

УДК 534.1:539.3

И. В. Янчевский, канд. техн. наукХарьковский национальный автомобильно-дорожный университет
(г. Харьков, E-mail: yanchevsky@khadi.kharkov.ua)**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ
АСИММЕТРИЧНОГО ДИСКОВОГО БИМОРФА
В РЕЖИМЕ ПРЯМОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА**

Рассмотрена задача о нестационарных колебаниях тонкого дискового преобразователя типа металл-пьезокерамика при импульсном механическом нагружении. С применением интегрального преобразования Лапласа по времени задача сведена к системе интегральных уравнений Вольтерра, при численном решении которой используется регуляризирующий алгоритм. Выполнена оценка достоверности полученных результатов путем сравнения численно-аналитических и конечноэлементных решений.

Розглянута задача про нестационарні коливання тонкого дискового перетворювача типу метал-п'єзокераміка при імпульсному механічному навантаженні. Із застосуванням інтегрального перетворення Лапласа за часом задача зведена до системи інтегральних рівнянь Вольтерра, для чисельного розв'язання якої використано регуляризуючий алгоритм. Виконана оцінка вірогідності отриманих результатів шляхом порівняння чисельно-аналітичних і скінченноелементних розв'язків.

Введение

Технические устройства с пьезоактивными элементами находят широкое применение во многих областях деятельности человека (медицина, машиностроение, акустика и пр.). Широкое распространение пьезоэлементы получили в качестве датчиков давления, когда энергия механической деформации преобразуется в пропорциональный электрический сигнал (имеет место режим прямого пьезоэффекта). Круглый в плане асимметричный биморф, состоящий из металлического (пьезопассивного) слоя с приклеенным к нему поляризованным по толщине пьезокерамическим слоем, – типичное конструктивное исполнение пьезодатчиков, что обусловлено, в первую очередь, простотой конструкции и технологии их изготовления. Поэтому исследования, которые посвящены математическому моделированию механического и электрического полей в дисковых биморфных преобразователях, имеют очевидную практическую направленность.

Среди имеющихся в литературе публикаций по указанной проблематике большая часть выполнена в предположении, что динамический процесс механического нагружения является периодическим во времени [1–3]. Работы, в которых изучены нестационарные процессы в конструктивных элементах биморфного типа, весьма немногочисленны. В некоторой степени это обусловлено сложностью вычислительных алгоритмов, возникающих при решении конкретных прикладных задач теории электроупругости [4]. Отметим работы [5–7], в которых исследованы неустановившиеся колебания пьезоактивных балки, полосы и оболочки при действии электрической или механической нагрузок. В настоящей работе исследуется поведение асимметричного круглого биморфа с одинаковыми радиусами слоев при ударном его нагружении.

1. Постановка задачи

Рассматривается шарнирно-опертая по контуру круглая пластина, состоящая из упругого и электроупругого тонких слоев радиусом R и постоянной толщиной h_m и h_p (индексами “m” и “p” обозначены геометрические и физические характеристики соответствующих

элементов двухслойного пакета). Материал пьезоэлемента принадлежит классу симметрии 6mm [8].

На внешнюю поверхность металлического слоя действует импульсная нагрузка $p(t)$, которая равномерно распределена на окружности радиуса r_0 ($r_0 \leq R$). В результате деформации пластины между сплошными электродированными покрытиями пьезоэлемента, находящегося в режиме приема, возникает разность потенциалов $V(t)$. При этом электрический потенциал на внутреннем электроде считается равным нулю. Предполагается, что физические параметры слоев, временная зависимость $p(t)$ и область нагружения r_0 известны, а характеристики механического поля и функция $V(t)$ подлежат определению. Электроды и клеяемое соединение имеют пренебрежимо малую толщину и не влияют на колебания биморфа. До момента времени $t=0$ пластина находится в состоянии покоя.

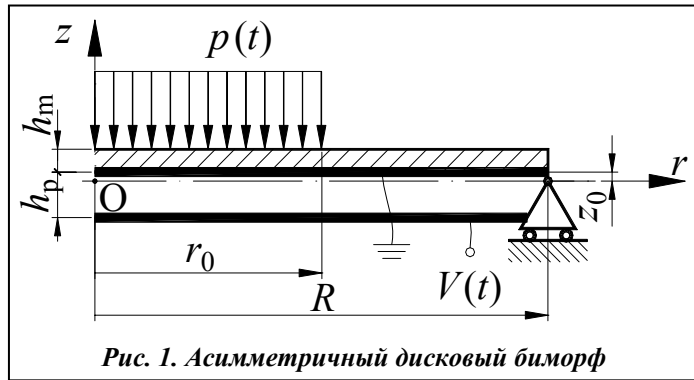


Рис. 1. Асимметричный дисковый биморф

2. Уравнения движения преобразователя

Для вывода дифференциальных уравнений колебаний биморфа и корректных граничных условий воспользуемся вариационным принципом теории электроупругости, согласно которому должно выполняться равенство

$$\delta L = \int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta H + \delta' A) dt = 0, \tag{1}$$

где δK , δH и $\delta' A$ – вариации кинетической энергии, электрической энтальпии и работы внешних сил [9].

При вычислении составляющих функционала (1) принимается упрощенная модель деформирования биморфа в рамках классических гипотез Кирхгофа–Лява, что позволяет свести задачу о деформации двухслойного диска как трехмерного тела к задаче о деформации поверхности приведения ($z = 0$), радиальное и нормальное перемещения точек которой обозначены через $u_0(r, t)$ и $w_0(r, t)$. Тогда в цилиндрической системе координат, ось Oz которой совпадает с осью диска, а начало отсчета удалено от границы контакта его слоев на расстояние z_0 (рис. 1), справедливы будут соотношения

$$w(r, z, t) \approx w_0; \quad u(r, z, t) = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial r}; \tag{2}$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_0}{\partial r} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}; \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u_0}{r} - \frac{z}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r}.$$

Кинематические соотношения (2) дополняются адекватным им предположением о линейном распределении нормальной составляющей вектора напряженности электрического поля E_z по толщине пьезоэлемента [2], которое для случая равенства нулю электрического потенциала на поверхности $z = z_0$ запишется в виде

$$E_z = \frac{V}{h_p} + \frac{12}{h_p^2} (z - a) \Phi(r, t), \tag{3}$$

где $a = z_0 - h_p/2$; Φ – неизвестная функция.

С учетом принятых гипотез о строении физических полей уравнения состояния слоев [9, 10] примут вид

$$\sigma_r^j = c_{11}^j \varepsilon_r + c_{12}^j \varepsilon_\varphi - e_{31} E_z;$$

$$\sigma_{\varphi}^j = c_{12}^j \varepsilon_r + c_{11}^j \varepsilon_{\varphi} - e_{31} E_z; \quad (4)$$

$$D_z = e_{31} \varepsilon_r + e_{31} \varepsilon_{\varphi} + \varepsilon_{33} E_z,$$

где $j = (m, p)$; σ_i – компоненты тензора механических напряжений; $c_{11}^j = 1/s_{11}^j (1 - \nu_j^2)$; $c_{12}^j = \nu_j \cdot c_{11}^j$; $\nu_j = -s_{12}^j/s_{11}^j$; $e_{31} = d_{31}/s_{11}^E (1 - \nu_j)$; $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}^T (1 - 2d_{31}e_{31}/\varepsilon_{33}^T)$; s_{11}^j – упругие податливости (для электроупругого слоя s_{11}^E); D_z – составляющая вектора электрической индукции поляризованной вдоль оси Oz пьезокерамики ($D_z \equiv 0$ и $E_z \equiv 0$ при $j = m$); d_{31} и ε_{33}^T – пьезоэлектрические постоянные и диэлектрическая проницаемость при нулевых напряжениях.

В теории тонких биморфных электроупругих пластин уравнения планарных и изгибных колебаний поверхности приведения взаимосвязаны. Однако если принять в рассмотрение допущение о равенстве коэффициентов Пуассона материалов слоев, а расстояние z_0 задать равным $(c_{11}^p h_p^2 - c_{11}^m h_m^2)/2c_F$, где $c_F = c_{11}^p h_p + c_{11}^m h_m$, то система уравнений осесимметричных колебаний биморфа уравнений разделяется, а сами уравнения аналогичны уравнениям для однородной изотропной пластины [2]

$$\nabla^2 u_0 - \frac{1}{r^2} u_0 - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0; \quad (5)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \beta_0^4 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P, \quad (6)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ – оператор Лапласа в цилиндрической системе координат; $\beta_0^4 = c_F R^2 / \bar{c}_J$ – нормирующий коэффициент; $P(r, t) = p(t) \cdot H(t) \cdot H(r_0 - r)$ – функция, описывающая механическую нагрузку; H – единичная функция Хевисайда; $\bar{c}_J = c_{11}^p J_p + c_{11}^m J_m + J_{p0} e_{31}^2 / \varepsilon_{33}$; $J_p = [z_0^3 - (z_0 - h_p)^3] / 3$; $J_m = [(z_0 + h_m)^3 - z_0^3] / 3$; $J_{p0} = h_p^3 / 3$.

Отметим, что дифференциальные уравнения (5)–(6) получены путем перехода к независимым вариациям δw_0 , δu_0 и δV в уравнении (1) с учетом принятых соотношений (2)–(4) и пренебрежения малыми инерционными членами. Из уравнения (1) также записываются граничные условия для шарнирно-опертого края и соотношение для искомой функции V (оно выражает равенство нулю тока смещения через срединную поверхность пьезослоя)

$$w|_{r=1} = 0; \quad N = \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} + \nu \frac{u_0}{r} - V \right) \cdot r \Big|_{r=1} = 0; \quad M = \frac{R}{\beta_0^4} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \bar{\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} + a \frac{\beta_0^4}{R} V \right) \Big|_{r=1} = 0; \quad (7)$$

$$V = -\frac{a_1 R}{a} \left(u_0 - \frac{a}{R} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \Big|_{r=1}, \quad (8)$$

где $\bar{\nu} = \nu + (1 - \nu) J_{p0} e_{31}^2 / \varepsilon_{33} c_J$; $a_1 = 2e_{31}^2 h_p a / (c_F \varepsilon_{33} R)$.

Уравнение колебаний (5), соотношение (8) и граничные условия (7) представляют собой замкнутую систему осесимметричных колебаний преобразователя. Отметим, что выражения (5)–(8) записаны для безразмерных переменных, при этом перемещения (u_0 , w_0) и геометрические параметры (h_j , r , R , r_0) отнесены к R ; время t – к $\sqrt{\rho_F R^2 / c_F}$, где $\rho_F = \rho_p h_p + \rho_m h_m$; нагрузка P , N – к \bar{c}_J / R^3 ; момент M – к \bar{c}_J / R ; разность потенциалов V – к c_F / e_{31} .

3. Построение решения

Применяя интегральное преобразование Лапласа по времени, трансформируем исходные уравнения (5)–(6) в область изображений

$$\nabla^2 u_0^L - \frac{1}{r^2} u_0^L - s^2 u_0^L = 0; \quad (9)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 w_0^L + \beta_0^4 s^2 w_0^L = P^L, \quad (10)$$

где L – индекс, обозначающий соответствующие трансформанты; s – комплексный параметр преобразования.

Решения этих уравнений с учетом граничных условий и конечности прогиба в центре биморфа ($r = 0$) запишем в удобном для последующего построения оригиналов виде

$$u_0^L(r, s) = B^L(s) \cdot e^{-s(1-r)} \cdot s \cdot U_1^L(r, s); \quad (11)$$

$$w_0^L(r, s) = A_1^L(s) \cdot e^{-\beta_0 i \sqrt{is} r} \cdot F_1^L(r, s) + A_2^L(s) e^{-\beta_0 \sqrt{is}(1-r)} \cdot F_2^L(r, s) + \tilde{w}_0^L(r, s), \quad (12)$$

где $U_1^L(r, s) = e^{-sr} \cdot I_1(sr)$; $F_1^L(r, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} e^{\beta_0 i \sqrt{is} r} J_0(\beta_0 \sqrt{is} r)$; $F_2^L(r, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\beta_0 \sqrt{is} r} I_0(\beta_0 \sqrt{is} r)$;

$A_1^L(s)$, $B^L(s)$ – неизвестные функции параметра s ; J_0 , I_0 , I_1 – функция и модифицированные функции Бесселя первого рода; \tilde{w}_0^L – частное решение (10), которое будем искать по виду правой части $P^L(r, s) = p^L(s) \cdot H(r_0 - r)$, разложенной в ряд Фурье-Бесселя

$$\tilde{w}_0^L(r, s) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{0k}^L(s) J_0(\lambda_k r),$$

λ_k – корни уравнения $J_0(\lambda_k) = 0$.

С использованием свойства ортогональности функций Бесселя выражение для \tilde{w}_0^L окончательно запишется как

$$\tilde{w}_0^L(r, s) = p^L(s) \Psi_1^L(r, s), \quad (13)$$

где $\Psi_1^L(r, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k J_0(\lambda_k r) \frac{1}{s^2 + \mu_k^2}$; $\zeta_k = \frac{1}{\beta_0^4} \frac{2r_0 J_1(\lambda_k r_0)}{\lambda_k J_1^2(\lambda_k)}$; $\mu_k = \frac{\lambda_k^2}{\beta_0^2}$.

Неизвестные функции $A_1^L(s)$, $A_2^L(s)$ и $B^L(s)$ определяются на основании системы алгебраических уравнений, которая формируется подстановкой формул (11)–(13) в соотношения (7) и исключения трансформанты $V^L(s)$ (8)

$$\begin{aligned} & A_1^L(s) e^{-\beta_0 i \sqrt{is}} F_1^L(1, s) + A_2^L(s) F_2^L(1, s) + p^L(s) \Psi_1^L(1, s) = 0; \\ & -A_1^L(s) e^{-\beta_0 i \sqrt{is}} G_1^L(1, s) + A_2^L(s) G_2^L(1, s) + p^L(s) \Psi_2^L(1, s) + B^L(s) \left[\frac{a_2 - a_3}{a_1} U_1^L(1, s) + \frac{a_3}{a_1} U_2^L(1, s) \right] = 0; \quad (14) \\ & -A_1^L(s) e^{-\beta_0 i \sqrt{is}} \left[G_1^L(1, s) + \frac{b_2}{b_1} \beta_0 i F_1^L(1, s) - \frac{b_2}{b_1} G_1^L(1, s) \right] + B^L(s) \frac{b_3}{b_1} U_1^L(1, s) + \\ & + A_2^L(s) \left[G_2^L(1, s) + \frac{b_2}{b_1} \beta_0 i F_2^L(1, s) - \frac{b_2}{b_1} G_2^L(1, s) \right] + p^L(s) \left[\Psi_2^L(1, s) + \frac{b_2}{b_1} \Psi_3^L(1, s) \right] = 0. \end{aligned}$$

При записи равенств (14) приняты обозначения $a_2 = \nu a_3 + b_3$; $a_3 = -1/\beta_0$; $b_1 = a_1 + \bar{\nu} b_2$;

$b_2 = R/a\beta_0^4$; $b_3 = a_1 a_3 R/a$; $U_2^L(r, s) = s \cdot e^{-sr} \cdot I_0(sr)$; $G_1^L(r, s) = \frac{\sqrt{i}}{s} e^{\beta_0 i \sqrt{is} r} J_1(\beta_0 \sqrt{is} r)$;

$$G_2^L(r,s) = \frac{\sqrt{i}}{s} e^{-\beta_0 \sqrt{is}r} I_1(\beta_0 \sqrt{is}r); \quad \Psi_2^L(r,s) = a_3 \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k [\lambda_k J_1(\lambda_k r)] \frac{1}{s s^2 + \mu_k^2};$$

$$\Psi_3^L(r,s) = a_3 \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \left[\lambda_k^2 J_0(\lambda_k r) - \lambda_k \frac{1}{r} J_1(\lambda_k r) \right] \frac{1}{s s^2 + \mu_k^2}.$$

Для решения системы (14) необходимо принять в рассмотрение справедливость представления изображений F_i^L , G_i^L ($i = 1, 2$) в виде сумм действительных функций

$$F_1^L(r,s) = F_{\text{Re}}^L(r,s) + i \cdot F_{\text{Im}}^L(r,s); \quad F_2^L(r,s) = F_{\text{Re}}^L(r,s) - i \cdot F_{\text{Im}}^L(r,s); \quad (15)$$

$$G_1^L(r,s) = -G_{\text{Re}}^L(r,s) + i \cdot G_{\text{Im}}^L(r,s); \quad G_2^L(r,s) = G_{\text{Re}}^L(r,s) + i \cdot G_{\text{Im}}^L(r,s).$$

Такое разложение получено в результате обращения функций F_i^L , G_i^L ($i = 1, 2$) с использованием преобразования Эфроса [11], которое также позволило выделить действительную и мнимую части, записав их в виде интегралов

$$F_{\text{Re}}(r,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^1 \cos\left(\frac{\tau^2 r^2}{t}\right) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau} \sqrt{1-\tau}}; \quad F_{\text{Im}}(r,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^1 \sin\left(\frac{\tau^2 r^2}{t}\right) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau} \sqrt{1-\tau}}; \quad (16)$$

$$G_{\text{Re}}(r,t) = \frac{4r}{\sqrt{\pi^3}} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^1 \sin\left(\frac{\tau^2 r^2}{t}\right) \sqrt{\tau} \sqrt{1-\tau} d\tau; \quad G_{\text{Im}}(r,t) = \frac{4r}{\sqrt{\pi^3}} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^1 \cos\left(\frac{\tau^2 r^2}{t}\right) \sqrt{\tau} \sqrt{1-\tau} d\tau.$$

После подстановки в (14) соотношений (15) и введения новых переменных

$$A_3^L(s) = A_1^L(s) e^{-\beta_0 i \sqrt{is}} + A_2^L(s)$$

и

$$A_4^L(s) = i \cdot (A_1^L(s) e^{-\beta_0 i \sqrt{is}} - A_2^L(s)).$$

исходная система будет избавлена от комплексных составляющих. Для ее решения выполняется переход в пространство оригиналов, в результате которого получена система интегральных уравнений Вольтерра относительно неизвестных функций $A_3(t)$, $A_4(t)$ и $B(t)$

$$\int_0^t A_3(\tau) F_{\text{Re}}(1,t-\tau) d\tau + \int_0^t A_4(\tau) F_{\text{Im}}(1,t-\tau) d\tau + \int_0^t p(\tau) \Psi_1(1,t-\tau) d\tau = 0;$$

$$\int_0^t A_3(\tau) G_{\text{Re}}(1,t-\tau) d\tau - \int_0^t A_4(\tau) G_{\text{Im}}(1,t-\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^t B(\tau) \left[\frac{a_2 - a_3}{a_1} U_1(1,t-\tau) + \frac{a_3}{a_1} U_2(1,t-\tau) \right] d\tau + \int_0^t p(\tau) \Psi_2(1,t-\tau) d\tau = 0; \quad (18)$$

$$\int_0^t A_3(\tau) \left[\left(1 - \frac{b_2}{b_1} \right) G_{\text{Re}}(1,t-\tau) + \beta_0 \frac{b_2}{b_1} F_{\text{Re}}(1,t-\tau) \right] d\tau - \int_0^t A_4(\tau) \left[\left(1 - \frac{b_2}{b_1} \right) G_{\text{Im}}(1,t-\tau) + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \beta_0 \frac{b_2}{b_1} F_{\text{Im}}(1,t-\tau) \right] d\tau + \int_0^t B(\tau) \frac{b_3}{b_1} U_1(1,t-\tau) d\tau + \int_0^t p(\tau) \left[\Psi_2(1,t-\tau) + \frac{b_2}{b_1} \Psi_3(1,t-\tau) \right] d\tau = 0.$$

Построение ядер U_l и Ψ_l ($l = 1, 2, 3$) не вызывает затруднений [11]. При расчете оригиналов (16) тригонометрические функции представлялись в виде ряда Тейлора, что позволило вычислить указанные интегралы в явном виде [12]

$$F_{\text{Re}}(r,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (8k-1)!!}{2^{4k} (2k)!(4k)!} \frac{r^{4k}}{t^{2k+0.5}}; \quad F_{\text{Im}}(r,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (8k+3)!!}{2^{4k+2} (2k+1)!(4k+2)!} \frac{r^{4k+2}}{t^{2k+1.5}};$$

$$G_{\text{Re}}(r,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (8k+5)!!}{2^{4k+2} (2k+1)!(4k+4)!} \frac{r^{4k+3}}{t^{2k+1.5}}; \quad G_{\text{Im}}(r,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (8k+1)!!}{2^{4k} (2k)!(4k+2)!} \frac{r^{4k+1}}{t^{2k+0.5}}.$$

Система интегральных уравнений (18) решалась численно, причем методика построения ее устойчивого к вычислительным погрешностям решения подробно описана в монографиях [13, 14]. Точность выполненных расчетов контролировалась варьированием значений шага разбиения исследуемого временного интервала Δt и коэффициента относительной невязки κ [13].

Располагая числовыми значениями функций $A_3(t)$, $A_4(t)$ и $B(t)$, можно определить все представляющие интерес физические характеристики переходного процесса. Так, для определения поперечного перемещения w_0 точек поверхности приведения ($z = 0$) и разности потенциалов V между электродами пьезоэлемента необходимо воспользоваться выражениями

$$w(r,t) = \int_0^t A_3(\tau) F_{\text{Re}}(r,t-\tau) d\tau + \int_0^t A_4(\tau) F_{\text{Im}}(r,t-\tau) d\tau + \int_0^t p(\tau) \Psi_1(r,t-\tau) d\tau;$$

$$\int_0^t V(\tau) d\tau = -\frac{a_1 c_F}{a_3 e_{31} R} \left[\int_0^t A_3(\tau) G_{\text{Re}}(1,t-\tau) d\tau - \int_0^t A_4(\tau) G_{\text{Im}}(1,t-\tau) d\tau + \int_0^t p(\tau) \Psi_2(1,t-\tau) d\tau \right] + \frac{a_1 c_F}{a e_{31}} \int_0^t B(\tau) \cdot U_1(1,t-\tau) d\tau. \tag{19}$$

4. Числовые результаты

В качестве примера рассмотрим случаи нагружения биморфа синусоидальным сигналом $P(r,t) = H(r_0 - r) \cdot H(t) \cdot \sin(\omega t)$ с различными значениями ω и нагрузкой прямоугольного профиля $P(r,t) = H(r_0 - r) \cdot [H(t) - H(t - T)]$, где T – длительность импульса (рис. 2). На рис. 2, а представлены результаты вычислений для $\omega = 2\pi/T_1$ ($T_1 = 31$, кривая 1), $\omega = 2\pi/T_2$ ($T_2 = 62$, кривая 2) и $\omega = 2\pi/T_3$ ($T_3 = 124$, кривая 3). Выполненные расчеты показали сильно выраженную взаимосвязь между разностью потенциалов V и прогибом w_0 . Поэтому графики указанных функций на представленных ниже рисунках совмещены. Следует отметить, что аналогичная корреляция V и w_0 имеет место и в асимметричном балочном биморфе при разомкнутых электродах его пьезокерамического слоя [6].

Из рис. 2, а видно, что при $\omega = 2\pi/T_2$ (кривая 2), что соответствует низшей частоте собственных изгибных колебаний преобразователя, наблюдается нарастание амплитуд $V(t)$

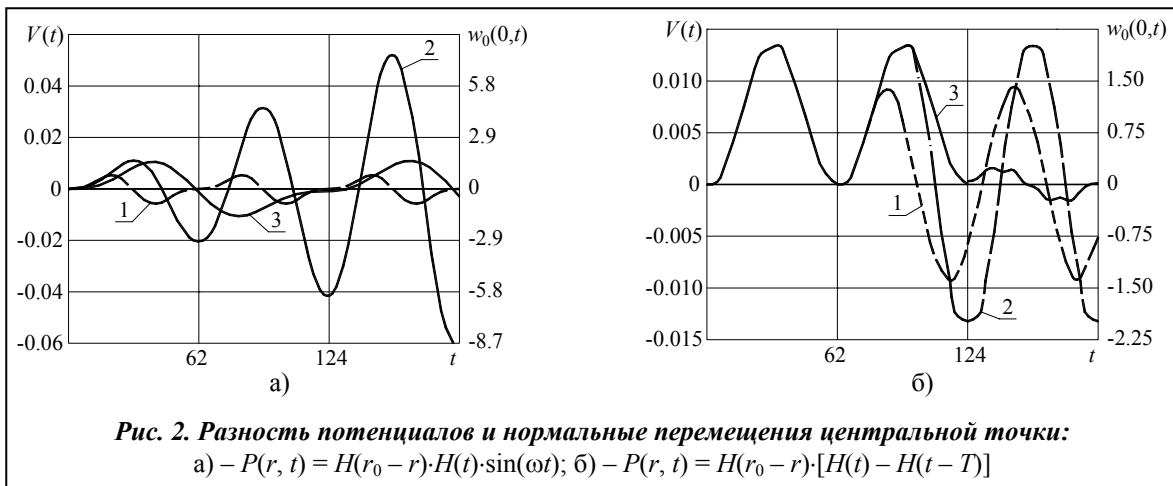


Рис. 2. Разность потенциалов и нормальные перемещения центральной точки:
 а) $P(r,t) = H(r_0 - r) \cdot H(t) \cdot \sin(\omega t)$; б) $P(r,t) = H(r_0 - r) \cdot [H(t) - H(t - T)]$

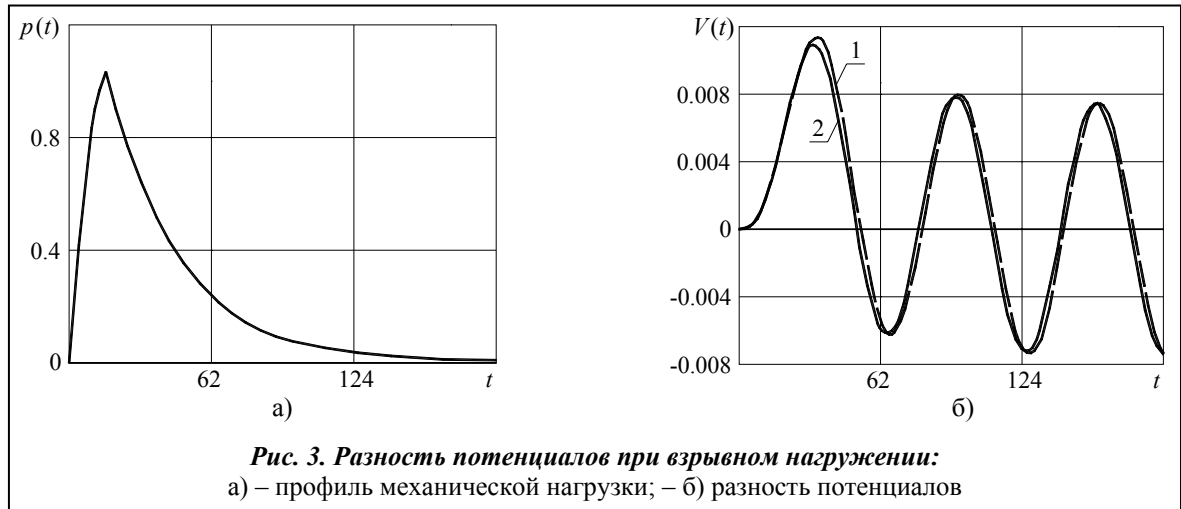


Рис. 3. Разность потенциалов при взрывном нагружении:
а) – профиль механической нагрузки; б) разность потенциалов

и $w_0(r, t)$ с ростом t .

Отметим, что при расчетах были приняты следующие параметры биморфа: $R = 25$ мм, $h_p = 1$ мм, $\rho_p = 7600$ кг/м³, $s_{11}^E = 15.4 \cdot 10^{-12}$ м²/Н, $s_{12}^E = -5.1 \cdot 10^{-12}$ м²/Н, $\varepsilon_{33}^T = 1750 \cdot \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $d_{31} = -178 \cdot 10^{-12}$ Кл/Н (пьезокерамика PZT-5); $h_m = 0.5$ мм, $\rho_m = 4450$ кг/м³, $E_m = 11.3 \cdot 10^{10}$ Н/м² (титан ВТ-6). Область нагружения пластины задавалась значением $r_0 = 0.5$. Шаг дискретизации Δt временного интервала при численном решении системы интегральных уравнений (18) принят равным 0.1. Входящий в метод А. Н. Тихонова параметр регуляризации вычислялся на основании принципа невязки при $\kappa = 0.02$.

На рис. 2, б представлены разность потенциалов $V(t)$ между электродами пьезослоя и прогиб диска $w_0(r, t)$ в центральной точке ($r = 0$) при действии нагрузки прямоугольного профиля $P(r, t) = H(r_0 - r) \cdot [H(t) - H(t - T)]$, где T – длительность импульса. При этом кривая 1 соответствует значению $T = 1.25 \cdot T_2$, кривая 2 – $T = 1.5 \cdot T_2$, кривая 3 – $T = 2.0 \cdot T_2$. Из анализа результатов для различных T видно, что до момента ее снятия колебания происходят относительно статического значения. После $t > T$ происходят почти периодические колебания, причем величины амплитуд разности потенциалов зависят от момента снятия нагрузки – они максимальны, если нагрузка снимается в момент максимальных деформаций (кривая 2), и минимальны, если нагрузка перестает действовать в момент недеформированного состояния (кривая 3). В случае, когда балка становится ненагруженной в момент $T = 1.25 \cdot T_2$, для $t > T$ наблюдается перестройка ее колебательного процесса (кривая 1). Как и в предыдущем варианте нагружения, функция w_0 коррелирует с V (экстремальные значения имеют место в одни и те же моменты времени).

Рассмотрен (рис. 3) также случай действия на круглую биморфную пластину взрывной нагрузки, профиль которой показан на рис. 3, а. Соответствующая ей разность потенциалов, вычисленная из соотношения (19), представлена кривой 1 на рис. 3, б. Для оценки достоверности результатов задача в такой постановке была решена с помощью программного обеспечения, основанного на прямых численных методах типа МКЭ. Кривая 2 на рис. 3, б иллюстрирует полученный график функции $V(t)$.

Хорошее совпадение кривых 1 и 2 (рис. 3, б) позволяет утверждать об эффективности и достоверности изложенной в настоящей работе методики решения задачи о нестационарных колебаниях круглой асимметричной биморфной пластины. Отметим, что относительное отличие результатов, полученных аналитическим и конечно-элементным подходами (кривые 1 и 2, рис. 3, б), не превышает 5%.

Заключение

Полученные результаты могут быть использованы при разработке методов идентификации действующей механической нагрузки по данным регистрации разности потенциалов между электродами пьезокерамического слоя биморфа и на основании этой информации методов управления ее напряженно-деформированным состоянием.

Литература

1. *Алавердиев А. М.* Исследование напряженно-деформированного состояния слойно-ступенчатых дисковых преобразователей при изгибных колебаниях / А. М. Алавердиев, Н. Б. Ахметов, Т. Д. Шермергор // Пробл. прочности. – 1987. – № 2. – С. 59–63.
2. *Чувствительность* биморфного преобразователя типа металл-керамика / Ю. Б. Евсейчик, С. И. Рудницкий, В. Л. Шарапов, Н. А. Шульга // Прикл. механика. – 1990. – Т. 26, № 12. – С. 67–75.
3. *Шульга Н. А.* Колебания пьезоэлектрических тел / Н. А. Шульга, А. М. Болкисев. – Киев : Наук. думка, 1990. – 228 с.
4. *Математическое* моделирование в задачах механики связанных полей: в 2 т. Т. II. Статические и динамические задачи электроупругости для составных многосвязных тел / Д. И. Бардзокас, А. И. Зобнин, Н. А. Сенник, М. Л. Фильштинский. – М. : КомКнига, 2005. – 376 с.
5. *Бабаев А. Э.* Нестационарные колебания тонкостенной электроупругой полосы / А. Э. Бабаев, Ю. Б. Мосеенков // Докл. НАН Украины. Сер. Математика, естествознание, технические науки. – 1994. – № 12. – С. 54–58.
6. *Бабаев А. Э.* Нестационарные колебания биморфной балки в режимах прямого и обратного пьезоэлектрического эффекта / А. Э. Бабаев, А. А. Бабаев, И. В. Янчевский // Актуальные проблемы физ.-механ. исследований. Акустика и волны. – 2007. – № 3. – С. 16–27.
7. *Wang H. M.* Dynamic solution of multilayered orthotropic piezoelectric hollow cylinder for axisymmetric plane strain problems / H. M. Wang, H. J. Ding, Y. M. Chen // Int. J. Sol. and Struct. – 2005. – № 42. – P. 85–109.
8. *Хорошун Л. П.* Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов / Л. П. Хорошун, Б. П. Маслов, П. В. Лещенко. – Киев : Наук. думка, 1989. – 208 с.
9. *Гринченко В. Т.* Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. Т. 5. Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. – Киев : Наук. думка, 1989. – 280 с.
10. *Жарий О. Ю.* Введение в механику нестационарных колебаний и волн / О. Ю. Жарий, А. Ф. Улитко. – Киев : Выща шк., 1989. – 184 с.
11. *Диткин В. А.* Справочник по операционному исчислению / В. А. Диткин, А. П. Прудников. – М. : Высш. шк., 1965. – 466 с.
12. *Градштейн И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Изд-во физ.-мат. лит., 1963. – 1108 с.
13. *Численные* методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола. – М.: Наука, 1990. – 229 с.
14. *Задачи* импульсного деформирования элементов конструкций / Е. Г. Янютин, И. В. Янчевский, А. В. Воропай, А. С. Шарапата. – Харьков: Харьк. нац. автодор. ун-т, 2004. – 392 с.

Поступила в редакцию
27.05.10