

УДК 519.63:532.6

**С. В. Ершов**<sup>\*</sup>, д-р техн. наук**А. И. Деревянко**<sup>\*</sup>**М. Н. Гризун**<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup> Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины  
(г. Харьков, E-mail: yershov@ipmach.kharkov.ua)

<sup>\*\*</sup> Национальный технический университет «ХПИ»  
(г. Харьков, E-mail: may\_be00@mail.ru)

## МЕТОД НЬЮТОНА ДЛЯ НЕЯВНОЙ СХЕМЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

*Для нестационарной системы уравнений Эйлера построена неявная итерационная схема. Пространственные производные исходных уравнений аппроксимируются полностью неявно, а производные по времени приближаются односторонней трехточечной разностью. Нелинейная система алгебраических уравнений решается методом Ньютона. Рассмотрены вопросы аппроксимации и устойчивости неявной схемы и предложена ее модификация, уменьшающая численные осцилляции решения. Приведены результаты численного эксперимента.*

*Для нестационарної системи рівнянь Ейлера побудована неявна ітераційна схема. Просторові похідні вихідних рівнянь апроксимуються повністю неявно, а похідні за часом наближаються односторонньою триточковою різницею. Нелінійна система алгебраїчних рівнянь розв'язується методом Ньютона. Розглянуто питання апроксимації та стійкості неявної схеми та запропоновано її модифікацію, яка зменшує чисельні осциляції розв'язку. Наведено результати чисельного експерименту.*

### Введение

Развитие вычислительной аэродинамики привело к появлению большого количества разностных методов для уравнений Эйлера и Навье–Стокса. На начальных этапах предпочтение отдавалось явным методам, которые применялись для решения стационарных и нестационарных уравнений Эйлера. В последнее время повышенное внимание уделяется неявным методам. В первую очередь это вызвано недостаточной вычислительной эффективностью явных методов при решении уравнений движения вязкого газа с использованием мелких разностных сеток.

Среди наиболее популярных неявных разностных схем можно выделить методы переменных направлений [1], методы LU-разложения [2], итерационные методы типа Гаусса–Зейделя [3]. При построении данных методов для нелинейных уравнений газовой динамики применяются линеаризация матриц Якоби, приближенная факторизация (обычно для многомерных задач) и, в некоторых случаях, диагонализация неявного оператора, приближенные алгоритмы неявной реализации граничных условий. Данные упрощения являются источниками дополнительных погрешностей, которые существенно влияют не только на точность решения, но и на устойчивость схемы. Отдельным вопросом стоит возможность применения традиционных неявных разностных схем для нестационарных задач. В этом случае требование точности зависящего от времени решения может приводить к малым шагам интегрирования по времени, что в свою очередь будет сводить на нет преимущества неявной схемы в вычислительной эффективности.

Итерационные неявные схемы могут быть построены на основе концепции псевдо-времени [4]. В этом случае в исходные нестационарные уравнения добавляется дополнительный член, аналогичный временным производным от консервативных переменных, —

так называемая производная по псевдовремени. При этом на каждом шаге по физическому времени выполняются итерации по фиктивному времени. Для получения точного нестационарного решения так же, как и для итерационных неявных схем типа Гаусса–Зейделя, этот итерационный процесс должен сойтись, что может потребовать десятков или даже сотен итераций, и это неизбежно приводит к недостаточной вычислительной эффективности.

Последнее время при построении итерационных неявных схем для стационарных и нестационарных задач используется метод Ньютона [5–7]. Основными недостатками такого подхода является чрезмерная трудоемкость точного обращения матрицы, поэтому часто используются приемы приближенного представления неявного оператора [7–9].

Таким образом, несмотря на последние достижения в области разностных методов проблема разработки новых более точных разностных схем, характеризующихся повышенной устойчивостью и быстрой сходимостью, остается актуальной. В настоящей работе рассматриваются вопросы построения неявной итерационной разностной схемы с помощью метода Ньютона. В предлагаемой схеме исходные уравнения аппроксимируются полностью неявно без использования приближенных приемов линеаризации, факторизации и пр. В то же время данная схема может быть реализована как простая модификация известных алгоритмов метода переменных направлений, в которых применены все эти упрощения.

### Основные уравнения

Построение схемы будем осуществлять для системы уравнений газодинамики, записанной в форме Эйлера для невязкого нетеплопроводного газа. Обобщение результатов на системы уравнений типа Навье–Стокса достаточно формальное.

Система уравнений Эйлера записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\text{где } Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho E \end{pmatrix}; \quad F_i = J \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_1 u_i + p \delta_{1i} \\ \rho u_2 u_i + p \delta_{2i} \\ \rho u_3 u_i + p \delta_{3i} \\ (\rho E + p) u_i \end{pmatrix}; \quad E = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{u_k u_k}{2}; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}; \quad p - \text{давление}; \quad \rho -$$

плотность;  $u_i$  – декартовы компоненты скорости;  $E$  – полная энергия единицы массы;  $\gamma$  – показатель адиабаты;  $t$  – время;  $x_i$  – декартова система координат;  $i = 1, 2, 3$  – пространственные направления. В (1) и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

В уравнениях (1) потоки  $F_i$  для каждого пространственного направления являются функциями консервативных переменных  $Q$ :  $F_i = F_i(Q)$ . В таком случае для системы (1) могут быть получены матрицы Якоби (размерностью  $5 \times 5$ ) вида  $A_i = \frac{\partial F_i}{\partial Q}$ .

Так как система уравнений Эйлера является системой уравнений гиперболического типа по времени, то все собственные значения  $\lambda_{ij}$  матриц  $A_i$  вещественны (здесь индекс  $j = 1, 2, \dots, 5$  соответствует номеру собственного значения) и имеются левые  $l_{ij}$  и правые  $r_{ij}$  собственные векторы. Можно составить матрицу  $L_i$  размерностью  $5 \times 5$ , в качестве строк которой выбран набор линейно-независимых левых собственных векторов. Аналогично может быть составлена матрица  $R_i = L_i^{-1}$ , столбцы которой являются линейно-независимыми правыми собственными векторами. Матрица Якоби системы (1) может быть диагонализирована следующим преобразованием (нет суммирования по  $i$ ):

$$L_i A_i L_i^{-1} = \Lambda_i = \text{diag}(\lambda_{ij}).$$

**Построение итерационной разностной схемы методом Ньютона**

Для дискретизации временных производных будем использовать трехточечную BDF (backward difference formula – обратная разностная формула) аппроксимацию [4]. Пространственные производные в уравнении (1) аппроксимируем полностью неявно. Конкретный вид такой аппроксимации пока не имеет значения. Тогда разностная аппроксимация может быть записана следующим образом:

$$\frac{3Q_m^{n+1} - 4Q_m^n + Q_m^{n-1}}{2\Delta t} + \left[ \frac{\partial F_i(Q)}{\partial x_i} \right]_m^{n+1} = 0, \tag{2}$$

где  $\Delta t$  – шаг по времени;  $n$  – номер временного шага; индекс  $m$  обозначает пространственную привязку к некоторой ячейке (или узлу) разностной сетки.

Введем обозначение

$$R(Q_m^{n+1}) = \frac{3Q_m^{n+1} - 4Q_m^n + Q_m^{n-1}}{2\Delta t} + \left[ \frac{\partial F_i(Q)}{\partial x_i} \right]_m^{n+1} = 0.$$

Тогда к нелинейной системе (2) можно применить метод Ньютона

$$\frac{\partial R(Q_m^{n+1})}{\partial Q_m^{n+1}} (Q_m^{n+1,k+1} - Q_m^{n+1,k}) = -R(Q_m^{n+1,k}). \tag{3}$$

Производную  $\frac{\partial R(Q_m^{n+1})}{\partial Q_m^{n+1}}$  определяем приближенно, используя введенное ранее определение матриц Якоби. Тогда итерационная формула Ньютона (3) для системы (2) приобретает вид

$$(Q_m^{n+1,k+1} - Q_m^{n+1,k}) + \frac{2}{3} \Delta t \frac{\partial}{\partial x_i} [A_i(Q_m^{n+1,k+1} - Q_m^{n+1,k})] = -\frac{2}{3} \Delta t R(Q_m^{n+1,k}).$$

Примем следующие обозначения:

$$\delta Q_m^{n+1,k+1} = Q_m^{n+1,k+1} - Q_m^{n+1,k}; \quad \Delta Q_m^{n+1,k} = Q_m^{n+1,k} - Q_m^n; \quad \Delta Q_m^n = Q_m^n - Q_m^{n-1}; \quad Q_m^n = Q_m^{n,k} \Big|_{k \rightarrow \infty}.$$

и итерационную разностную схему запишем следующим образом:

$$\left[ I + \frac{2}{3} \Delta t \frac{\partial}{\partial x_i} A_i \right] \delta Q_m^{n+1,k+1} = -\frac{2}{3} \Delta t \left\{ \frac{3\Delta Q_m^{n+1,k} - \Delta Q_m^n}{2\Delta t} + \left[ \frac{\partial F_i(Q)}{\partial x_i} \right]_m^{n+1,k} \right\}. \tag{4}$$

В левой части (4) имеет смысл использовать расщепление по пространственным направлениям, а также расщепление матрицы Якоби на неотрицательно и неположительно определенные матрицы и их диагонализацию, что позволяет свести обращение многомерного неявного оператора к последовательности шагов, в каждом из которых по явным формулам выполняется решение системы алгебраических уравнений с двухдиагональной матрицей. Детали численной реализации левой части схемы (4) и другие способы ее вывода подробно изложены в работе [10].

В правой части (4) в фигурных скобках записана полностью неявная аппроксимация исходных уравнений (1). Таким образом, точность разностной схемы (4) при сходимости итерационного процесса будет определяться точностью аппроксимации правой части, а операции факторизации, диагонализации и линеаризации неявного оператора могут влиять только на скорость сходимости итераций. Кроме того, полезно заметить, что первый шаг итерационной схемы при задании начального приближения для итераций таким образом, чтобы  $\Delta Q_m^{n+1,0} = 0$ , совпадает с известной неявной схемой Бима–Уорминга [11] второго порядка аппроксимации по пространству и времени. Поэтому уже после первой итерации решение по схеме (4) будет формально второго порядка, и нет необходимости добиваться полной сходимости итерационного процесса, что особенно важно для нестационарных задач.

Также заметим, что в схему (4) может быть добавлена матрица преобуславливания в правой части множителем перед фигурными скобками. В простейшем случае в качестве такого множителя может выступать коэффициент  $S \leq 1$ .

**Аппроксимация пространственных производных**

Аппроксимация правой части (4) может быть выполнена любым из известных способов построения схем высокого разрешения. В настоящей работе для этих целей применяется схема [12], которую для простоты изложения опишем только для одномерного случая. Пространственные производные в правой части уравнения (4) аппроксимируем методом конечных объемов, который можно записать как

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_m^n = \frac{F_{m+1/2}^n - F_{m-1/2}^n}{\Delta x_m},$$

где  $\Delta x_m$  – шаг по пространству; дробные индексы  $m \pm 1/2$  означают середину стороны ячейки. Поток  $F_{m+1/2}^n$  в разностных схемах Годуновского типа определяется с помощью решения задачи распада произвольного разрыва для нелинейных уравнений (1):  $F_{m+1/2}^n = H(Q_{m+1/2}^-, Q_{m+1/2}^+)$ , где  $Q_{m+1/2}^-$  и  $Q_{m+1/2}^+$  – начальные условия задачи распада разрыва, способ вычисления которых определяет конкретную разностную схему. В схеме Годунова первого порядка аппроксимации эти величины берутся из ячеек, примыкающих к стороне  $m \pm 1/2$ :  $Q_{m+1/2}^- = Q_m^n$  и  $Q_{m+1/2}^+ = Q_{m+1}^n$ . Для построения схем высокого разрешения используется пространственная экстраполяция

$$Q_{m \mp 1/2}^\pm = Q_m^n \mp \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_m^n.$$

Производные для этой экстраполяции определяются по характеристическим переменным  $\psi$  с помощью алгоритмов минимизации первых и вторых разностей

$$\Delta_1 Q_m^n = Q_m^n - Q_{m-1}^n,$$

$$\Delta_1 \Psi_m^n = L \Delta_1 Q_m^n,$$

$$\Delta_2 \Psi_m^n = \Delta_1 \Psi_{m+1}^n - \Delta_1 \Psi_m^n,$$

$$\Delta x \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_m^n = \min\text{mod} \left[ \Delta_1 \Psi_m^n + \frac{1}{2} \min\text{mod}(\Delta_2 \Psi_{m-1}^n, \Delta_2 \Psi_m^n), \Delta_1 \Psi_{m+1}^n - \frac{1}{2} \min\text{mod}(\Delta_2 \Psi_m^n, \Delta_2 \Psi_{m+1}^n) \right], \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_m^n = L^{-1} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_m^n,$$

$$\min\text{mod}(a, b) = \text{sign}(a) \max\{0, \min[|a|, b \text{sign}(a)]\}.$$

Построенная таким образом схема относится к классу ENO-схем [13]. TVD-схема может быть получена путем исключения из (5) функций  $\min\text{mod}$  для вторых разностей.

**Исследование устойчивости**

Исследование устойчивости разностной схемы будем проводить для одномерных уравнений и разобьем на два этапа. На первом исследуем сходимость итерационной схемы (4) по  $k$ . Согласно теореме [14] последовательность  $\{Q_m^{n+1, k}\}_{k=0}^\infty$  сходится к простому корню  $Q_m^{n+1*}$  с квадратичной скоростью при правильном выборе начального приближения и выполнении некоторых условий, накладываемых на сеточную функцию  $Q$ . Таким образом, устойчивость метода будет определяться устойчивостью схемы (4) при  $k \rightarrow \infty$ , при сходимости итерационного процесса. Поэтому на втором этапе исследуем устойчивость схемы (2), примененной к линейному уравнению переноса  $\partial u / \partial t + a \partial u / \partial x = 0$ . Так как пространственные

производные в рассматриваемой схеме аппроксимируются существенно нелинейным образом, непосредственное применение метода Неймана недопустимо, а имеется возможность исследовать устойчивость отдельных шаблонов схемы. Выберем для исследования центрально-разностный шаблон для пространственных производных как один из наименее устойчивых и в то же время часто реализующийся. Линейная разностная схема с BDF формулой будет иметь вид

$$\frac{3u_m^{n+1} - 4u_m^n + u_m^{n-1}}{2\Delta t} + a \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0.$$

Рассматривая погрешность решения в виде одной гармоники разложения в ряд Фурье  $\varepsilon_m^n = \lambda^n e^{im\varphi}$  при  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , получим следующее выражение для коэффициента усиления  $\lambda$ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{1 - 2iv \sin \varphi}}{3 + 2iv \sin \varphi},$$

где  $v = a\Delta t/\Delta x$  – число Куранта–Фридрихса–Леви (CFL).

Можно показать, что при  $v \rightarrow \infty$  модуль  $\lambda$  не будет превосходить 1. Для произвольного числа CFL оценить аналитически ограниченность  $|\lambda_{1,2}|$  достаточно сложно. Поэтому такая оценка выполнялась численно. На рис. 1 приведена диаграмма устойчивости, представляющая поведение вещественной и мнимой частей  $\lambda$  для  $0 \leq v \leq 1000$  и  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Видно, что значения коэффициента усиления лежат в единичном круге.

### Уменьшение осцилляций решения

При построении явных разностных схем для уменьшения осцилляций решения можно использовать локальный выбор наиболее гладкого шаблона. Для неявных схем такой подход может оказаться недостаточным, если область влияния, определяемая соотношением шагов по пространству и времени, а также скоростями распространения возмущений, значительно превосходит размер шаблона разностной схемы. В силу свойств уравнений газодинамики производные по времени содержат информацию о пространственных производных на протяжении всего шага по времени, т. е., для больших временных шагов, учитывая область влияния, вне шаблона разностной схемы. Поэтому возможным способом минимизации осцилляций решения может быть выбор наиболее гладкого шаблона аппроксимации для производных по времени из нескольких возможных шаблонов требуемого порядка. В настоящей работе предлагается модифицировать расчетную схему таким образом, чтобы в областях, где решение имеет нефизические осцилляции, выполнялся переход от трехслойной схемы второго порядка аппроксимации к двухслойной схеме того же порядка. Для этого заменим уравнение (1) следующим эквивалентным:

$$(1 + \kappa) \frac{\partial Q}{\partial t} - \kappa \frac{\partial Q}{\partial t} + v \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + (1 - v) \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0, \tag{6}$$

где параметры  $\kappa$  и  $v$  предназначены для регулировки порядка разностной схемы. Выполнив для уравнения (6) те же операции, которые были проведены при выводе схемы (4), получим

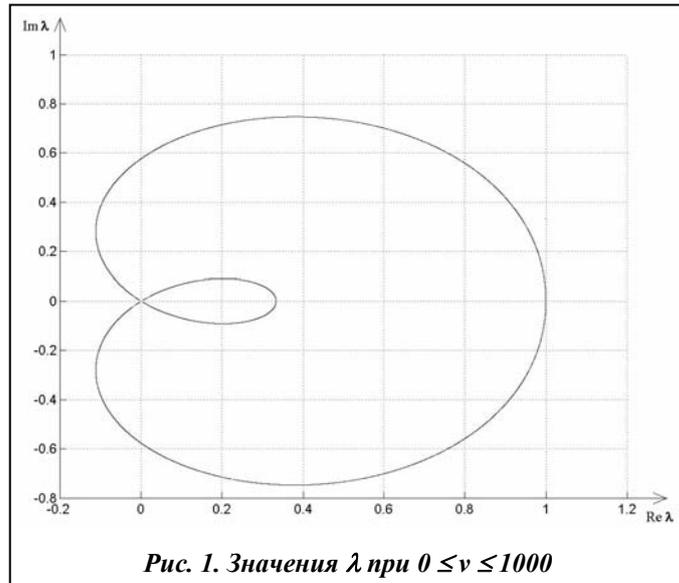


Рис. 1. Значения  $\lambda$  при  $0 \leq v \leq 1000$

$$\begin{aligned} & \left[ (1 + \kappa)I + \Delta t \frac{\partial}{\partial x_i} A_i \right] \delta Q_m^{n+1, k+1} = \\ & = -\Delta t \left\{ \frac{(1 + \kappa)\Delta Q_m^{n+1, k} - \kappa\Delta Q_m^n}{\Delta t} + \nu \left[ \frac{\partial F_i(Q)}{\partial x_i} \right]_m^{n+1, k} + (1 - \nu) \left[ \frac{\partial F_i(Q)}{\partial x_i} \right]_m^{n, k} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Исследование порядка аппроксимации данной схемы проводилось на примере уравнения переноса. Дифференциальное приближение в этом случае имеет вид

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_m^{n+1} + a \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_m^{n+1} = \left( \frac{1}{2} + \kappa - \nu \right) a \Delta t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)_m^{n+1} + O(\Delta x^2, \Delta t^2).$$

Видно, что второй порядок по времени будет достигаться только при  $\nu = \kappa + 1/2$ . Для  $\kappa = 1/2$  и  $\nu = 1$  первый член в фигурных скобках уравнения (7) будет представлять BDF аппроксимацию как в схеме (4), то есть в этом случае производные по времени исходных уравнений (1) приближаются трехточечной формулой, а итоговая схема является трехслойной. При  $\kappa = 0$  и  $\nu = 1/2$  первый член в фигурных скобках уравнения (7) приобретет вид  $\Delta Q^n / \Delta t$ , что соответствует двухточечной аппроксимации временной производной и двухслойной схеме.

Принципиальным вопросом является выбор дифференциального анализатора для переключения шаблонов временных производных разностной схемы. Авторам неизвестны работы, в которых использовался бы такой подход, а теоретически проанализировать данный вопрос оказалось весьма сложно. Поэтому в настоящей работе выполнено численное исследование нескольких переключателей

- 1)  $\delta Q^{n+1, k+1} = \min\text{mod} \left( \overline{\delta Q}^{n+1, k+1}, \overline{\overline{\delta Q}}^{n+1, k+1} \right),$
- 2)  $\delta Q^{n+1, k+1} = \begin{cases} \overline{\overline{\delta Q}}^{n+1, k+1}, & \text{если } \Delta Q^{n+1, k} (3\Delta Q^{n+1, k} - \Delta Q^n) > 0; |\Delta Q^{n+1, k}| \geq |3\Delta Q^{n+1, k} - \Delta Q^n|; \\ \overline{\delta Q}^{n+1, k+1}, & \text{иначе} \end{cases}$
- 3)  $\delta Q^{n+1, k+1} = \begin{cases} \overline{\overline{\delta Q}}^{n+1, k+1}, & \text{если } \Delta Q^n \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right)^{n+1, k} < 0; \\ \overline{\delta Q}^{n+1, k+1}, & \text{иначе} \end{cases}$
- 4)  $\left[ (1 + \kappa)I + \Delta t \left( \frac{\partial}{\partial x_i^-} A_i^+ + \frac{\partial}{\partial x_i^+} A_i^- \right)^{n+1, k} \right] \delta Q^{n+1, k+1} = \min\text{mod} \left( \overline{RHS}, \overline{\overline{RHS}} \right),$

где  $\overline{\delta Q}^{n+1, k+1}$  и  $\overline{\overline{\delta Q}}^{n+1, k+1}$  – приращения  $\delta Q^{n+1, k+1}$ , вычисленные по двухслойной схеме и трехслойной схемам соответственно;  $\overline{RHS}$  и  $\overline{\overline{RHS}}$  – правая часть уравнения (7), вычисленная для двухслойной и трехслойной схемы соответственно.

### Численный эксперимент

На первом этапе тестирования неявной итерационной схемы рассматриваются два классических теста одномерной газовой динамики: тест Сода [15] и тест Лакса [16], которые представляют собой задачу одномерного распада разрыва при начальных условиях, приведенных в табл. 1. Результаты расчетов сравнивались с точным решением в моменты времени  $t = 0,2$  для теста Сода и  $t = 0,16$  для теста Лакса. Для решения задачи использовались следующие разностные схемы:

- явная ENO схема (ENO) [12];
- диагонализированная неявная ENO схема [12] (I-ENO);

– неявная итерационная ENO схема настоящей работы (II-ENO).

В обеих неявных схемах использовалось расщепление неявного оператора по характеристическим направлениям, так как обращение трехдиагональной матрицы прогонкой показало менее точные результаты. Расчеты по II-ENO схеме выполнялись с 3–4 итерациями на каждом шаге по времени.

Таблица 1. Начальные условия для тестов Сода и Лакса

Область определения в $x \in [0;1]$	Параметры	Тест Сода	Тест Лакса
$x < 0,5$	Плотность, $\rho_L$	1,0	0,445
	Давление, $p_L$	1,0	3,528
	Скорость, $u_L$	0,0	0,698
$x > 0,5$	Плотность, $\rho_R$	0,125	0,5
	Давление, $p_R$	0,1	0,571
	Скорость, $u_R$	0,0	0,0

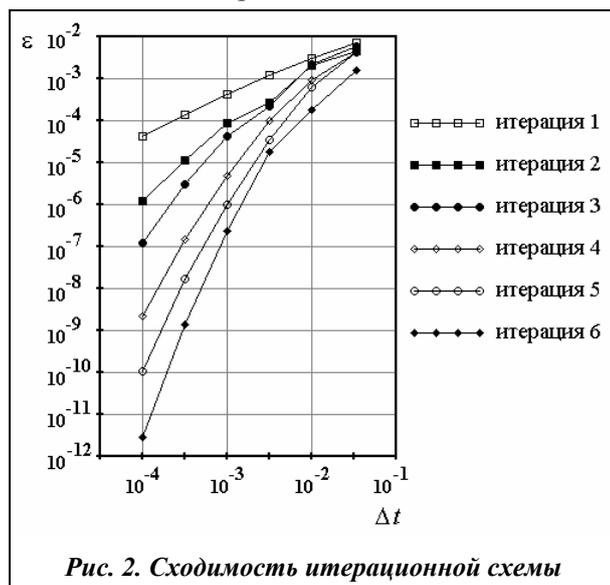
Анализ сходимости решения, полученного по итерационной схеме, проведен численно. На рис. 2 показана зависимость среднеквадратичной невязки  $\varepsilon = \left( \sum (\delta Q^{n,k})^2 / N \right)$  на различных итерациях  $k$  в зависимости от величины шага по времени  $\Delta t$ , где количество ячеек  $N$  рассматривалось равным 200. Данные приведены для начального момента распада разрыва в тесте Сода, когда наблюдаются максимальные невязки. Расчеты выполнены для  $S = 1$ .

Из графиков видно, что при малых шагах по времени сходимость второго порядка достигается уже после второй итерации. При больших шагах по времени погрешности решения значительно выше и скорость их убывания во время итерационного процесса существенно ниже. Тем не менее, можно заметить, что сходимость второго порядка по времени достигается после 5–6 итераций. Таким образом, если аппроксимация исходных уравнений будет выполнена со вторым порядком по времени, то рассматриваемый итерационный процесс может обеспечить сходимость решения со вторым порядком при достаточно малом количестве итераций.

Результаты расчетов при числах CFL  $\nu = \max(\lambda_j) \Delta t / \Delta x$ , меньших единицы, полученные по схемам ENO и II-ENO, оказались близкими, в то время как схема I-ENO давала менее точное немонотонное решение [10].

На рис. 3 приведены распределения плотности, полученные для числа Куранта  $\nu \approx 3,0$  по двум разностным схемам: II-ENO (кривая 1) и I-ENO (кривая 2). Точное решение показано штриховой линией, а схема ENO при таком большом числе CFL неустойчива, поэтому расчеты по ней не проводились. Так же, как и для расчетов при  $\nu < 1,0$ , решение, полученное по схеме II-ENO, более точное по сравнению с результатами, рассчитанными по схеме I-ENO. Кроме того, у схемы II-ENO оказались существенно выше предельные числа CFL, для которых сохраняется устойчивость. Данные по предельным числам CFL приведены в табл. 2.

Тест Лакса по сравнению с тестом

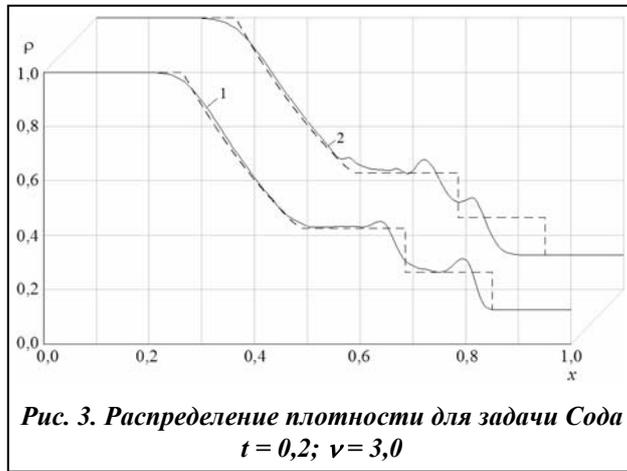


Сода характеризуется меньшей интенсивностью волны разрежения и большими перепадами параметров на контактном разрыве и ударной волне. На рис. 4 приведены результаты решения для числа CFL  $\nu \approx 2.5$ . Обозначения те же, что и для рис. 3. Видно, что схема II-ENO дает более точные результаты по сравнению со схемой I-ENO. Предельные значения чисел Куранта для рассматриваемой задачи приведены в табл. 2.

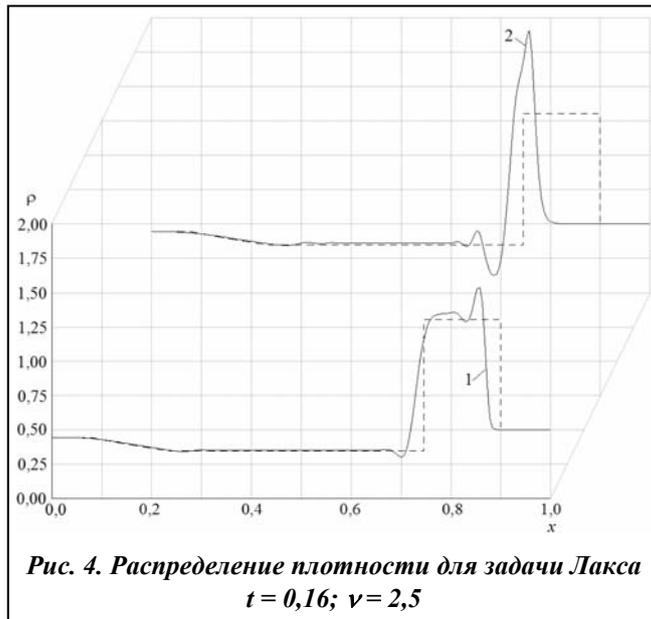
**Таблица 2. Пределы устойчивости схем**

Тестовая задача	I-ENO	II-ENO		
		$S = 1; \alpha = 0$	$S = 1; \alpha = 0,25$	$S = 0,3; \alpha = 0,25$
Тест Сода	4,2	8,0	14,6	87,7
Тест Лакса	1,7	3,5	16,8	50,4

Необходимо отметить, что при высоких числах CFL наблюдается существенное ухудшение точности решения, что во многом вызвано нефизическими осцилляциями параметров течения. Для снижения этих осцилляций использовалась модифицированная итерационная схема с переключателями 1–4, а в качестве тестовой задачи рассматривался тест Сода.



**Рис. 3. Распределение плотности для задачи Сода  $t = 0,2; \nu = 3,0$**



**Рис. 4. Распределение плотности для задачи Лакса  $t = 0,16; \nu = 2,5$**

На рис. 5 для момента времени  $t = 0,2$  приведен фрагмент графика распределения плотности, соответствующий области контактного разрыва и ударной волны, где наблюдаются максимальные нефизические осцилляции решения. Кривыми 1–4 отмечены решения с переключателями 1–4 соответственно, кривая 5 показывает решение, полученное с применением исходной итерационной схемы, ломаной 6 изображено точное решение задачи.

При использовании переключателя 1 значительно увеличилось время расчета, что вызвано необходимостью двукратного вычисления приращений  $\delta Q$  на каждой итерации. Остальные переключатели позволяют определить формулу для  $\delta Q$  на этапе вычисления правой части уравнения (7) и поэтому требуют меньше вычислительного времени. Из всех рассмотренных способов снижения осцилляций следует выделить переключатель 3, который существенно снизил осцилляции решения, не ухудшив точность определения скорости движущихся волн. К недостаткам предложенного подхода можно отнести некоторое увеличение времени счета по сравнению с исходной схемой.

При использовании переключателя 1 значительно увеличилось время расчета, что вызвано необходимостью двукратного вычисления приращений  $\delta Q$  на каждой итерации. Остальные переключатели позволяют определить формулу для  $\delta Q$  на этапе вычисления правой части уравнения (7) и поэтому требуют меньше вычислительного времени. Из всех рассмотренных способов снижения осцилляций следует выделить переключатель 3, который существенно снизил осцилляции решения, не ухудшив точность определения скорости движущихся волн. К недостаткам предложенного подхода можно отнести некоторое увеличение времени счета по сравнению с исходной схемой.

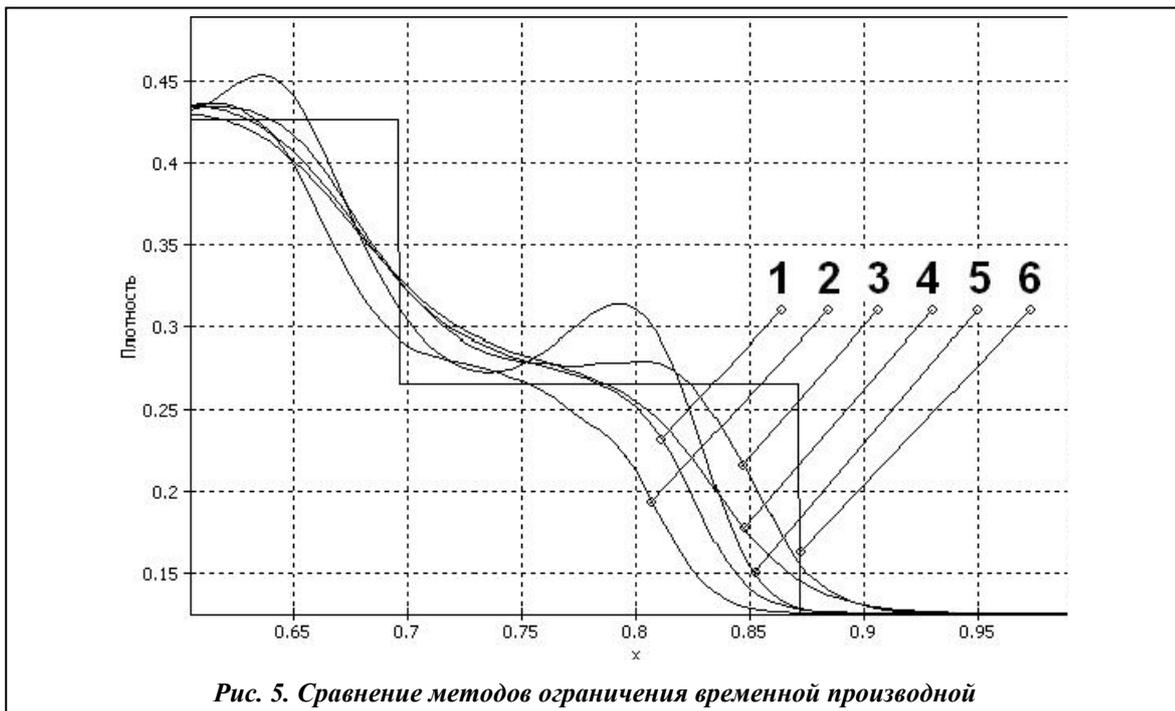


Рис. 5. Сравнение методов ограничения временной производной

Предварительные результаты тестов, проведенных на двумерных стационарных задачах газодинамики, показали, что схема II-ENO по сравнению со схемой I-ENO требует меньшего количества шагов по времени для установления решения, позволяет получить более точные результаты при меньшем процессорном времени расчета.

### Заключение

В настоящей работе построена неявная итерационная схема для нестационарной системы уравнений Эйлера. Неявная аппроксимация исходных уравнений выполняется без применения понижающих точность операций факторизации, линеаризации и диагонализации. Для решения системы нелинейных алгебраических разностных уравнений привлекается метод Ньютона.

Показано, что предлагаемая схема имеет второй порядок аппроксимации по пространству и времени и является устойчивой при высоких числах Куранта. Численное исследование показало превосходство по точности и предельным числам CFL данной схемы над известной неявной схемой, использующей линеаризацию и диагонализацию неявного оператора.

Для уменьшения нефизических осцилляций решения предлагается использовать переменный шаблон аппроксимации производной по времени при сохранении второго порядка схемы в целом. В результате численного эксперимента найден переключатель, обеспечивающий как снижение осцилляций решения, так и сохранение точности схемы в определении скорости движущихся волн.

В дальнейших исследованиях планируется выполнить детальное тестирование схемы на многомерных задачах, изучить возможности повышения точности по времени и оценить оптимальное количество итераций на шаге по времени в зависимости от степени сходимости.

### Литература

1. Ковеня В. М. Метод расщепления в задачах газовой динамики / В. М. Ковеня, Н. Н. Яненко. – Новосибирск: Наука, 1981. – 304 с.
2. Jameson A. Implicit schemes and LU decompositions / A. Jameson, E. Turkel // Math. Comp. – 1981. – Vol. 37, № 2. – P. 385–397.

3. *Jameson A.* Transonic flow calculations for aircraft / A. Jameson // Lecture Notes in Mathematics, Numerical Methods in Fluid Dynamics / F. Brezzi, ed. – Springer Verlag. – 1985. – P. 156–242.
4. *Yao J.* Development and validation of a massively parallel flow solver for turbomachinery flows / J. Yao, A. Jameson, J. J. Alonso, F. Liu // 38<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, January 10–13, 2000. – Reno, NV. – AIAA Paper. – 2000. – № 00-0882. – 23 p.
5. *Mavriplis D. J.* An Assessment of Linear Versus Non-linear Multigrid Methods for Unstructured Mesh Solvers / D. J. Mavriplis // NASA CR-2001-210870. ICASE Report. – 2001. – № 2001-12. – 22 p.
6. *Nejat A.* A High-Order Accurate Unstructured GMRES Algorithm for Inviscid Compressible Flows / A. Nejat, C. Ollivier-Gooch // AIAA Pap. – 2005. – № 2005-5341. – 12 p.
7. *Jameson A.* The Present Status, Challenges, and Future Developments in Computational Fluid Dynamics / A. Jameson // Proc. 7th AGARD Fluid Dynamics Panel Symposium, Seville, October 1995. – AGARD CP578. – 1996. – 38 p.
8. *Chakravarthy S. R.* Development of Upwind Schemes for the Euler Equations / S. R. Chakravarthy // NASA Contractor Report. – 1987. – № 4043. – 139 p.
9. *Daude F.* Low cost method for LES of complex flows via a new implicit time integration scheme / F. Daude, I. Mary, P. Comte // 7th ONERA-DLR Aerospace Symposium, Toulouse, France, 2006, October 4-6. – 2006. – № TP-2006-166. – 11 p.
10. *Ершов С. В.* Решение уравнений газовой динамики с помощью неявной итерационной схемы / С. В. Ершов // Вестн. Харьк. нац. ун-та. – 2006. – № 775. Сер. Мат. моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы, вып. 7. – С. 159–173.
11. *Beam R. M.* An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations / R. M. Beam, R. F. Warming / Proc. AIAA 3<sup>rd</sup> Comput. Fluid Dyn. Conf. – Albuquerque, 1977. – P. 645–649.
12. *Ершов С. В.* Квазилинейная схема повышенной точности для интегрирования уравнений Эйлера и Навье-Стокса / С. В. Ершов // Мат. моделирование. – 1994. – Т. 6, № 11. – С. 63–75.
13. *Harten A.* Uniformly high-order accurate non-oscillatory schemes / A. Harten, S. Osher // SIAM J. Num. Analysis. – 1987. – Vol. 24, № 2. – P. 279–309.
14. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 632 с.
15. *Sod G. A.* A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws / G. A. Sod // J. Comp. Phys. – 1978. – Vol. 27, № 1. – P. 1–31.
16. *Lax P.* Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation / P. Lax // Commun Pure Appl. Math. – 1954. – Vol. 7, № 1. – P. 159–201.

Поступила в редакцию  
06.11.09

УДК 517.95: 518.517

**К. В. Максименко-Шейко**, канд. физ.-мат. наук

**Т. И. Шейко**, д-р техн. наук

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины  
Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина  
(г. Харьков, E-mail: sheyko@ipmach.kharkov.ua)

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В РЕГУЛЯРНЫХ ВОЛНОВОДАХ ФРАКТАЛЬНОЙ ПРИРОДЫ МЕТОДОМ R-ФУНКЦИЙ

*При описании объектов фрактальной геометрии используются следующие конструктивные средства теории R-функций: R-операции системы  $\{R_0\}$ ; суперпозиции функции  $\omega(x, y)$  с периодическими функциями, позволяющие транслировать заданную функцию  $\omega(x, y)$  вдоль осей и вдоль окружности; свойство подобия фигур; рекурсивные процедуры. Рассмотрены задачи нахождения E- и H-волн в регулярном волноводе с поперечным сечением в виде предфракталов – снежинок Коха, построенных на правильном треугольнике и квадрате. Достоверность полученных решений исследовалась с использованием метода мажорирующих областей.*