

7. Жовдак В. А. Статистическая динамика рабочих колес турбомашин с технологической расстройкой / В. А. Жовдак, А. А. Ларин, А. Ф. Кабанов // Пробл. прочности. – 2008. – № 5 (395). – С. 105–113
8. Жовдак В. О. Нелінійні коливання пакетів лопаток з роз'ємними з'єднаннями / В. О. Жовдак, А. П. Зінковський, О. С. Степченко, Я. Д. Круглій // Пробл. машиностроения. – 2009. – Т. 12, № 4. – С. 45–53.

Поступила в редакцию
10.02.10

УДК 539.3

Ю. А. Щербакова

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»
(г. Харьков, E-mail: k405@d4.khai.edu)

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПОД ДЕЙСТВИЕМ КРУГОВОГО ШТАМПА

При помощи обобщенного метода Фурье проведен анализ напряженно-деформированного состояния при осесимметричном вдавливании кругового в плане штампа в трансверсально изотропное полупространство с неподвижным параболоидальным основанием, при отсутствии трения между штампом и полупространством. Задача сведена к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Проведен численный анализ распределения напряжений между граничными поверхностями в плоскостях, параллельных границе полупространства. Приведен качественный анализ напряжений в зависимости от геометрических параметров.

За допомогою узагальненого методу Фур'є проведено аналіз напружено-деформованого стану при осесиметричному вдавлюванні кругового в плані штамп у трансверсально изотропний півпростір з нерухомою параболоїдальною основою за відсутності тертя між штампом та півпростором. Задачу зведено до системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Проведено чисельний аналіз розподілу напружень між граничними поверхнями в площинах, що є паралельними границі півпростору. Наведено якісний аналіз напружень в залежності від геометричних параметрів.

Исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) пространственных канонических тел с усложненными физико-механическими свойствами, в частности с трансверсальной изотропией материала тела, является важной частью создания математических моделей композитных материалов. Над этим работали многие авторы, используя различные методы. В работе [1] применяется один из вариантов метода однородных решений, в работах [2–4] – метод разделения переменных. Особенно отметим [4], где методом Фурье построены точные решения уравнений равновесия трансверсально изотропного парабооида вращения. Подчеркнем, что в известной нам научной литературе практически отсутствуют исследования НДС в трансверсально изотропных многосвязных канонических телах, ограниченных координатными поверхностями нескольких криволинейных систем координат. Исключением является работы [5–7], в которых используется обобщенный метод Фурье (ОМФ). В частности, в [7] развит аппарат ОМФ применительно к трансверсально изотропным полупространству и парабооиду вращения. Проведен асимптотический анализ напряжений, создаваемых в трансверсально изотропном полупространстве с неподвижным параболоидальным включением сосредоточенной силой. Заметим, что аппарат ОМФ для различных пар криволинейных координат (но без параболоидальных) в трансверсально изотропном случае был развит в работе [8]. Известные методики численных расчетов малоэффективны в пространственных многосвязных областях со сложной геометрией, особенно в случае некомпактной

границы области. В данной работе рассмотрена задача теории упругости для трансверсально изотропного тела с двумя некомпактными непересекающимися граничными поверхностями – плоскостью и параболоидом вращения.

Рассмотрим осесимметричное вдавливание кругового в плане штампа в трансверсально изотропное полупространство с неподвижным параболоидальным основанием. Считаем, что трение между штампом и полупространством отсутствует, радиус штампа равен a , уравнение $z = c_1\rho - c_2$ ($c_j > 0$) задает поверхность параболоидального основания в цилиндрической системе координат (ρ, z, φ) , соосной с осью штампа, начало которой расположено на расстоянии h от границы полупространства. Ось анизотропии совпадает с осью симметрии рассматриваемого тела (рис 1).

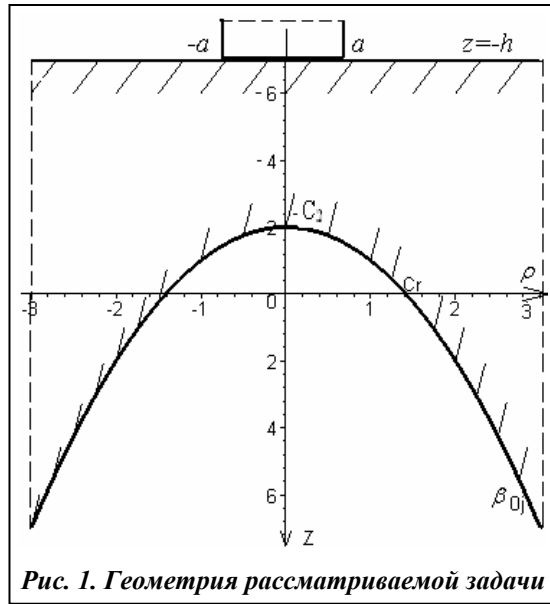


Рис. 1. Геометрия рассматриваемой задачи

Введем две параболоидальные системы координат $(\beta_j, \alpha_j, \varphi_j)$ ($j = 1, 2$), которые связаны с цилиндрической системой координат формулами

$$\begin{cases} \rho = \rho_j \\ z = v_j(z_j + \gamma_j), \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_j = a_j \alpha_j \beta_j \\ z_j = \frac{a_j}{2} (\alpha_j^2 - \beta_j^2), \end{cases}$$

где $a_j > 0$ – параметры параболоидальных координат. Уравнение параболоидального основания можно представить в виде $\beta_j = \beta_{j0}$, где $a_j \beta_{j0}^2 = v_j / (2c_1)$, если потребовать, чтобы $\gamma_j = v_j / (4c_1) - c_2 / v_j$. При этом на поверхности параболоида $v_j a_j \alpha_j^2 = 2c_1 \rho^2$ (ρ – координата на поверхности параболоида).

Будем искать решение поставленной задачи в виде

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_0^\infty A_j(\lambda) \mathbf{U}_{j,0,\lambda}^{-(2)}(\rho, z_j) d\lambda + \int_0^\infty B_j(t) \mathbf{U}_{j,0,t}^{+(9)}(\alpha_j, \beta_j) dt \right\}, \quad (1)$$

где $\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{\pm(9)}(\alpha_s, \beta_s, \varphi) = a_s \frac{\partial}{\lambda \partial \lambda} \mathbf{D}_s u_{s,m,\lambda}^{\pm(9)}(\alpha_s, \beta_s, \varphi), \quad \mathbf{U}_{j,m,\lambda}^{\pm(2)}(\rho, z_j, \varphi) = \frac{1}{\lambda} \mathbf{D}_j u_{j,m,\lambda}^{\pm(2)}(\rho, z_j, \varphi),$

$$u_{j,m,\lambda}^{\pm(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi) = \begin{Bmatrix} K_m(\lambda \beta_j) \\ I_m(\lambda \beta_j) \end{Bmatrix} J_m(\lambda \alpha_j) e^{im\varphi}, \quad u_{j,m,\lambda}^{\pm(2)}(\rho, z_j, \varphi) = e^{\pm \lambda z_j + jm\varphi} J_m(\lambda \rho),$$

$$\mathbf{D}_s = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{k_s}{v_s} \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z_s}, \quad (s = 1, 2).$$

Здесь и далее $K_m(x)$ – функция Макдональда; $J_m(x)$ и $I_m(x)$ – обычная и модифицированная функции Бесселя первого рода.

Для базисных решений уравнения Ламе в цилиндрических и параболоидальных координатах теоремы сложения имеют вид [7]

$$\mathbf{U}_{j,m,t}^{+(9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi) = - \int_0^\infty \mathbf{g}_{m,t,j}^{(92)\lambda} \mathbf{U}_{j,m,\lambda}^{\pm(2)}(\rho, z_j, \varphi) d\lambda, \quad (z > 0), \quad (2)$$

$$\mathbf{U}_{j,m,\lambda}^{\pm(2)}(\rho, z_j, \varphi) = \int_0^{\infty} \mathbf{g}_{m,\lambda,j}^{(29)t} \mathbf{U}_{j,m,t}^{- (9)}(\alpha_j, \beta_j, \varphi) dt, \quad (3)$$

где $\mathbf{g}_{m,t,j}^{(92)\lambda} = \frac{1}{2\lambda} e^{-t^2/(2a_j\lambda)}$; $\mathbf{g}_{m,\lambda,j}^{(29)t} = \frac{t}{\lambda a_j} e^{-t^2/(2a_j\lambda)}$.

Преобразуя решение (1) с помощью теорем сложения (2) и (3) отдельно к цилиндрическим и параболаидальным координатам соответственно, получим

$$U = \sum_{j=1}^2 \int_0^{\infty} \left\{ A_j(\lambda) \mathbf{U}_{j,0,\lambda}^{- (2)}(\rho, z_j) - \mathbf{U}_{j,0,\lambda}^{+ (2)}(\rho, z_j) \int_0^{\infty} B_j(t) \mathbf{g}_{0,t,j}^{(92)\lambda} dt \right\} d\lambda, \quad (4)$$

$$U = \sum_{j=1}^2 \int_0^{\infty} \left\{ B_j(t) \mathbf{U}_{j,0,t}^{+ (9)}(\alpha_j, \beta_j) + \mathbf{U}_{j,0,t}^{- (9)}(\alpha_j, \beta_j) \int_0^{\infty} A_j(\lambda) \mathbf{g}_{0,\lambda,j}^{(29)t} d\lambda \right\} dt. \quad (5)$$

Из условий закрепления на поверхности параболоида после перехода к координатной записи перемещения имеют вид

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^2 \int_0^{\infty} \left\{ B_j(t) \left[K_1(t\beta_{j0}) J_1(t\alpha_j) \mathbf{e}_\rho - \frac{k_j}{v_j} K_0(t\beta_{j0}) J_0(t\alpha_j) \mathbf{e}_z \right] + \left[-I_1(t\beta_{j0}) J_1(t\alpha_j) \mathbf{e}_\rho - \frac{k_j}{v_j} I_0(t\beta_{j0}) J_0(t\alpha_j) \mathbf{e}_z \right] \cdot \int_0^{\infty} A_j(\lambda) \mathbf{g}_{0,\lambda,j}^{(29)t} d\lambda \right\} dt = 0.$$

При $v_j a_j = 2c_1$ на поверхности основания выполняется условие $\alpha_j = \rho$. Обращая интегралы Ханкеля, получаем

$$\sum_{j=1}^2 \left\{ B_j(t) K_1(t\beta_{j0}) - I_1(t\beta_{j0}) \int_0^{\infty} A_j(\lambda) \mathbf{g}_{0,\lambda,j}^{(29)t} d\lambda \right\} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^2 \frac{k_j}{v_j} \left\{ B_j(t) K_0(t\beta_{j0}) + I_0(t\beta_{j0}) \int_0^{\infty} A_j(\lambda) \mathbf{g}_{0,\lambda,j}^{(29)t} d\lambda \right\} = 0.$$

Из полученной системы выразим $B_j(t)$

$$B_j(t) = \frac{1}{\Delta_1(t)} \sum_{p=1}^2 (-1)^{p+j} \beta_p(t) \chi_{3-p,3-j} K_{p-1}(t\beta_{3-j,0}). \quad (6)$$

где $\Delta_1(t) = \frac{k_2}{v_2} K_0(t\beta_{20}) K_1(t\beta_{10}) - \frac{k_1}{v_1} K_0(t\beta_{10}) K_1(t\beta_{20})$

$$\beta_s(t) = (-1)^{s+1} \sum_{j=1}^2 \chi_{s,j} I_{2-s}(t\beta_{j0}) \int_0^{\infty} A_j(\lambda) \mathbf{g}_{0,\lambda,j}^{(29)t} d\lambda, \quad \chi_{s,j} = \begin{cases} 1, & s=1 \\ k_j/v_j, & s=2 \end{cases}.$$

Удовлетворим условиям на границе полупространства

$$u_z|_{z=-h, \rho < a} = -\delta, \quad \sigma_z|_{z=-h, \rho > a} = 0, \quad \tau_{\rho z}|_{z=-h} = 0. \quad (7)$$

На площадке $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_z$ с учетом (4) напряжения можно записать в виде

$$\mathbf{FU} = C_{44} \sum_{j=1}^2 \frac{1+k_j}{v_j} \int_0^{\infty} \lambda \left\{ A_j(\lambda) \left[-e^{-\lambda z_j} J_1(\lambda \rho) \mathbf{e}_\rho - v_j e^{-\lambda z_j} J_0(\lambda \rho) \mathbf{e}_z \right] + \right. \\ \left. + \left[-e^{\lambda z_j} J_1(\lambda \rho) \mathbf{e}_\rho + v_j e^{\lambda z_j} J_0(\lambda \rho) \mathbf{e}_z \right] \cdot \int_0^{\infty} B_j(t) g_{0,t,j}^{(92)\lambda} dt \right\} d\lambda. \quad (8)$$

Уравнение границы полупространства $z = -h$ в переменных z_j имеет вид

$$z_j = -\frac{h}{v_j} - \frac{v_j}{4c_1} + \frac{c_2}{v_j} \equiv -h_j \quad (j=1,2).$$

С учетом условий (7), из (4) и (8) получим

$$\sum_{j=1}^2 \frac{k_j}{v_j} \int_0^{\infty} \left\{ A_j(\lambda) e^{\lambda h_j} + \alpha_j(\lambda) e^{-\lambda h_j} \right\} J_0(\lambda \rho) d\lambda = \delta \quad (0 \leq \rho < a), \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^2 (1+k_j) \int_0^{\infty} \left\{ A_j(\lambda) e^{\lambda h_j} - \alpha_j(\lambda) e^{-\lambda h_j} \right\} J_0(\lambda \rho) \lambda d\lambda = 0 \quad (\rho > a), \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^2 \frac{1+k_j}{v_j} \left\{ A_j(\lambda) e^{\lambda h_j} + e^{-\lambda h_j} \int_0^{\infty} B_j(t) g_{0,t,j}^{(92)\lambda} dt \right\} = 0, \quad (11)$$

где $\alpha_j(\lambda) = \int_0^{\infty} B_j(t) g_{0,t,j}^{(92)\lambda} dt$.

Обозначим $\sum_{j=1}^2 (1+k_j) \left\{ A_j(\lambda) e^{\lambda h_j} + e^{-\lambda h_j} \alpha_j(\lambda) \right\} = D_j(\lambda)$ и $\tilde{A}_j(\lambda) = A_j(\lambda) e^{\lambda h_j}$. Тогда

из двух последних соотношений получаем

$$\begin{cases} (1+k_1) \tilde{A}_1(\lambda) + (1+k_2) \tilde{A}_2(\lambda) = D_j(\lambda) + \sum_{j=1}^2 (1+k_j) e^{-\lambda h_j} \alpha_j(\lambda), \\ \frac{1+k_1}{v_1} \tilde{A}_1(\lambda) + \frac{1+k_2}{v_2} \tilde{A}_2(\lambda) = -\sum_{j=1}^2 \frac{1+k_j}{v_j} e^{-\lambda h_j} \alpha_j(\lambda); \end{cases}$$

откуда

$$\tilde{A}_s(\lambda) = \frac{(-1)^s v_1 v_2 e^{-\lambda h_s}}{(1+k_s)(v_2 - v_1)} \left[\frac{D_1(\lambda)}{v_{3-s}} + \sum_{j=1}^2 (1+k_j) \left(\frac{1}{v_{3-s}} + \frac{1}{v_j} \right) e^{-\lambda h_j} \alpha_j(\lambda) \right] \quad (s=1,2).$$

Подставим $A_j(\lambda)$ в первое из парных уравнений (9)

$$\int_0^{\infty} \sum_{j=1}^2 \frac{k_j}{v_j} \frac{(-1)^j v_1 v_2}{(1+k_j)(v_2 - v_1) v_{3-j}} D_1(\lambda) J_0(\lambda \rho) d\lambda = \delta - \sum_{j=1}^2 \frac{k_j}{v_j} \int_0^{\infty} e^{-\lambda h_j} \alpha_j(\lambda) J_0(\lambda \rho) d\lambda - \\ - \sum_{j=1}^2 \frac{k_j}{v_j} \frac{(-1)^j v_1 v_2}{(1+k_j)(v_2 - v_1)} \sum_{r=1}^2 (1+k_r) \left(\frac{1}{v_{3-j}} + \frac{1}{v_r} \right) \int_0^{\infty} e^{-\lambda h_r} \alpha_r(\lambda) J_0(\lambda \rho) d\lambda.$$

С учетом $\sum_{j=1}^2 \frac{k_j}{v_j} \frac{(-1)^j v_1 v_2}{(1+k_j)(v_2 - v_1) v_{3-j}} = \frac{k_2 - k_1}{(1+k_1)(1+k_2)(v_2 - v_1)} = \vartheta$, получим

$$\int_0^{\infty} D_1(\lambda) J_0(\lambda \rho) d\lambda = \frac{1}{9} \left[\delta - \sum_{j=1}^2 \frac{k_j}{v_j} \int_0^{\infty} e^{-\lambda h_j} \alpha_1(\lambda) J_0(\lambda \rho) d\lambda - \sum_{j=1}^2 \frac{k_j}{v_j} \frac{(-1)^j v_1 v_2}{(1+k_j)(v_2-v_1)} \sum_{r=1}^2 (1+k_r) \left(\frac{1}{v_{3-j}} + \frac{1}{v_r} \right) \int_0^{\infty} e^{-\lambda h_r} \alpha_r(\lambda) J_0(\lambda \rho) d\lambda \right] \equiv E(\rho).$$

В результате парная система (9)–(10) имеет вид

$$\int_0^{\infty} D_1(\lambda) J_0(\lambda \rho) d\lambda = E(\rho), \quad (0 \leq \rho < a);$$

$$\int_0^{\infty} D_1(\lambda) \lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda = 0, \quad (\rho > a).$$

Будем искать ее решение [9] в следующем виде:

$$D_1(\lambda) = \int_0^a \varphi(t) \cos \lambda t dt,$$

где $\varphi(t)$ – новая неизвестная функция. Из второго уравнения следует, что

$$\int_0^{\infty} D_1(\lambda) J_0(\lambda \rho) \lambda d\lambda = \int_0^{\infty} \lambda J_0(\lambda \rho) \int_0^a \varphi(t) \cos \lambda t dt d\lambda = \int_0^{\infty} J_0(\lambda \rho) \left[\varphi(a) \sin \lambda a - \int_0^a \varphi'(t) \sin \lambda t dt \right] d\lambda = 0,$$

$$\int_0^{\infty} J_0(\lambda \rho) \sin \lambda t d\lambda = \begin{cases} 0, & \rho > t, \\ 1/\sqrt{t^2 - \rho^2}, & \rho < t; \end{cases}$$

т. е. второе уравнение автоматически удовлетворяется. Из первого уравнения, используя формулу

$$\int_0^{\infty} J_0(\lambda \rho) \cos \lambda t d\lambda = \begin{cases} 0, & \rho < t, \\ 1/\sqrt{\rho^2 - t^2}, & \rho > t; \end{cases}$$

получаем интегральное уравнение типа Абеля $\int_0^{\rho} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} dt = E(\rho)$, которое имеет точное

$$\text{решение } \varphi(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho E(\rho)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} d\rho.$$

Правую часть последней формулы можно вычислить при помощи формулы

$$J_0(\lambda \rho) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\rho} \frac{\cos \lambda t}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} dt.$$

Получаем

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi} \frac{(1+k_1)(1+k_2)(v_2-v_1)}{k_2-k_1} \left[\delta - \sum_{j=1}^2 \frac{k_j}{v_j} \int_0^{\infty} e^{-\lambda h_j} \alpha_j(\lambda) \cos \lambda t d\lambda - \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{k_j}{v_j} \frac{(-1)^j v_1 v_2}{(1+k_j)(v_2-v_1)} \sum_{r=1}^2 (1+k_r) \left(\frac{1}{v_{3-j}} + \frac{1}{v_r} \right) \int_0^{\infty} e^{-\lambda h_r} \alpha_r(\lambda) \cos \lambda t d\lambda \right\} \right]; \quad (12)$$

$$\alpha_j(\lambda) = \int_0^\infty B_j(t) g_{0,t,j}^{(92)\lambda} dt = \sum_{p=1}^2 (-1)^{p+j} \chi_{3-p,3-j} \int_0^\infty \frac{K_{p-1}(t\beta_{3-j,0})}{\Delta_1} \beta_p(t) \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{t^2}{2a_j\lambda}} dt ; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \beta_s(t) = & (-1)^{s+1} \sum_{j=1}^2 \chi_{s,j} I_{2-s}(t\beta_{j0}) \frac{(-1)^j v_1 v_2}{(1+k_j)(v_2-v_1)} \times \\ & \times \left[\frac{1}{v_{3-j}} \int_0^a \varphi(u) \int_0^\infty e^{-\lambda h_j} \frac{t}{\lambda a_j} e^{-\frac{t^2}{2a_j\lambda}} \cos \lambda u d\lambda du + \right. \\ & \left. + \sum_{r=1}^2 (1+k_r) \left(\frac{1}{v_{3-j}} + \frac{1}{v_r} \right) \int_0^\infty e^{-\lambda h_r} \alpha_r(\lambda) \frac{t}{\lambda a_j} e^{-\frac{t^2}{2a_j\lambda}} d\lambda \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Получена система (12)–(14) интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно функций $\varphi(t)$, $\alpha_j(\lambda)$, $\beta_s(\lambda)$.

Напряжения при $z \in (-h, c_2]$ можно вычислять по формуле

$$\sigma_z = C_{44} \sum_{j=1}^2 (k_j + 1) \int_0^\infty \lambda (\beta_j(\lambda) e^{\lambda z_j} - A_j(\lambda) e^{-\lambda z_j}) d\lambda ,$$

а при $z = h$, $\rho \in (0, a)$:

$$\sigma_z = C_{44} \left(\frac{\varphi(a)}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} - \int_\rho^a \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} dt \right) .$$

Расчеты проводились для случая, когда трансверсально изотропным материалом выбран песчаник. Анализ НДС проведен при различных соотношениях геометрических параметров, где L – расстояние между граничными поверхностями; a – радиус штампа, C – точка пересечения параболоида с осью OZ . При постоянном значении c_2 чем больше C , тем меньше кривизна параболоида (т. е. при $C = 0,5$ – он более сжатый, а при $C = 5$ – более растянут по ширине). На рис. 2–4 приведены графики напряжений для $\sigma = \sigma_z/\sigma_0$ между граничными поверхностями в плоскостях, параллельных границе полупространства. Между вершиной параболоида и граничной плоскостью рассмотрены 5 плоскостей, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга. На рисунках линия (1) соответствует напряжениям в плоскости, проходящей через вершину параболоида, а (5) – в плоскости, наиболее близкой к границе полупространства.

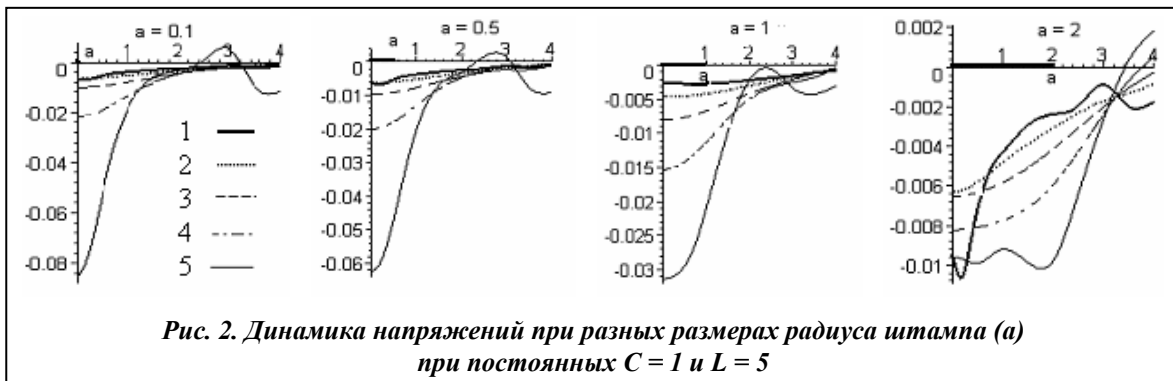
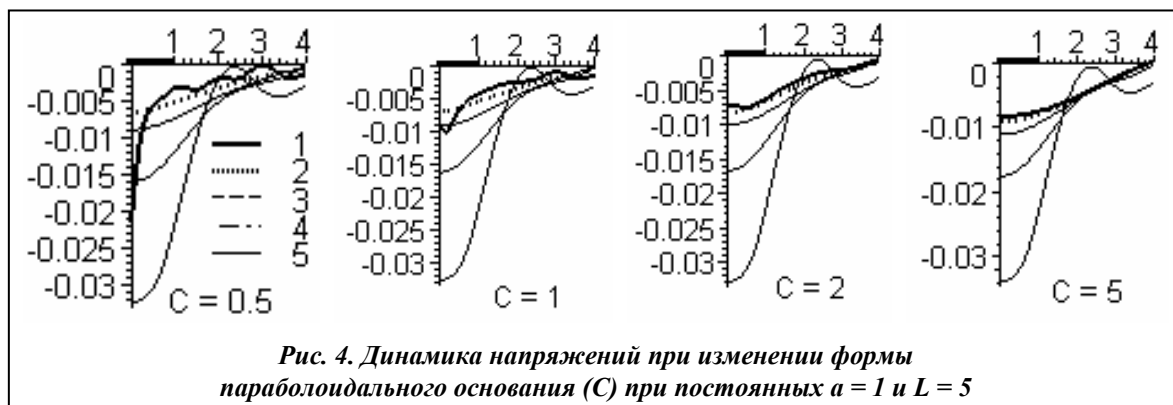
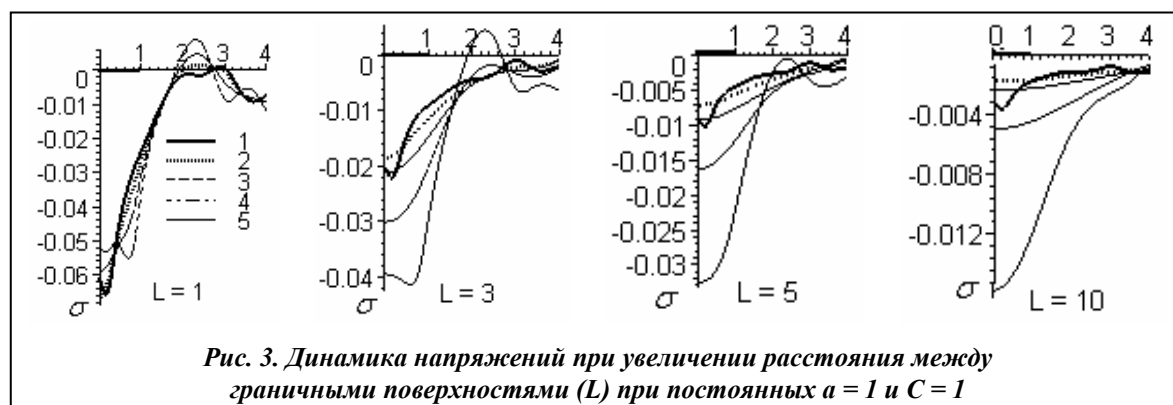


Рис. 2. Динамика напряжений при разных размерах радиуса штампа (a) при постоянных $C = 1$ и $L = 5$



Литература

1. Мехтиев М. Ф. Асимптотическое поведение решения осесимметричной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного полого конуса / М. Ф. Мехтиев, Н. А. Сардарова, Н. И. Фомина // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 2. – С. 61–70.
2. Ding H. J. Analytical thermoelastodynamic solutions for a nonhomogeneous transversely isotropic hollow sphere/ H. J. Ding, H. M. Wang, W. W. Chen // Appl. Mechanics. – 2002. – Rel. 72, № 8. – P. 545–553.
3. Подильчук Ю. Н. Точные аналитические решения электроупругости и термоэлектроупругости трансверсально изотропного тела в криволинейных системах координат / Ю. Н. Подильчук // Прикл. механика. – 2003. – Вып. 39, № 2. – С. 14–54.
4. Подильчук Ю. Н. Упругая деформация трансверсально-изотропного параболоида вращения / Ю. Н. Подильчук // Прикл. механика. – 1989. – Вып. 25, № 2. – С. 12–19.
5. Николаев А. Г. Круговая трещина в трансверсально изотропном сфероиде под действием нормальной нагрузки / А. Г. Николаев, Ю. А. Щербакова // Теорет. и прикл. механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 9–14.
6. Николаев О. Г. Аналіз напружено-деформівного стану трансверсально ізотропного сфероїда зі сфероїдальною порожниною / О. Г. Ніколаєв, Ю. А. Щербакова // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика, 2007. – Вип. 12. – С. 141–147.
7. Николаев А. Г. Действие сосредоточенной силы на трансверсально изотропное полупространство с параболоидальным включением / А. Г. Николаев, Ю. А. Щербакова., А. И. Юхно // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. Сб. науч. тр. Нац. аэрокосмич. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». Вып. 2 (45). Харьков: НАКУ, 2006. – С. 47–51.
8. Николаев А. Г. Теоремы сложения перемещений трансверсально изотропных канонических тел / А. Г. Николаев // Рук. деп. в ГНТБ Украины 10.07.96, №1568 – Ук 96. – 52 с.
9. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в теории упругости / Я. С. Уфлянд // М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1963. – 367 с.

Поступила в редакцию
22.04.09