На этапе идентификации выбирается тот или иной класс нелинейной зависимости мощности источников энергии от температуры с неопределёнными коэффициентами, и с помощью метода наименьших квадратов в интегральной форме определяются эти коэффициенты.

Предложенный в статье подход к идентификации параметров функции, характеризующей мощность источника энергии, по данным вычислительного эксперимента позволяет уточнять математические модели тепловых процессов в двухмерных системах с источниками энергии. К данным системам относятся платы электронных устройств, приборные панели космических аппаратов и др. Это позволяет значительно повысить степень адекватности моделирования тепловых процессов по отношению к реально протекающим в системах с источниками энергии.

Литература

1. *Рихтмайер Р.* Разностные схемы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Мортон. – М.: Мир, 1972. – 418 с.
2. *Ортега Дж.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. – М.: Мир, 1975. – 558 с.
3. *Рвачев В. Л.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах / В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко. – Киев: Наук. думка, 1976. – 288 с.
4. *Рвачев В. Л.* Алгебро-логические и проекционные методы в задачах теплообмена / В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко. – Киев: Наук. думка, 1978. – 140 с.
5. *Слесаренко А. П.* Развитие алгебро-логического метода и его приложения к многомерным нелинейным задачам теплопроводности для однородных и композитных сред: Автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук. – М., 1984. – 36 с.
6. *Мацевитый Ю. М.* Обратные задачи теплопроводности: В 2-х т. Т. 1. Методология / Ю. М. Мацевитый. – Киев: Наук. думка, 2002. – 408 с.
7. *Рвачев В. Л* Кручение стержней сложного профиля: Учеб. пособие / В. Л. Рвачев, И. В. Гончарюк. – Харьков: Харьк. политехн. ин-т, 1973. – 104 с.

Поступила в редакцию
11.11.10

УДК 519.6

О. М. Литвин[*], д-р фіз.-мат. наук
В. О. Пасічник[**], канд. техн. наук
О. В. Ткаченко[***]
О. О. Черняк[*]

[*] Українська інженерно-педагогічна академія, (E-mail: academop@kharkov.ua)
[**] Харківська державна академія дизайну і мистецтв
[***] ДП «Запорізьке машинобудівне конструкторське бюро “Прогрес” ім. академіка А. І. Івченка»

ОПТИМІЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ АЕРОДИНАМІЧНИХ ПОВЕРХОНЬ ДЛЯ АВІАДВИГУНІВ НА ОСНОВІ В-СПЛАЙНІВ

Досліджується метод оптимального вибору числа горизонтальних та вертикальних перерізів аеродинамічних поверхонь деталей авіадвигунів, які однозначно можуть бути описані в циліндричній системі координат. Метод використовує явні вирази для В-сплайнів 2-го та 3-го степенів з нерівномірним розміщенням вузлів, тобто їх подання явними аналітичними виразами на кожному з підінтервалів носія сплайна.

Исследуется метод оптимального выбора числа горизонтальных и вертикальных сечений аэродинамических поверхностей деталей авиадвигателей, которые однозначно могут быть описаны в цилиндрической системе координат. Метод использует явные вы-

ражения для B-сплайнів 2-й и 3-й степеней с неравномерным размещением узлов, то есть их представление явными аналитическими выражениями на каждом из подинтервалов носителя сплайна.

Вступ

В роботах [1–3] запропонований метод математичного моделювання поверхні тривимірного тіла, яка може бути однозначно описана в циліндричній системі координат. В цій математичній моделі на основі експериментальних даних у вигляді координат точок на поверхні тіла мінімізується загальне число горизонтальних та вертикальних перерізів, достатніх для відновлення поверхні у вигляді сплайна від двох змінних із заданою точністю. Запропонований в [1–3] метод дозволяє використовувати B-сплайни степеня m ($m = 1, 2, 3, \ldots$), але чисельна реалізація методу з використанням B-сплайнів більш високого степеня m ($m = 2, 3, \ldots$) вимагала явних формул для B-сплайнів з нерівномірно розподіленими вузлами сплайна. Це твердження ґрунтується на тому, що використання B-сплайнів, наприклад, 2-го степеня з рівномірним розподілом вузлів приводить до таких функцій двох змінних, які будуть міняти опуклі частини на вгнуті лише на лініях, що лежать на перерізі поверхні рівновіддаленими паралельними площинами $z = kh$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Але оригінальна поверхня може змінювати опуклість на вгнутість на лініях, які не обов'язково лежать на рівновіддалених площинах. Крім того, слід відзначити, що відомі явні формули [4] для B-сплайнів степеня m ($m = 2, 3, \ldots$) є неекономними, оскільки вимагають для обчислень в одній точці врахування всіх доданків (навіть тих, які в даній точці дорівнюють нулю). Тому актуальним для оптимізації математичної моделі поверхні тривимірного тіла є використання B-сплайнів з нерівномірним розподілом вузлів, заданих поінтервально. Такі результати можуть бути використані для опису аеродинамічних поверхонь деталей авіадвигунів, наприклад поверхні пера лопатки.

Нагадаємо [4, с. 18–19], що нормований B-сплайн $B_{i,k,t}(x)$ k-го порядку (степеня $k-1$), відповідний послідовності вузлів $y = (t_i)$, може бути визначений рекурентними формулами

$$B_{i,k,t}(x) = (\tau_{i+k} - \tau_i)[\tau_i, \ldots, \tau_{i+k}](t-x)_+^{k-1},$$

де $(t-x)_+^{k-1} = \max\{(t-x)^{k-1}, 0\} = \begin{cases} 0, t \le x, \\ (t-x)^{k-1}, t > x \end{cases}$ $[\tau_i, \ldots, \tau_{k+1}]^2$ – скінченні різниці, що визначаються таким чином:

$$[\tau_1]g = g[\tau_1], \qquad [\tau_1, \tau_2]g = \frac{g[\tau_1] - g[\tau_2]}{\tau_1 - \tau_2}, \qquad \tau_1 \ne \tau_2;$$

$$[\tau_i, \ldots, \tau_{i+k}]g = \frac{[\tau_i, \ldots, \tau_{r-1}, \tau_{r+1}, \ldots, \tau_{i+k}]g - [\tau_i, \ldots, \tau_{s-1}, \tau_{s+1}, \ldots, \tau_{i+k}]g}{\tau_r - \tau_s}, \qquad \tau_r \ne \tau_s;$$

$$\tau_i < \cdots < \tau_r < \cdots < \tau_s < \cdots < \tau_{i+k}.$$

Основна частина

В даній роботі на основі B-сплайнів другого та третього степенів, побудованих в роботах [5, 6], пропонується метод відновлення поверхні тривимірного тіла з оптимальним вибором системи горизонтальних та вертикальних перерізів поверхонь, тобто пропонується зображувати математичну модель поверхні у вигляді функції $R = R(z, \varphi)$, що має неперервні частинні похідні $\dfrac{\partial R}{\partial z}, \dfrac{\partial R}{\partial \varphi}$ (у випадку використання B-сплайнів 2-го степеня) та $\dfrac{\partial R}{\partial z}, \dfrac{\partial R}{\partial \varphi}$, $\dfrac{\partial^2 R}{\partial z^2}, \dfrac{\partial^2 R}{\partial \varphi^2}, \dfrac{\partial^2 R}{\partial z \partial \varphi}$ (у випадку використання B-сплайнів 3-го степеня). Це дає можливість більш адекватно описувати поверхню в тих точках, де вона має різкі зміни кривини (у випадку використання В-сплайнів 2-го степеня), або отримувати опис поверхні у вигляді функції з неперервною кривиною (у випадку використання В-сплайнів 3-го степеня).

Згідно з [5, 6], В-сплайни 2-го та 3-го степенів описуються такими формулами:

В-сплайн 2-го степеня $S_2(x, X) \in C^1(R)$ дефекту 1 на довільній сітці вузлів $-\infty < X_0 < X_1 < X_2 < X_3 < \infty$ має вигляд ($y = (y, y_2)$)

$$S_2(x,X) = SS_2(x,X,y)\left(\int\limits_{X_0}^{X_3} SS_2(x,X,y)dx\right)^{-1};$$

$$SS_2(x,X,y) = \begin{cases} 0, x \le X_0, x \ge X_3 \\ \dfrac{(x-X_0)^2}{2(x-X_0)} y_1, X_0 < x \le X_1) \\ \dfrac{(X_2-X_0)}{2} y_1 + \dfrac{(x-X_2)^2}{2(X_1-X_2)} y_1 + \dfrac{(x-X_1)^2}{2(X_2-X_1)} y_2, X_1 < x \le X_2 \\ \dfrac{(X_2-X_0)}{2} y_1 + \dfrac{(X_3-X_1)}{2} y_2 + \dfrac{(x-X_3)^2}{2(X_2-X_3)} y_2, X_2 < x \le X_3. \end{cases}$$

З умови $SS_2(X_3, X, y) = 0$ отримуємо $y_2 = -\dfrac{(X_2-X_0)}{(X_3-X_1)} y_1$.

Якщо $y_1 = \left(\int\limits_{X_0}^{X_3} SS_2(x,X,y^*)dx\right)^{-1}$, де $y^* = (1, (X_2 - X_0)/(X_3 - X_2))$, то отримана формула $S_2(x,X) = SS_2(x,X,y^*)\left(\int\limits_{X_0}^{X_3} SS_2(x,X,y^*)dx\right)^{-1}$ задовольняє умову $\int\limits_{X_0}^{X_3} S_2(x,X)dx = 1$.

Нормований сплайн 3-го степеня $S_3(x, X, y) \in C^2(R)$ визначається написаною нижче формулою за умов $S_3(X_4, X, y) = 0$, $\left.\dfrac{d}{dx} S_3(x,X,y)\right|_{x=X_4} = 0$, $S_3(x,X) = SS_3(x,X,y^*)\left(\int\limits_{X_0}^{X_3} SS_2(x,X,y^*)\,dx\right)^{-1}$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, $y^* = (y_1, y_2, 1)$, де для невідомих y_1, y_2, y_3 виконуються співвідношення

$$y_3 = 1,$$

$$y_1 = \frac{(X_4-X_1)(X_4-X_2)}{(X_3-X_0)(X_2-X_0)} y_3,$$

$$y_2 = \frac{(X_4-X_2)(X_0+X_1-X_3-X_4)}{(X_3-X_0)(X_3-X_1)} y_3.$$

$$SS_3(x,X,y)=\begin{cases}0,x\le X_0\\ \dfrac{y_1(x-X_0)^3}{6(X_1-X_0)},X_0<x\le X_1\\ \dfrac{y_1}{6}(X_1-X_0)^2+\dfrac{y_1}{2}(X_1-X_0)(x-X_1)+\\ +\dfrac{y_1}{2(X_1-X_2)}\left(\dfrac{(x-X_2)^3-(X_1-X_2)^3}{3}-(X_1-X_2)^2(x-X_1)\right)+\\ +\dfrac{(x-X_1)^3}{X_2-X_1}\dfrac{y_2}{6},\ X_1<x\le X_2\\ \dfrac{y_1}{2}(X_1-X_0)\left(\dfrac{X_1-X_0}{3}+(X_2-X_1)\right)+\dfrac{y_1}{2(X_1-X_2)}\left(-\dfrac{(X_1-X_2)^3}{3}+(X_1-X_2)^3\right)+\\ +\dfrac{y_2}{2}(X_2-X_1)(x-X_2)+\dfrac{y_2}{2(X_2-X_3)}\left(\dfrac{(x-X_3)^3-(X_2-X_3)^3}{3}-\right.\\ \left.-(X_2-X_3)^2(x-X_2)\right)+\dfrac{(x-X_2)^3}{X_3-X_2}\dfrac{y_3}{6},\ X_2<x\le X_3\\ \dfrac{y_1}{2}(X_1-X_0)\left(\dfrac{X_1-X_0}{3}+(X_2-X_1)\right)+\dfrac{y_1}{2(X_1-X_2)}\times\\ \times\left(-\dfrac{(X_1-X_2)^3}{3}+(X_1-X_2)^3\right)+\dfrac{y_2}{2}(X_2-X_1)(X_3-X_2)+\\ +\dfrac{y_2}{2(X_2-X_3)}\times\left(\dfrac{-(X_2-X_3)^3}{3}-(X_2-X_3)^2(X_3-X_2)\right)+\dfrac{(X_3-X_2)^3}{X_3-X_2}\dfrac{y_3}{6}+\\ +\dfrac{y_1}{2}(X_2-X_0)(x-X_3)+\dfrac{y_2}{2}(X_3-X_1)(x-X_3)+\dfrac{y_3}{2}(X_3-X_2)(x-X_3)+\\ +\dfrac{y_3}{2(X_3-X_4)}\left(\dfrac{(x-X_4)^3-(X_3-X_4)^3}{3}+(X_4-X_3)^2(x-X_3)\right),\ X_3<x<X_4,\\ 0,x\ge X_4.\end{cases}$$

Нижче сформулюємо метод мінімізації числа горизонтальних та вертикальних перерізів, який дозволяє описувати поверхню тривимірного тіла в циліндричній системі координат з необхідною точністю.

Математична модель поверхні – це її опис у вигляді

$$\begin{cases}x(z,\varphi)=R(z,\varphi)\cos\varphi\\ y(z,\varphi)=R(z,\varphi)\sin\varphi\\ z=z\\ 0\le\varphi<2\pi,\quad 0\le z\le H,\end{cases}$$

де $R(z, \varphi)$ – відстань від осі циліндричної системи координат до точки на поверхні тіла, що лежить на висоті z і відповідає куту φ. Описуючи поверхню, на практиці використовується скінченний набір точок на ній (точковий каркас). Як правило [1], ці точки розміщені на деякій системі горизонтальних $z = z_i$, $i = 1, 2, \ldots, M$ та вертикальних $\varphi = \varphi_j$ $j = 1, 2, \ldots, N$ площин, що перетинають поверхню.

ISSN 0131–2928. Пробл. машиностроения, 2010, Т. 13, № 6

В даній статті будемо розв'язувати таку задачу. За відомими експериментальними даними – координатами точок на поверхні Г тіла $(X_{p,q}, Y_{p,q}, Z_q) \in \Gamma$, $p = 1, 2, \ldots M$, $q = 1, 2, \ldots, N$ переходимо до даних у циліндричній системі координат $OZ\Phi R$ $0 = Z_1 < Z_2 < \ldots < Z_M = H$, $H > 0$; $0 = \Phi_1 < \Phi_2 < \ldots < \Phi_N = 2\pi$, $X_{p,q} = R_{p,q}\cos\Phi_p$, $Y_{p,q} = R_{p,q}\sin\Phi_p$, $R_{p,q} = \sqrt{X_{p,q}^2 + Y_{p,q}^2}$, $p = 1, 2, \ldots, M$, $q = 1, 2, \ldots, N$. Далі на основі цих даних будуємо інтерполяційний сплайн $f(\varphi, z, \Phi, Z, R)$ з властивостями $f(\Phi_p, Z_p, \Phi, Z, R) = R_{p,q}$ $p = 1, 2, \ldots M$, $q = 1, 2, \ldots N$ і $f(\varphi, z, \Phi, Z, R) \in C^m(D)$, $D = [0, H]\times[0, 2\pi]$, ($m = 1$ якщо використовуємо В-сплайни 2-го, та $m = 2$, якщо використовуємо В-сплайни 3-го степеня).

Задаємо деякі натуральні числа r $(2 \le r \le M - 1)$ та s $(2 \le s \le N - 1)$ і будуємо сплайн $\tilde{f}(\varphi, z, Z^*, \Phi^*, R^*)$, $Z^* = [Z_1^*, \ldots, Z_r^*]$, $\Phi^* = [\Phi_1^*, \ldots, \Phi_s^*]$ за змінними φ та z з $s\times r$ невідомими вузлами (Φ_i^*, Z_j^*), $\varphi = \Phi_i^*$, $i = 1, 2, \ldots s$; $0 = \Phi_1^* < \Phi_2^* < \cdots < \Phi_s^* = 2\pi$; $z = Z_j^*$, $j = 1, 2, \ldots, r$; $0 = Z_1^* < Z_2^* < \cdots < Z_r^* = H$ і невідомими значеннями $R_{i,j}^* = \tilde{f}(\Phi_i^*, Z_j^*; Z^*, \Phi^*, R^*)$; $i = 1, 2, \ldots, r$; $j = 1, 2, \ldots, s$; $R_{i,1}^* = R_{i,1}$; $R_{i,j}^* = R_{i,r}$, $R_{i,0}^* = R_{i,s}$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Задача полягає у побудові сплайна $\tilde{f}(\varphi, z, Z^*, \Phi^*, R^*) \in C^m(D)$, $m = 1$ або $m = 2$, з оптимальним розміщенням $r - 2$ вузлів $z = Z_k^*$, $k = 2, 3, \ldots, r - 1$ та $s - 2$ вузлів $\varphi = \Phi_l^*$, $l = 2, 3, \ldots, s - 1$. Невідомі вузли та вузлові значення $R_{i,j}^*$ знаходимо з умови найменшого відхилення побудованої моделі поверхні $\tilde{f}(\varphi, z, Z^*, \Phi^*, R^*)$ від інтерполяційного сплайна $f(\varphi, z, \Phi, Z, R)$, $(\varphi, z) \in = [0, 2\pi]\times[0, H]$, тобто з умови $\ell(Z^*, \Phi^*, R^*) \to \min\limits_{Z^*, \Phi^*, R^*}$,

$$\ell(Z^*, \Phi^*, R^*) = \left\| f(\bullet, \bullet, \Phi, Z, R) - \tilde{f}(\bullet, \bullet, \Phi^*, Z^*, R^*) \right\|_{C(D)} := \max_{(\varphi, z)\in D} \left| f(\varphi, z, \Phi, Z, R) - \tilde{f}(\varphi, z, \Phi^*, Z^*, R^*) \right|.$$

Викладемо суть алгоритму побудови математичної моделі по кроках.

Крок 1. Будуємо математичну модель поверхні за відомими даними $R_{i,j}$, $i = 1, 2, \ldots, M$, $j = 1, 2, \ldots, N$ ($R_{i,j}$ – відстань від осі циліндричної системи координат до поверхні на висоті $z = Z_j$ для значення кута $\varphi = \Phi_i$) у вигляді сплайна степеня m ($m = 2, 3$) по кожній змінній. У випадку біквадратичних сплайнів ($m = 2$) ця математична модель може бути записана у вигляді

$$f(\varphi, z, \Phi, Z, R) = \sum_{i=0}^{M+1}\sum_{j=0}^{N+1} S(\varphi, \Phi(i)) S_2(z, Z(j)) C_{i,j},$$

$$\Phi(i) = \left[\Phi_i, \Phi_{i+1}, \Phi_{i+2}, \Phi_{i+3}\right], \qquad Z(j) = [Z_j, Z_{J+1}, Z_{j+2}, Z_{j+3}].$$

Невідомі сталі $C_{i,j}$, $i = 0, 1, \ldots M + 1$, $j = 0, 1, \ldots N + 1$ знаходимо з умов

$$f(\Phi_i, Z_j, \Phi, Z, R) = R_{i,j}, \quad i = 1, 2, \ldots M, \quad j = 1, 2, \ldots, N;$$

$$f(\Phi_i, Z_j, \Phi, Z, R) = f(0, Z_j, \Phi, Z, R) = f(2\pi, Z_j, \Phi, Z, R) = f(\Phi_M, Z_j, \Phi, Z, R) = , \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Крок 2. Будуємо математичну модель, використовуючи $r - 2$ невідомих горизонтальних перерізів $z = Z_i^*$, $i = 2, 3, \ldots r - 1$, $Z_1^* = 0$, $Z_r^* = H$ і $s - 2$ вертикальних перерізів $\varphi = \Phi_j^*$, $j = 1, 2, \ldots, s$, $\Phi_0^* = 0$, $\Phi_s^* = 2\pi$ з невідомими відліками $R_{i,j}^*$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $j = 1, 2, \ldots, s$, у вигляді сплайна від двох змінних степеня $m = 2$ за кожною змінною. Його можна подати за допомогою описаних вище В-сплайнів з нерівномірно розміщеними вузлами у вигляді

$$f^*(\varphi, z, \Phi^*, Z^*, C^*) = \sum_{i=0}^{s-1}\sum_{j=0}^{r-1} S(\varphi, \Phi^*(i)) S_2(z, Z^*(j)) C_{i,j}^* .$$

Крок 3. Знаходимо невідомі Z_j^*, $j = 2, 3, \ldots, r-1$, Φ_i^*, $i = 2, 3, \ldots, s-1$ та $C_{i,j}^*$ із умови мінімуму такого виразу:

$$J(\Phi^*, Z^*, C^*) = \sum_{k=1}^{r-1} \int_0^{2\pi} \int_{Z_{k-1}^*}^{Z_k^*} \left[f(\varphi, z, \Phi, Z, R) - f^*(\varphi, z, \Phi^*, Z^*, C^*) \right]^2 d\varphi dz \to \min_{\Phi^*, Z^*, C^*} . \quad (1)$$

Для початкового наближення треба задавати значення $Z_j^{*(0)}$, $j = 2, 3, \ldots, r-1$, $\Phi_i^{*(0)}$, $i = 2, 3, \ldots, s-1$.

Для мінімізації виразу (1) зручно використовувати стандартну процедуру системи MATLAB під назвою $f\min s(J, Z^*, \Phi^*, C^*)$, $Z^* = (Z_0^*, \ldots, Z_r^*)$, $\Phi^* = (\Phi_0^*, \ldots, \Phi_s^*)$ за умов $Z_0 = 0$, $Z_r^* = H$, $\Phi_0^* = 0$, $\Phi_s^* = 2\pi$ або стандартні процедури системи Mathcad під назвою Minimize(J, Φ^*, Z^*, C^*) чи Minerr(J, Φ^*, Z^*, C^*), оскільки ці процедури ґрунтуються на прямих методах, що не вимагають обчислення градієнта або іншої інформації про похідні.

Загальна процедура розв'язання задачі $J(\Phi^*, Z^*, C^*) \to \min_{\Phi^*, Z^*, C^*}$ може бути виконана також у такій послідовності.

1. Задаємо значення $Z_j^{*(0)}$, $j = 2, 3, \ldots, r-1$ та $\Phi_i^{*(0)}$, $i = 2, 3, \ldots, s-1$ і знаходимо $C_{i,j}^*$, $i = 1, 2, \ldots, s$, $j = 1, 2, \ldots, r$ із системи лінійних рівнянь

$$\frac{\partial}{\partial C_{p,q}^*} J(\Phi^*, Z^*, C^*) = 0, \quad p = 2, 3, \ldots, s-1, \quad q = 2, 3, \ldots, r-1. \quad (2)$$

2. Систему (2) можна подати у формі

$$\sum_{i=2}^{s-1}\sum_{j=2}^{r-1} A_{p,q,i,j} C_{i,j}^* = B_{p,q}, \quad p = 2, 3, \ldots, s-1, \quad q = 2, 3, \ldots, r-1;$$

$$A_{p,q,i,j} = \int_0^{2\pi}\int_0^{H} s(\varphi, \Phi(i)) s(z, Z(j)) s(\varphi, \Phi(p)) s(z, Z^*(q)) d\varphi dz, \quad p = 2, 3, \ldots, s-1, \quad q = 2, 3, \ldots, r-1;$$

$$B_{p,q} = \int_0^{H}\int_0^{2\pi} f(z, \varphi, \Phi, Z) s(\varphi, \Phi(p)) s(z.Z^*(q)) dz\, d\varphi, \quad p = 2, 3, \ldots, s-1, \quad q = 2, 3, \ldots, r-1.$$

Зауваження 1. З метою зменшення кількості арифметичних операцій значення $C_{i,j}^*$ можна визначати також за таким алгоритмом: $f^*(\Phi_i^*, Z_j^*, \Phi^*, Z^*, C^*) = R_{i,j}^*$, $i = 2, 3, \ldots, s-1$, $j = 2, 3, \ldots, r-1$.

Крок 2. Далі підставляємо знайдені значення $C_{i,j}^*$ у вираз $J(\Phi^*, Z^*, C^*)$ і знаходимо Z_j^*, $j = 2, 3, \ldots, r-1$, Φ_i^*, $i = 2, 3, \ldots, s-1$ з умови $J(Z^*, \Phi^*, C^*) \to \min_{Z^*, \Phi^*}$.

Цей метод послідовного наближення по суті своїй є узагальненням методу Зейделя розв'язання систем нелінійних рівнянь на досліджуваний тут випадок, коли по змінних $C_{i,j}^*$ функція $J(\Phi^*, Z^*, C^*)$ є квадратичною функцією, а по змінних $Z_2^*, \ldots, Z_{r-1}^*, \Phi_2^*, \ldots, \Phi_{s-1}^*$ вона є нелінійною функцією, вигляд якої істотно залежить від вибору степеня сплайна, що являє собою функції $s(\varphi, \Phi(i))$, $s(z, Z(j))$.

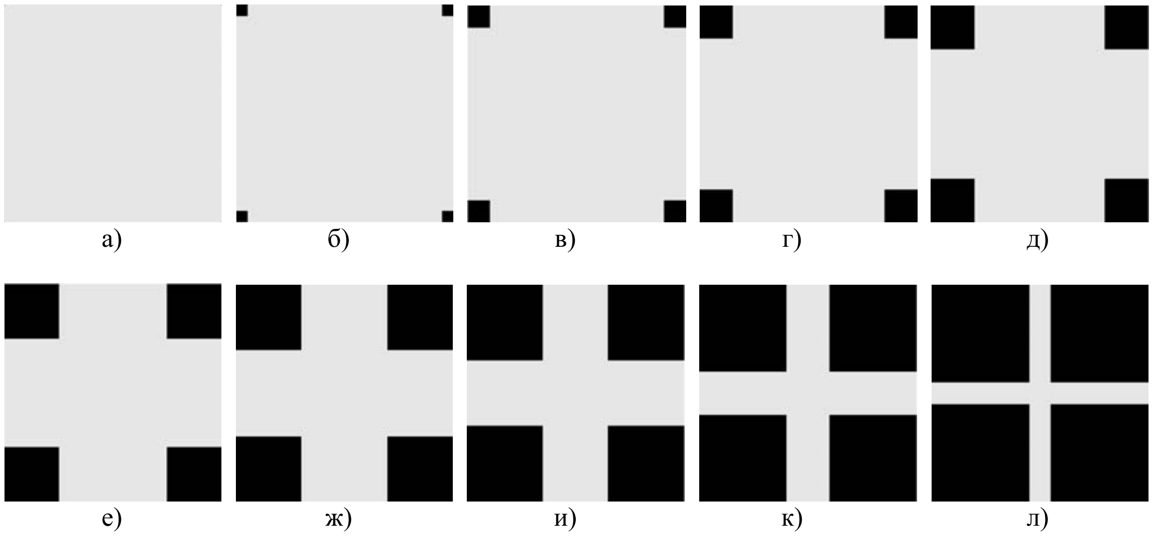

Рис. 1. Зображення функції f2(x, y, z$_k$):
а) – $f2(x, y, 0)$; б) – $f2(x, y, 0{,}1)$, в) – $f2(x, y, 0{,}2)$, г) – $f2(x, y, 0{,}3)$; д) – $f2(x, y, 0{,}4)$;
е) – $f2(x, y, 0{,}5)$; ж) – $f2(x, y, 0{,}6)$; и) – $f2(x, y, 0{,}7)$ к) – $f2(x, y, 0{,}8)$; л) – $f2(x, y, 0{,}9)$

Зауваження 2. При побудові сплайна $f^*(\varphi, z, Z^*, \Phi^*, R^*)$ з мінімальною кількістю горизонтальних і вертикальних ліній на поверхні до задачі мінімізації функціоналу $\int_0^{2\pi}\int_0^{H}\left[s(\varphi, z, \Phi, Z) - \bar{s}(\varphi, z, \Phi^*, Z^*)\right]^2 d\varphi\, dz$ треба долучати обмеження

$$\int_{\Phi_i^*}^{\Phi_{i+1}^*}\int_0^{H}\left[s(\varphi, z, \Phi, Z) - \bar{s}(\varphi, z, \Phi^*, Z^*)\right]^2 d\varphi\, dz = \alpha = \text{const}, \qquad i = 0,1,\ldots s-1,$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{Z_j^*}^{Z_{j+1}^*}\left[s(\varphi, z, \Phi, Z) - \bar{s}(\varphi, z, \Phi^*, Z^*)\right]^2 d\varphi\, dz = \beta = \text{const}, \qquad j = 1,2,\ldots r-1.$$

Зауваження 3. Мінімальна кількість вертикальних і горизонтальних ліній на поверхні (тобто числа s^*, r^*) знаходяться з умови, щоб $\ell(\Phi^*, Z^*, R^*) \le \varepsilon$, де ε – задане.

Приклад. Напишемо аналітичний вираз рівняння в неявній формі поверхні тіла, яке передає момент кручення (це тіло має форму викрутки), з використанням методу *R*-функцій таким чином:

$$f2(x, y, z) = 0,$$

де

$$f2(x, y, z) = Rd[w_1 pm(x, y, z), w_2 pm(x, y, z)],$$
$$w_1 pm(x, y, z) = Rk[w_1 p(x, z), w_1 m(x, z)], \quad w_2 pm(x, y, z) = Rk[w_2 p(y, z), w_2 m(y, z)],$$
$$w_1 p(x, z) = -(x + c \cdot z - d), \quad w_1 m(x, z) = -(-x + c \cdot z - d), \quad w_2 p(y, z) = -(y + c \cdot z - d),$$
$$w_2 m(y, z) = -(-y + c \cdot z - d), \quad Rd(u, v) = \frac{1}{2} \cdot (u + v + |u - v|), \quad Rk(u, v) = \frac{1}{2} \cdot (u + v - |u - v|).$$

На рис. 1 зображені перерізи цього тіла при $z = z_k$, $z_k = k/10$, $k = 0, 1, \ldots, 9$.

На рис. 2 подано пошарове зображення викрутки з використанням десяти зрізів.

Зауважимо, що побудова неявного рівняння заданого об'єкта здійснена за допомогою R-функцій В. Л. Рвачова [7]: R-кон'юнкція – $Rk(u, v)$ і R-диз'юнкція – $Rd(u, v)$. Для опису цього об'єкта запропонованим методом використано також меншу кількість перерізів (всього п'ять). При цьому похибка відновлення поверхні не перевищувала 15%.

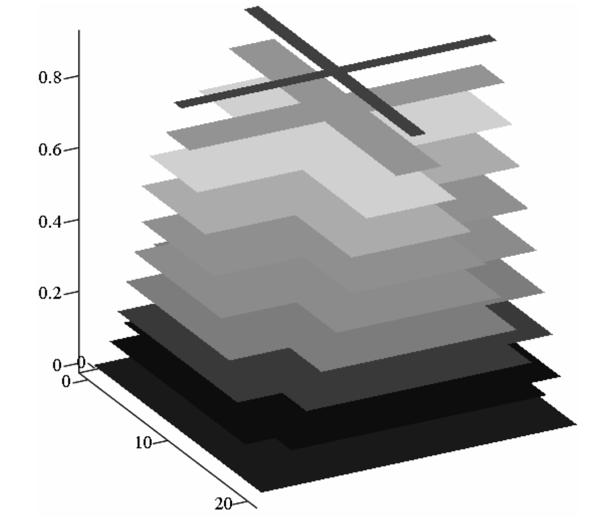

Рис. 2. Пошарове зображення досліджуваного тіла

Висновки

Таким чином, у даній роботі запропоновано метод оптимального вибору координат вузлів біквадратичного або бікубічного сплайнів та мінімальної кількості цих вузлів, що забезпечує задану точність відхилення від квадратичного або відповідно кубічного сплайнів, побудованих на основі повного набору експериментальних даних і максимального числа вузлів на горизонтальних та вертикальних лініях на поверхні. Метод можна використовувати лише для математичного моделювання поверхонь, які однозначно зображуються в циліндричній системі координат. Ці результати, зокрема, можуть бути використані для опису поверхні пера лопатки авіадвигунів.

Література

1. *Литвин О. М.* Оптимізація горизонтальних перерізів математичної моделі поверхні манекена з використанням інтерлінації функцій / О. М. Литвин, В. О. Пасічник // Доп. НАН України. – 2004. – № 2. – С. 66–71.
2. *Литвин О. М.* Оптимізація числа вертикальних перерезів поверхні манекена та їх розміщення при математичному моделюванні / О. М. Литвин, В. О. Пасічник // Доп. НАН України. – 2005. – № 6. – С. 63–68.
3. *Литвин О. Н.* Оптимизация математической модели поверхности трёхмерного тела / О. Н. Литвин, В. А. Пасечник // Кибернетика и систем. анализ. – 2006. – № 1. – С. 103–112.
4. *Де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам: Пер. с англ. / К. Де Бор. – М.: Радио и связь, 1985. – 304 с.
5. *Литвин О. М.* Математичне моделювання процесів інтерполяційними сплайнами на нерегулярній сітці вузлів / О. М. Литвин, О. В. Ткаченко // Доп. НАН України. – 2010. – № 1. – С. 34–39.
6. *Литвин О. М.* Математичне моделювання процесів інтерполяційними сплайнами на нерегулярній сітці вузлів / О. М. Литвин, Л. І. Гулік, О. В. Ткаченко // Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXV): Пр. міжнар. симпозіуму. – 2009. – Т. 2. – С. 8–13.
7. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. –Киев: Наук. думка, 1982. – 550 с.

Надійшла до редакції
09.09.10