три компоненты задаются равными нулю);  $\mathbf{A}_\infty$  – вектор, компонентами которого являются заданные значения векторного магнитного потенциала на границе  $\Gamma$ .

**Анализ трёхмерных нестационарных электромагнитных полей методом конечных элементов**

Функционал краевой задачи (4) для вектора  $\mathbf{A}$  запишется так:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \iiint_{\Omega} \left[ \frac{1}{\mu} \left( (\nabla A_x)^2 + (\nabla A_y)^2 + (\nabla A_z)^2 \right) + 2\gamma \begin{pmatrix} A_x \frac{\partial A_x}{\partial t} \\ A_y \frac{\partial A_y}{\partial t} \\ A_z \frac{\partial A_z}{\partial t} \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} J_{Sx} A_x \\ J_{Sy} A_y \\ J_{Sz} A_z \end{pmatrix} \right] d\Omega + \iint_{\Gamma} \alpha_A \left( \begin{pmatrix} A_x^2 \\ A_y^2 \\ A_z^2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} A_{x\infty} A_x \\ A_{y\infty} A_y \\ A_{z\infty} A_z \end{pmatrix} \right) d\Gamma. \quad (5)$$

Введём сетку по временной переменной следующим образом:

$$\omega_l = \{t_l : t_l = \Delta t l; l = \overline{0, n_l}; \Delta t = \overline{\tau n_l^{-1}}; n_l \in \mathbb{N}\}$$

Нестационарная задача электродинамики решается с использованием неявной конечно-разностной схемы Крэнка–Николсона по времени для получения приближённого решения в векторном виде

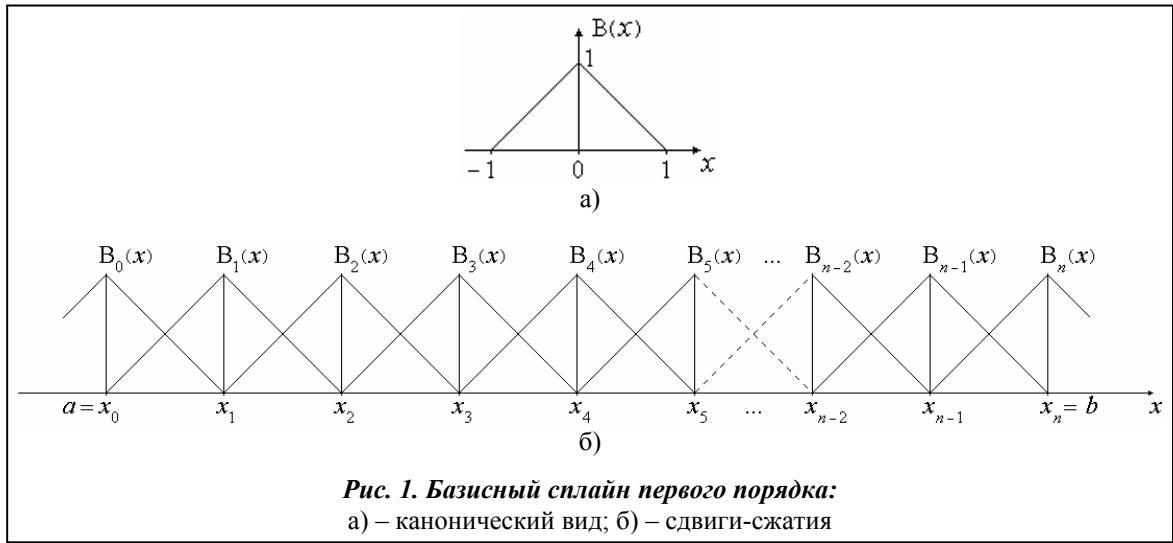
$$\frac{\partial \mathbf{A}^{l+1}}{\partial t} = 2 \frac{\mathbf{A}^{l+1} - \mathbf{A}^l}{\Delta t} - \frac{\partial \mathbf{A}^l}{\partial t}, l = \overline{0, n_l - 1}; \mathbf{A}^0 = \mathbf{A}_0, \quad (6)$$

где  $\Delta t$  – величина шага по времени.

Тогда функционал (5) краевой задачи после подстановки в него (6) выглядит как

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{l+1} = \begin{pmatrix} J_x^{l+1} \\ J_y^{l+1} \\ J_z^{l+1} \end{pmatrix} = \iiint_{\Omega} \left[ \frac{1}{\mu} \left( (\nabla A_x^{l+1})^2 + (\nabla A_y^{l+1})^2 + (\nabla A_z^{l+1})^2 \right) + 4 \frac{\gamma}{\Delta t} \left[ \begin{pmatrix} (A_x^{l+1})^2 \\ (A_y^{l+1})^2 \\ (A_z^{l+1})^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_x^l A_x^{l+1} \\ A_y^l A_y^{l+1} \\ A_z^l A_z^{l+1} \end{pmatrix} \right] - 2\gamma \begin{pmatrix} A_x^{l+1} \frac{\partial A_x^l}{\partial t} \\ A_y^{l+1} \frac{\partial A_y^l}{\partial t} \\ A_z^{l+1} \frac{\partial A_z^l}{\partial t} \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} J_{Sx} A_x^{l+1} \\ J_{Sy} A_y^{l+1} \\ J_{Sz} A_z^{l+1} \end{pmatrix} \right] d\Omega + \\ + \iint_{\Gamma} \alpha_A \left( \begin{pmatrix} (A_x^{l+1})^2 \\ (A_y^{l+1})^2 \\ (A_z^{l+1})^2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} A_{x\infty} A_x^{l+1} \\ A_{y\infty} A_y^{l+1} \\ A_{z\infty} A_z^{l+1} \end{pmatrix} \right) d\Gamma, l = \overline{0, n_l - 1}. \end{aligned}$$

Решение краевой задачи (4) представим в виде



**Рис. 1. Базисный сплайн первого порядка:**  
а) – канонический вид; б) – сдвиги-сжатия

$$\mathbf{A}^{l+1} = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{k=1}^{n_z} \mathbf{A}_{ijk}^{l+1} \varphi_{ijk}, \quad i = \overline{1, n_x}; \quad j = \overline{1, n_y}; \quad k = \overline{1, n_z}; \quad l = \overline{0, n_l - 1},$$

где  $\mathbf{A}_{ijk}^{l+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{xijk}^{l+1} \\ \mathbf{A}_{yijk}^{l+1} \\ \mathbf{A}_{zijk}^{l+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ ,  $i = \overline{1, n_x}; \quad j = \overline{1, n_y}; \quad k = \overline{1, n_z}$  – узловые значения искомой функции;

$\varphi_{ijk}$ ,  $i = \overline{1, n_x}; \quad j = \overline{1, n_y}; \quad k = \overline{1, n_z}$  – базисные финитные функции, определённые на произвольной сетке узлов.

Канонический вид сплайна первой степени, аппроксимирующего решение по одной из координат в пределах конечного элемента, представлен на рис. 1, а.

В аналитическом виде линейный базисный сплайн (см. рис. 1, а) имеет вид

$$B_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x - x_i|}{h}, & \frac{|x - x_i|}{h} \leq 1 \\ 0, & \frac{|x - x_i|}{h} > 1 \end{cases} \quad (7)$$

Сдвиги-сжатия данного канонического сплайна (7) на сетке

$$\omega_x = \{x_i : x_i = a + ih; \quad i = \overline{0, n}; \quad h = (b - a)n^{-1}; \quad n \in \mathbb{N}\}$$

представлены на рис. 1, б.

Аналогичные сдвиги-сжатия строятся на соответствующих сетках по двум другим переменным. Таким образом, конечноэлементный базис задачи представляет собой декартовое произведение  $\varphi_{ijk} = B_i(x)B_j(y)B_k(z)$ .

Необходимое условие минимумов функционалов (5)

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{J}^{l+1}}{\partial \mathbf{A}_{x pqr}^{l+1}} = 0; \quad p = \overline{1, n_x}; \quad q = \overline{1, n_y}; \quad r = \overline{1, n_z}; \quad l = \overline{0, n_l - 1} \\ \frac{\partial \mathcal{J}^{l+1}}{\partial \mathbf{A}_{y pqr}^{l+1}} = 0; \quad p = \overline{1, n_x}; \quad q = \overline{1, n_y}; \quad r = \overline{1, n_z}; \quad l = \overline{0, n_l - 1} \\ \frac{\partial \mathcal{J}^{l+1}}{\partial \mathbf{A}_{z pqr}^{l+1}} = 0; \quad p = \overline{1, n_x}; \quad q = \overline{1, n_y}; \quad r = \overline{1, n_z}; \quad l = \overline{0, n_l - 1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g_x^{l+1}}{\partial A_{x\ pqr}^{l+1}} = 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. ; p = \overline{1, n_x}; q = \overline{1, n_y}; r = \overline{1, n_z}; l = \overline{0, n_t - 1}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\partial g_y^{l+1}}{\partial A_{y\ pqr}^{l+1}} = 0 \\ 0 \end{array} \right. ; p = \overline{1, n_x}; q = \overline{1, n_y}; r = \overline{1, n_z}; l = \overline{0, n_t - 1} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial g_z^{l+1}}{\partial A_{z\ pqr}^{l+1}} = 0 \end{array} \right. ; p = \overline{1, n_x}; q = \overline{1, n_y}; r = \overline{1, n_z}; l = \overline{0, n_t - 1}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g_x^{l+1}}{\partial A_{x\ pqr}^{l+1}} = 0 \\ \frac{\partial g_y^{l+1}}{\partial A_{y\ pqr}^{l+1}} = 0 \\ \frac{\partial g_z^{l+1}}{\partial A_{z\ pqr}^{l+1}} = 0 \end{array} \right. ; p = \overline{1, n_x}; q = \overline{1, n_y}; r = \overline{1, n_z}; l = \overline{0, n_t - 1}$$

на основании которого получим систему линейных алгебраических уравнений для вектора  $\mathbf{A}_{ijk}^{l+1}$

$$\sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{k=1}^{n_z} \mathbf{A}_{ijk}^{l+1} \left\{ \iiint_{\Omega} \left[ \frac{1}{\mu} \nabla \varphi_{ijk} \nabla \varphi_{pqr} + 2 \frac{\gamma}{\Delta t} \varphi_{ijk} \varphi_{pqr} \right] d\Omega + \iint_{\Gamma} \alpha_A \varphi_{ijk} \varphi_{pqr} d\Gamma \right\} =$$

$$= \iiint_{\Omega} \left( 2 \frac{\gamma}{\Delta t} \mathbf{A}^l + \gamma \frac{\partial \mathbf{A}^l}{\partial t} + \mathbf{J}_S \right) \varphi_{pqr} d\Omega + \iint_{\Gamma} \alpha_A \mathbf{A}_{\infty} \varphi_{pqr} d\Gamma;$$

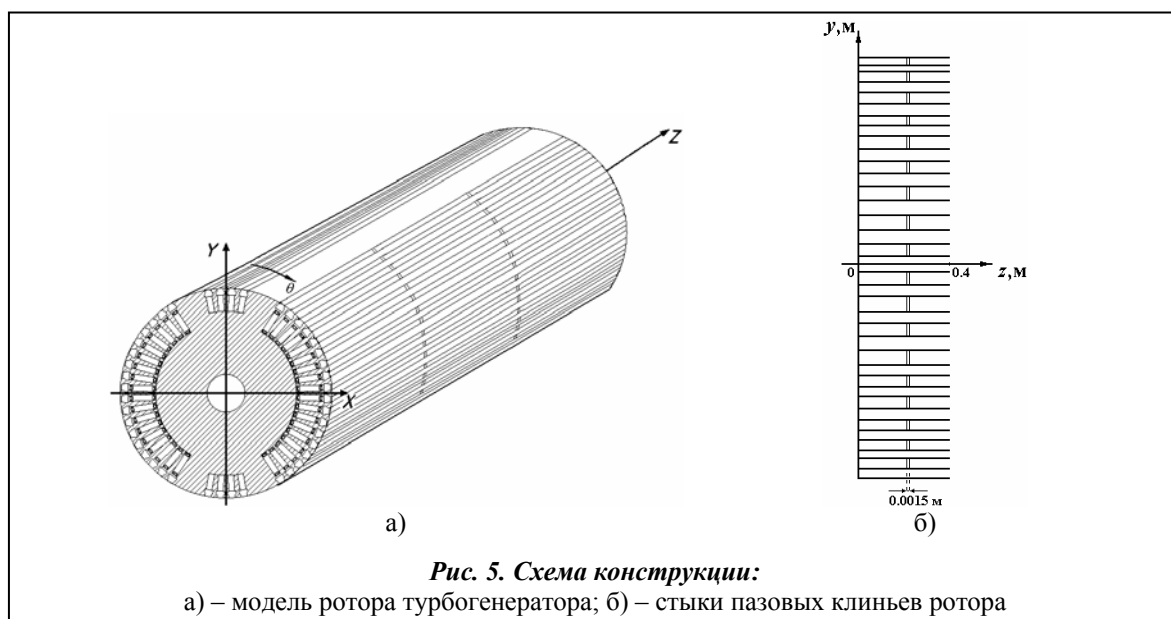
$$p = \overline{1, n_x}; q = \overline{1, n_y}; r = \overline{1, n_z}; l = \overline{0, n_t - 1}.$$

В результате решения данной системы находим компоненты вектора  $\mathbf{A}$  и вычисляем его абсолютную величину

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \tag{8}$$

В разработанном программном обеспечении реализован метод конечных элементов с использованием пространственных 8-узловых конечных элементов в виде произвольных шестигранников [13]. При численном интегрировании по объёму и поверхности тела (5) с использованием двухточечной квадратуры Гаусса по трём направлениям произвольный шестигранник в общей системе координат  $x, y, z$ , преобразуется по известным формулам приведения в единичный куб в местной системе координат  $\xi, \eta, \zeta$ .

Для тестирования разработанного программного обеспечения решён ряд одномерных и двумерных задач распределения стационарного и нестационарного электромагнитного полей. Полученные результаты сравнивались с аналитическими решениями [13], результатами других авторов [14], а также с результатами расчётов с использованием разра-



ботанной ранее [3, 4] методики и программы для конечноэлементного анализа двухмерных электромагнитных полей. Подробный анализ решённых тестовых примеров приведен в [13].

### Численный анализ особенностей нестационарного электромагнитного поля ротора турбогенератора в стыках пазовых клиньев

Современный мощный синхронный турбогенератор является сложной пространственной конструкцией. Выполнить расчёт трёхмерного нестационарного электромагнитного поля во всей конструкции машины не представляется возможным по причине ограниченных ресурсов вычислительной техники. Разработанная математическая модель и программное обеспечение позволяют выполнить компьютерное моделирование электромагнитных процессов в фрагментах турбогенератора с достаточной для инженерной практики точностью.

Исследованы электромагнитное поле, вихревые токи и добавочные потери при коротком замыкании двух фаз в стыках пазовых клиньев ротора синхронного турбогенератора ТГВ-300. Общая схема ротора приведена на рис. 2, а, рассматриваемый фрагмент конструкции – на рис. 2, б.

Диаметр ротора 110 см, материал – сталь с удельной электрической проводимостью  $\gamma = 0,5 \cdot 10^7 \text{ См} \cdot \text{м}^{-1}$  и постоянным средним значением магнитной проницаемости  $\mu = 100\mu_0$  ( $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума) [3].

Обмоточные пазы (кроме пазов на поверхности большого зуба) заполнены медной обмоткой с удельной электрической проводимостью  $\gamma = 6 \cdot 10^7 \text{ См} \cdot \text{м}^{-1}$ . Материал немагнитных пазовых клиньев (кроме пазов на поверхности большого зуба): дюралюминий ( $\gamma = 3,33 \cdot 10^7 \text{ См} \cdot \text{м}^{-1}$ ) [3]. Пазовые клинья на поверхности большого зуба выполнены из той же стали, что и ротор.

Воздушный зазор между статором и ротором 9 см. Бегущая волна плотности токов обратной последовательности при коротком замыкании двух фаз турбогенератора задаётся в подобласти толщиной 5 см, имитирующей статор турбогенератора, в следующем виде [3, 12]:

$$\mathbf{J}_s = \begin{pmatrix} J_{sx} \\ J_{sy} \\ J_{sz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\vartheta(c_1 e^{-t/\tilde{t}_1} + c_2 e^{-t/\tilde{t}_2} + c_3) \sin(2\pi ft + \varphi) \\ \sqrt{2}\vartheta(c_1 e^{-t/\tilde{t}_1} + c_2 e^{-t/\tilde{t}_2} + c_3) \sin(2\pi ft + \varphi) \\ \vartheta(c_1 e^{-t/\tilde{t}_1} + c_2 e^{-t/\tilde{t}_2} + c_3) \sin(2\pi ft + \varphi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1},$$

$$c_1 = 3763,2; \quad c_2 = 14403; \quad c_3 = 5033,7; \quad \tilde{t}_1 = 0,012 \text{ с}; \quad \tilde{t}_2 = 1,14 \text{ с}; \quad \vartheta = 0,001724145; \quad f = 100 \text{ Гц};$$

$$(c_1 e^{-t/\tau_1} + c_2 e^{-t/\tau_2} + c_3) \sin(2\pi ft + \varphi) \in C^\infty(0, \tau]; \quad \varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & y = 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & y \neq 0 \end{cases}$$

$x, y$  – оси декартовой системы координат.

Материал подобласти – медь ( $\gamma = 6 \cdot 10^7 \text{ См} \cdot \text{м}^{-1}$ ). Радиус удалённой границы  $\Gamma$ , на которой задаются нулевые граничные условия для всех трёх компонент векторного магнитного потенциала, составляет 150 см.

Длина рассматриваемого фрагмента ротора (см. рис. 2, б) 40 см, толщина воздушного зазора между клиньями – 1,5 мм. На обоих торцах расчётной области (рис. 2, б) заданы граничные условия симметрии для компонент векторного магнитного потенциала ( $A_x, A_y, A_z$ ), что оправдывается относительно небольшой длиной рассматриваемого фрагмента ротора в области стыка клиньев. При этом предполагается, что соседние по длине ротора стыки клиньев находятся в практически одинаковом нестационарном поле стороннего источника, которое не изменяется по длине ротора на участке длиной 40 см. На левой и правой вертикальных границах воздушного зазора между клиньями заданы граничные условия  $A_z = 0$ , что описывает физические условия непротекания переменного электрического тока в направлении оси ротора через воздушный зазор между клиньями.

Численные результаты получены для точек с координатами (см. рис. 2, б)  $z = 0$  и  $z = 0,4 \text{ м}$  (левый и правый торцы фрагмента соответственно), а также  $z = 0,19925 \text{ м}$  и  $z = 0,20075 \text{ м}$  (левая и правая вертикальные границы воздушного зазора между клиньями соответственно). На рис. 3–6 приводятся результаты для компонент векторного магнитного потенциала, осевой компоненты вектора плотности вихревых токов и добавочных потерь на левой границе воздушного зазора по лучам, расположенным под углом  $45^\circ$  к осям  $x$  и  $y$ : на наружной поверхности ротора (радиус 0,550 м, кривые 1); на глубине 0,4 см под поверхностью соответствующего пазового клина (радиус 0,546 м, кривые 2); на глубине 0,8 см под поверхностью клина (радиус 0,542 м, кривые 3).

Компоненты вектора плотности вихревого тока  $\mathbf{J}_e$ , его абсолютная величина  $J_e$ , а также скалярная величина добавочных потерь  $Q$  в роторе вычисляются по формулам

$$\mathbf{J} \equiv \mathbf{J}_e = -\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t};$$

$$J \equiv J_e = \sqrt{J_{ex}^2 + J_{ey}^2 + J_{ez}^2}; \quad (9)$$

$$Q = \frac{1}{\gamma} J_e^2.$$

Для вычисления производной по времени от вектора  $\mathbf{A}$  в (9) применяется конечно-разностная аппроксимация на

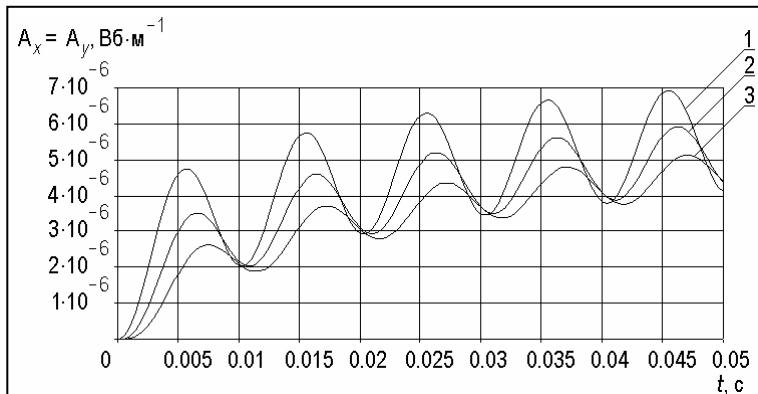


Рис. 3. Компоненты  $A_x$  и  $A_y$  векторного магнитного потенциала

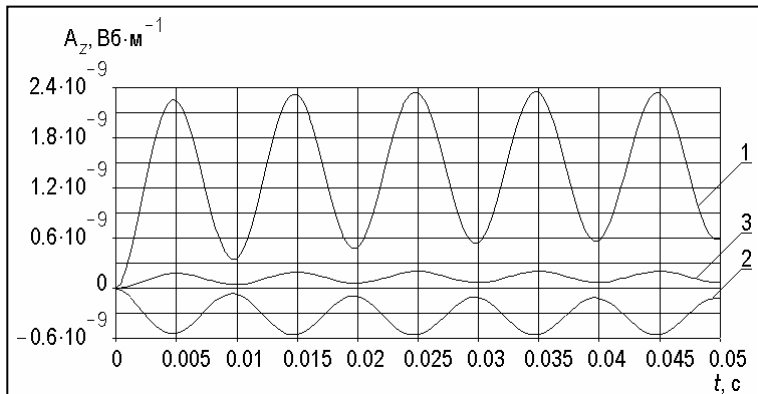


Рис. 4. Компонента  $A_z$  векторного магнитного потенциала

сетке  $\omega_t$  в виде [15, 16]

$$\frac{\partial \mathbf{A}^0}{\partial t} \approx \frac{-3\mathbf{A}^0 + 4\mathbf{A}^1 - \mathbf{A}^2}{2\Delta t}; \quad \frac{\partial \mathbf{A}^l}{\partial t} \approx \frac{\mathbf{A}^{l+1} - \mathbf{A}^{l-1}}{2\Delta t}, \quad l = \overline{1, n_t - 1}; \quad \frac{\partial \mathbf{A}^{n_t}}{\partial t} \approx \frac{3\mathbf{A}^{n_t} - 4\mathbf{A}^{n_t-1} + \mathbf{A}^{n_t-2}}{2\Delta t}.$$

Как следует из приведенных результатов, электромагнитные процессы в рассматриваемом фрагменте ротора турбогенератора при коротком замыкании двух фаз являются существенно нестационарными и трёхмерными. Переходной процесс стабилизируется после 50 мкс (амплитудные значения соседних полуволн одного знака компонент плотности тока практически не меняются). Продолжающееся нарастание во времени амплитудных значений компонент векторного магнитного потенциала практически не оказывает влияния на амплитуды компонент плотности тока.

Анализ явления скин-эффекта (сосредоточения электромагнитного поля и вихревых токов в поверхностном слое клиньев) показывает, что амплитуда всех компонент векторного магнитного потенциала уменьшается в 1,17–1,20 раза на глубине 0,4 см и в 1,34–1,38 раза на глубине 0,8 см от поверхности.

Аналогичные результаты получены также для компонент  $A_x$  и  $A_y$  векторного магнитного потенциала на левой и правой вертикальных границах воздушного зазора между клиньями (см. рис. 3). Изменение осевой компоненты  $A_z$  по глубине клина имеет иной характер (см. рис. 4). Амплитудное значение указанной компоненты векторного магнитного потенциала уменьшается в 4,24 раза на глубине 0,4 см и в 10,26 раза на глубине 0,8 см от поверхности. При этом амплитудные значения компоненты  $A_z$  на границах воздушного зазора между клиньями, в отличие от компонент  $A_x$  и  $A_y$ , на 3–4 порядка меньше, чем на торцах рассматриваемого фрагмента (в теле клина). Это объясняется физическими условиями непротекания переменного электрического тока в направлении оси ротора через воздушный зазор между клиньями (воздух выступает в качестве изолятора тока, текущего вдоль клина в направлении оси ротора). Амплитудные значения модуля векторного магнитного потенциала

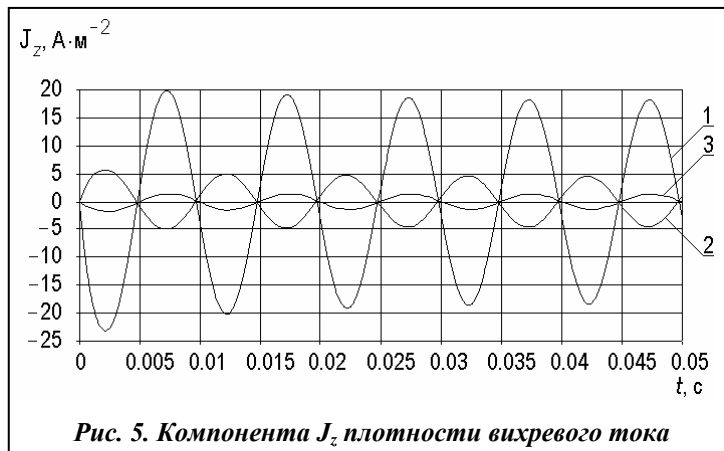


Рис. 5. Компонента  $J_z$  плотности вихревого тока

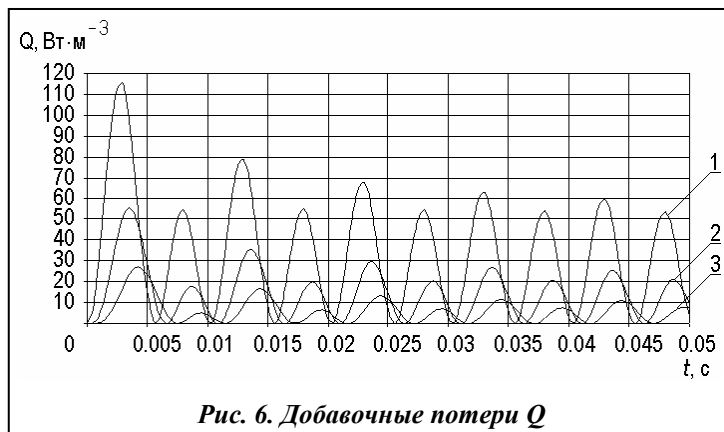


Рис. 6. Добавочные потери  $Q$

(8) на границах зазора в 1,24–1,29 раза меньше, чем в теле клина, что объясняется разными порядками величин  $A_z$  и  $A_x, A_y$ .

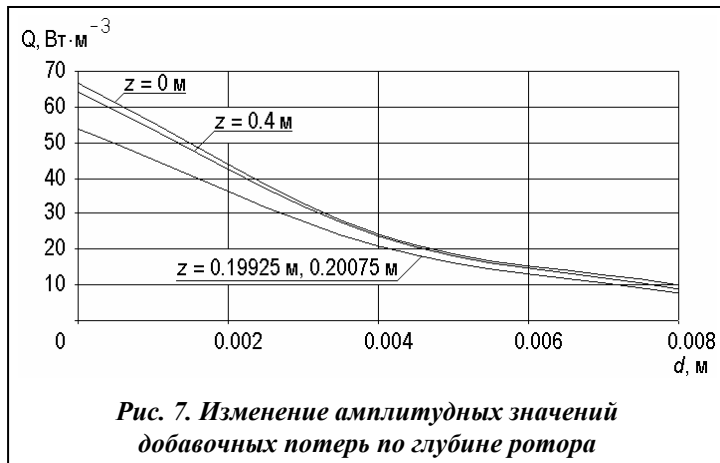
Изменение во времени осевой компоненты вектора плотности вихревых токов, а также добавочных потерь (9) в различных точках ротора показано на рис. 5, 6. Амплитудные значения осевой компоненты плотности тока  $J_z$  на границах зазора между клиньями на 3–4 порядка меньше, чем на торцах рассматриваемого фрагмента (в теле клина). Другие компоненты ( $J_x$  и  $J_y$ ) плотности тока практически не изменяются по длине клина, а модуль вектора плотности тока на границе зазора в 1,20–1,29 раза меньше, чем в теле клина. Это обусловлено тем, что воздух в зазоре между клиньями не пропускает переменный электрический ток в осевом направлении.

На границе зазора между



клиньями добавочные потери, как и модуль вектора плотности тока, в 1,20–1,29 раза меньше, чем в теле клина (см. рис. 6), что практически совпадает с результатами для модуля векторного магнитного потенциала (расхождение 3,2%).

Явление скин-эффекта в рассматриваемых точках пазовых клиньев иллюстрируется также графиками изменения компонент векторного магнитного потенциала, компонент плотности вихре-



**Рис. 7. Изменение амплитудных значений добавочных потерь по глубине ротора**

вых токов и потерь по глубине ротора. На рис. 7 представлены амплитудные значения потерь в интервале времени  $t \in [0,045 \text{ с}; 0,05 \text{ с}]$ , на котором имеют место признаки стабилизации переходного процесса (см. рис. 3–6). Анализ приведенных результатов показывает, что в рассматриваемом достаточно тонком поверхностном слое ротора (толщина слоя 0,8 см) изменение компонент векторного магнитного потенциала носит практически линейный характер. Линейные зависимости представляют собой начальные участки экспонент, по которым электромагнитное поле затухает по глубине от максимального значения на поверхности ротора асимптотически до нулевого значения на оси. При этом соответствующие компоненты плотности вихревых токов затухают по глубине ротора более резко (практически по экспоненциальному закону). Градиент уменьшения добавочных потерь по глубине (см. рис. 7) ещё выше, чем в случае плотности вихревых токов. Добавочные потери затухают по закону, близкому к квадрату экспоненты, что объясняется зависимостями (9) (добавочные потери пропорциональны плотности вихревых токов в квадрате).

**Выводы**

В статье описана разработанная методика конечноэлементного анализа пространственных нестационарных электромагнитных полей в фрагментах электрических машин.

Проведено численное исследование и установлены особенности электромагнитных явлений в стыках пазовых клиньев ротора турбогенератора ТГВ-300 при коротком замыкании двух фаз, которое не может быть выполнено в двухмерной постановке. Показано, что переходной процесс стабилизируется после 50 мкс (амплитудные значения соседних полу-волн одного знака компонент плотности тока практически не меняются).

Несмотря на то, что воздух в зазоре между клиньями не пропускает переменный электрический ток в осевом направлении, амплитудные значения модуля векторного магнитного потенциала и плотности тока, а также добавочные потери на границе зазора лишь на 20–30% меньше, чем в теле клина. Это объясняется влиянием на поле в окрестности зазора токов в соседних с рассматриваемым клином непрерывных участках стального ротора и вызванным этим перераспределением поля в зазоре и на его границах.

В трёхмерной постановке исследовано явление скин-эффекта в пазовых клиньях ротора турбогенератора во вращающемся нестационарном электромагнитном поле. Установлено, что компоненты плотности вихревых токов затухают по глубине ротора более резко, чем соответствующие компоненты векторного магнитного потенциала. Градиент уменьшения добавочных потерь по глубине заметнее, чем для плотности вихревых токов. Это можно объяснить тем, что добавочные потери пропорциональны плотности вихревых токов в квадрате.

Полученные результаты могут быть использованы для расчётной оценки термомеханического, вибрационного состояния и срабатывания ресурса роторов турбогенераторов.

**Литература**

1. *Титов В. В.* Турбогенераторы. Расчёт и конструкция / В. В. Титов., Г. М. Хуторецкий, Г. А. Загородная и др. – Л.: Энергия, 1967. – 895 с.
2. *Хуторецкий Г. М.* Проектирование турбогенераторов / Г. М. Хуторецкий, М. И. Токов, Е. В. Толвинская. – Л.: Энергоатомиздат, 1987. – 256 с.
3. *Шульженко Н. Г.* Влияние материала пазовых клиньев на распределение электромагнитного поля, плотности тока и потерь от токов обратной последовательности в роторе турбогенератора при двухфазном коротком замыкании / Н. Г. Шульженко, Ю. В. Зозулин, М. Г. Пантелят, Е. К. Руденко, С. А. Петушкова // Электротехника и электромеханика. – 2005. – № 3. – С. 61–64.
4. *Шульженко Н. Г.* Добавочные потери в роторе турбогенератора при продолжительной несимметричной нагрузке / Н. Г. Шульженко, М. Г. Пантелят, Е. К. Руденко, Ю. В. Зозулин // Электротехника и электромеханика. – 2006. – № 1. – С. 54–57.
5. *Васьковский Ю. Н.* Оптимизация концевых клиньев ротора турбогенератора для повышения надёжности его работы в несимметричных режимах / Ю. Н. Васьковский, С. С. Цивинский, Ю. А. Гайдено // Электротехника и электромеханика. – 2004. – № 3. – С. 26–28.
6. *Милых В. И.* Расчётно-экспериментальное тестирование программы Femm и преодоление проблем её использования для расчёта магнитного поля электрических машин / В. И. Милых, И. В. Поляков, Н. В. Полякова, Е. И. Штангеев // Электротехника и электромеханика. – 2004. – № 3. – С. 38–43.
7. *Кулон Ж.-Л.* САПР в электротехнике / Ж.-Л. Кулон, Ж.-К. Сабонадьер. – М.: Мир, 1988. – 208 с.
8. *Сильвестер П.* Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков / П. Сильвестер, Р. Феррари. – М.: Мир, 1986. – 229 с.
9. *Biró O.* On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three-dimensional eddy currents / O. Biró, K. Preis // IEEE Transactions on Magnetics. – 1989. – **25**, № 4. – P. 3145–3159.
10. *Biró O.* Various FEM formulations for the calculation of transient 3D eddy currents in nonlinear media / O. Biró, K. Preis, K. R. Richter // IEEE Transactions on Magnetics. – 1995. – **31**, № 3. – P. 1307–1312.
11. *Пантелят М. Г.* Использование векторного магнитного потенциала в конечноэлементном анализе нестационарных трёхмерных электромагнитных полей в проводящих средах / М. Г. Пантелят, Н. Г. Шульженко // Электротехника и электромеханика. – 2007. – № 5. – С. 42–47.
12. *Jiayang D.* Negative sequence eddy current field analysis of a 1055 MVA turbogenerator by using 3D finite element model / D. Jiayang, L. Xubiao., L. Feng, Y. Shiyou, N. Guangzheng. – Proc. 8<sup>th</sup> Intern. Conf. on Electrical Machines and Systems (ICEMS'2005), Nanjing, China, September 2005. – P. 2075–2078.
13. *Пантелят М. Г.* Конечноэлементный анализ стационарных магнитных полей в трёхмерной постановке / М. Г. Пантелят, Е. К. Руденко, А. Н. Сафонов, Н. Г. Шульженко // Вестн. Харьк. нац. ун-та. Сер. Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления. – 2009. – Вып. 11, № 847. – С. 292–306.
14. *Алиевский Б. Л.* Расчёт параметров магнитных полей осесимметричных катушек: Справочник / Б. Л. Алиевский., В. Л. Орлов. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 112 с.
15. *Демидович Б. П.* Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
16. *Березин И. С.* Методы вычислений: В 2-х т. / И. С. Березин., Н. П. Жидков. – М.: Физматлит, 1959. – Т. 2. – 620 с.

Поступила в редакцию  
21.12.09