УДК 621.391:517.518:510.52

О. М. Литвин, д-р. фіз.-мат. наук
О. П. Нечуйвітер, канд. фіз.-мат. наук

Українська інженерно-педагогічна академія
(м. Харків, e-mail: academ@kharkov.ua; olesya@email.com)

ТОЧНІ КУБАТУРНІ ФОРМУЛИ НАБЛИЖЕНОГО ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ФУР'Є ФУНКЦІЙ ТРЬОХ ЗМІННИХ

Пропонуються та досліджуються кубатурні формули обчислення 3D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерфлетації на класі функцій, у яких мішані похідні третього $f^{(1,1,1)}(x, y, z)$ або шостого $f^{(2,2,2)}(x, y, z)$ порядку є сталими. Інформація про функцію задана слідами на системі взаємно-перпендикулярних площин. Доводиться, що кубатурні формули є оптимальними за точністю на цьому класі функцій.

Предлагаются, исследуются кубатурные формулы вычисления 3D коэффициентов Фурье с использованием интерфлетации на классе функций, у которых смешанные производные третьего $f^{(1,1,1)}(x, y, z)$ или шестого $f^{(2,2,2)}(x, y, z)$ порядка постоянны. Информация о функции задана следами на системе взаимно-перпендикулярных плоскостей. Доказывается, что кубатурные формулы являются оптимальными по точности на этом классе функций.

Вступ

На цей час методи комп'ютерної томографії є найбільш ефективними методами дослідження внутрішньої структури тривимірного тіла без його руйнування. Ці методи знаходять застосування у таких галузях науки і техніки, як медицина, радіолокація, оптика, геологія та ін. Важливим є використання комп'ютерної томографії в машинобудуванні, зокрема при неруйнівному контролі якості об'єктів – дефектоскопії при дослідженні особливо важливих деталей авіадвигунів.

1. Постановка проблеми

При розв'язанні задачі тривимірної комп'ютерної томографії використовується метод, який узагальнює прямий метод Фур'є з двовимірного на тривимірний випадок. В цьому методі шукана функція від трьох змінних подається у вигляді ряду Фур'є. Вибір методу при розв'язанні задачі наближеного обчислення коефіцієнтів цього ряду пояснюється видом задання початкових даних. У випадку, коли дані – це сліди функції на площинах, то для наближеного обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є будуються кубатурні формули з використанням інтерфлетації функцій [1].

1.1. Аналіз літератури

Актуальність задачі тривимірної комп'ютерної томографії вимагає використання нового тривимірного інформаційного оператора-інтерфлетанта при побудові кубатурних формул для наближеного обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є. В [2]-[4] викладений загальний підхід до побудови операторів фінітного тривимірного дискретно-неперервного і дискретного перетворення Фур'є на основі методу Файлона, трилінійних сплайнів (лінійних за кожною змінною) та сплайн-інтерфлетації на класі диференційовних функцій. Однак з точки зору теорії оптимальних алгоритмів [5] наближене обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є за допомогою сплайн-інтерфлетації на класі диференційовних функцій із сталими мішаними похідними $f^{(r,r,r)}(x, y, z)$, $r = 1, 2$ розглядається вперше.

1.2. Мета дослідження

Метою даної роботи є побудова оптимальних за точністю кубатурних формул для обчислення 3D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерфлетації функцій на класі дійсних функцій трьох змінних, визначених на $G = [0, 1]^3$ і таких, що $f^{(r,r,r)}(x, y, z) = M$, $r = 1, 2$, $x_k = k\Delta$, $y_j = j\Delta$, $z_s = s\Delta$, $\Delta = 1/\ell$. Інформація про функцію задана її слідами на площинах. Для досягнення цієї мети поставлена така задача. Довести, що похибка обчислення 3D коефіцієнтів Фур'є кубатурними формулами на класі функцій зі сталими мішаними похідними третього або шостого порядку дорівнює нулю.

2. Допоміжні твердження статті

Розглянемо допоміжні леми.

Лема 1. Нехай $f(x) \in C[0, 1]$, $f'(x) = 1$, $S_k(x) = f(x_k)\dfrac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + f(x_{k+1})\dfrac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$, $x_k \le x \le x_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, \ell - 1$, тоді

$$f(x) - S_k(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \int_{x_k}^{x} f'(\xi)d\xi + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \int_{x_{k+1}}^{x} f'(\xi)d\xi = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(\xi) G_{1k}(x, \xi) d\xi,$$

$$G_{1k}(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}, & x_k < \xi < x, \\ \dfrac{x_k - x}{x_{k+1} - x_k}, & x < \xi < x_{k+1}. \end{cases}$$

Доведення. Покажемо, що якщо

$$R_k(f) = f(x) - S_k(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \int_{x_k}^{x} f'(\xi)d\xi + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \int_{x_{k+1}}^{x} f'(\xi)d\xi,$$

то $f(x) - S_k(x) - R_k(f) = 0$.

Таким чином, $f(x) - S_k(x) - R_k(f) =$

$$= f(x) - \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \left(f(x_k) + \int_{x_k}^{x} f'(\xi)d\xi \right) - \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \left(f(x_{k+1}) + \int_{x_{k+1}}^{x} f'(\xi)d\xi \right) =$$

$$= f(x) - \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \left(f(x_k) + f(x) - f(x_k) \right) - \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \left(f(x_{k+1}) + f(x) - f(x_{k+1}) \right) =$$

$$= f(x) - \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} f(x) - \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} f(x) = f(x) - f(x) \left[\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right] =$$

$$= f(x) - f(x) \left[\frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right] = 0.$$

Лема 1 доведена.

Лема 2. Нехай $f(x) \in C^2[0, 1]$, $f''(x) = 1$, $S_k(x) = f(x_k)\dfrac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + f(x_{k+1})\dfrac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$, $x_k \le x \le x_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, \ell - 1$, тоді

$$f(x)-S_k(x)=\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\int_{x_k}^{x} f''(\xi)(x_k-\xi)d\xi+\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\int_{x_{k+1}}^{x} f''(\xi)(x_{k+1}-\xi)d\xi=$$

$$=\int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(\xi)G_{1k}(x,\xi)d\xi, \qquad \text{де}$$

$$G_{1k}(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}(x_k-\xi), & x_k<\xi<x,\\ \dfrac{x_k-x}{x_{k+1}-x_k}(x_{k+1}-\xi), & x<\xi<x_{k+1}.\end{cases}$$

Доведення. Покажемо, що якщо

$$R_k(f)=f(x)-S_k(x)=\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\int_{x_k}^{x} f''(\xi)(x_k-\xi)d\xi+\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\int_{x_{k+1}}^{x} f''(\xi)(x_{k+1}-\xi)d\xi,$$

то $f(x)-S_k(x)-R_k(f)=0$.

Дійсно, $f(x)-S_k(x)-R_k(f)=$

$$=f(x)-\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\left(f(x_k)+\int_{x_k}^{x} f''(\xi)(x_k-\xi)d\xi\right)-\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\left(f(x_{k+1})+\int_{x_{k+1}}^{x} f''(\xi)(x_{k+1}-\xi)d\xi\right)=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\displaystyle\int_{x_k}^{x} f''(\xi)(x_k-\xi)d\xi=\begin{vmatrix}u=(x_k-\xi), & du=-d\xi\\ f''(\xi)d\xi=dv, & v=f'(\xi)\end{vmatrix}=\\ \displaystyle=(x_k-\xi)f'(\xi)\Big|_{x_k}^{x}+\int_{x_k}^{x} f'(\xi)d\xi=(x_k-x)f'(x)+f(x)-f(x_k),\\ \displaystyle\int_{x_{k+1}}^{x} f''(\xi)(x_{k+1}-\xi)d\xi=(x_{k+1}-x)f'(x)+f(x)-f(x_{k+1})\end{array}\right|=$$

$$=f(x)-\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\big(f(x_k)+(x_k-x)f'(x)+f(x)-f(x_k)\big)-$$

$$-\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\big(f(x_{k+1})+(x_{k+1}-x)f'(x)+f(x)-f(x_{k+1})\big)=$$

$$=f(x)-\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}f(x)-\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}f(x)-\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}(x_k-x)f'(x)-\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}(x_{k+1}-x)f'(x)=$$

$$=f(x)-f(x)\left[\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}+\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right]-f'(x)\left[\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}(x_k-x)-\frac{x_k-x}{x_{k+1}-x_k}(x_{k+1}-x)\right]=$$

$$=-f'(x)\left[\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}(x_k-x)-\frac{x_k-x}{x_{k+1}-x_k}(x_{k+1}-x)\right]=0.$$

Лема 2 доведена.

Лема 3. Якщо $x_k=k\Delta$, $\Delta=1/\ell$, $k=0, 1, \ldots, \ell$, то $\displaystyle\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1}-x)(x-x_k)\sin 2\pi mx dx=0$.

Доведення. Лема доводиться безпосереднім інтегруванням

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1}-x)(x-x_k)\sin 2\pi mx dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u=(x_{k+1}-x)(x-x_k) & du=((x_{k+1}-x)-(x-x_k))dx \\ \sin 2\pi mx dx = dv & v=-\dfrac{1}{2\pi m}\cos 2\pi mx \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{(x_{k+1}-x)(x-x_k)}{2\pi m}\cos 2\pi mx\Bigg|_{x_k}^{x_{k+1}} + \frac{1}{2\pi m}\int_{x_k}^{x_{k+1}} ((x_{k+1}-x)-(x-x_k))\cos 2\pi mx dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u=(x_{k+1}-x)-(x-x_k) & du=-2dx \\ \cos 2\pi mx dx = dv & v=\dfrac{1}{2\pi m}\sin 2\pi mx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(x_{k+1}-x)-(x-x_k)}{(2\pi m)^2}\sin 2\pi mx\Bigg|_{x_k}^{x_{k+1}} + \frac{2}{(2\pi m)^2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin 2\pi mx dx =$$

$$= \frac{(x_{k+1}-x_k)}{4\pi^2 m^2}(-\sin 2\pi m x_k - \sin 2\pi m x_{k+1}) + \frac{1}{2\pi^2 m^2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin 2\pi mx dx.$$

Отже, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{(x_{k+1}-x_k)}{4\pi^2 m^2}(-\sin 2\pi m x_k - \sin 2\pi m x_{k+1}) + \frac{1}{2\pi^2 m^2}\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin 2\pi mx dx =$

$$= -\frac{\Delta}{4\pi^2 m^2}\sum_{k=0}^{\ell-1}(\sin 2\pi m x_k + \sin 2\pi m x_{k+1}) + \frac{1}{2\pi^2 m^2}\int_0^1 \sin 2\pi mx dx =$$

$$= -\frac{\Delta}{4\pi^2 m^2}(\sin 2\pi m x_0 + \sin 2\pi m x_1 + \sin 2\pi m x_1 + \sin 2\pi m x_2 + \ldots + \sin 2\pi m x_{\ell-1} + \sin 2\pi m x_\ell) =$$

$$= -\frac{\Delta}{4\pi^2 m^2}\left(\sin 2\pi m x_0 + 2\sum_{k=1}^{\ell-1}\sin 2\pi m x_k + \sin 2\pi m x_\ell\right) = -\frac{\Delta}{4\pi^2 m^2}2\sum_{k=1}^{\ell-1}\sin 2\pi m x_k.$$

Покажемо, що $\displaystyle\sum_{k=1}^{\ell-1}\sin 2\pi m x_k = 0$. Для цього скористаємось такою формулою [6]:

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \frac{\cos\dfrac{\alpha}{2} - \cos\dfrac{(2n+1)\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}, \qquad \alpha \neq 2\pi r, \quad r \in Z.$$

В нашому випадку $\alpha = \dfrac{2\pi m}{\ell}$, оскільки $k = 1, 2, \ldots, \ell - 1$, то $n = \ell - 1$. Підставляємо

$$\sum_{k=1}^{\ell-1}\sin k\frac{2\pi m}{\ell} = \frac{1}{2\sin\dfrac{2\pi m}{2\ell}}\left(\cos\frac{2\pi m}{2\ell} - \cos\frac{(2(\ell-1)+1)\dfrac{2\pi m}{\ell}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\dfrac{\pi m}{\ell}}\left(\cos\frac{\pi m}{\ell} - \cos\frac{(2\ell-1)\pi m}{\ell}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\dfrac{\pi m}{\ell}}\left(2\sin\frac{\dfrac{\pi m}{\ell}+\dfrac{(2\ell-1)\pi m}{\ell}}{2}\sin\frac{\dfrac{(2\ell-1)\pi m}{\ell}-\dfrac{\pi m}{\ell}}{2}\right)=$$

$$= \frac{1}{\sin\dfrac{\pi m}{\ell}}\sin\pi m\sin\left(\pi m-\frac{\pi m}{\ell}\right)=0.$$

Таким чином, $\sum\limits_{k=0}^{\ell}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1}-x)(x-x_k)\sin 2\pi mxdx=0$, і лема 3 доведена.

Лема 4. Якщо $x_k = k\Delta$, $\Delta = 1/\ell$, $k = 0, 1, \ldots, \ell$, то $\sum\limits_{k=0}^{\ell-1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1}-x)(x-x_k)\cos 2\pi mxdx=0$, при $m \neq \ell$.

Доведення. Проінтегрувавши частинами, отримаємо

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1}-x)(x-x_k)\cos 2\pi mxdx=$$

$$=\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1}-x)(x-x_k)\cos 2\pi mxdx=\left|\begin{matrix} u=(x_{k+1}-x)(x-x_k), & du=(x_{k+1}-x)-(x-x_k)dx \\ \cos 2\pi mxdx=dv, & v=\dfrac{1}{2\pi m}\sin 2\pi mx\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{(x_{k+1}-x)(x-x_k)}{2\pi m}\sin 2\pi mx\Bigg|_{x_k}^{x_{k+1}}-\frac{1}{2\pi m}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}((x_{k+1}-x)-(x-x_k))\sin 2\pi mxdx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=(x_{k+1}-x)-(x-x_k), & du=-2dx \\ \sin 2\pi mxdx=dv, & v=-\dfrac{1}{2\pi m}\cos 2\pi mx\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{((x_{k+1}-x)-(x-x_k))}{(2\pi m)^2}\cos 2\pi mx\Bigg|_{x_k}^{x_{k+1}}-\frac{2}{(2\pi m)^2}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\cos 2\pi mxdx=$$

$$=\frac{(x_{k+1}-x_k)}{4\pi^2m^2}(-\cos 2\pi mx_k-\cos 2\pi mx_{k+1})-\frac{1}{2\pi^2m^2}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\cos 2\pi mxdx.$$

Отже,

$$\sum_{k=0}^{\ell-1}\frac{(x_{k+1}-x_k)}{4\pi^2m^2}(-\cos 2\pi mx_k-\cos 2\pi mx_{k+1})-\frac{1}{2\pi^2m^2}\sum_{k=0}^{\ell-1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\cos 2\pi mxdx=$$

$$=-\frac{\Delta}{4\pi^2m^2}\sum_{k=0}^{\ell-1}(\cos 2\pi mx_k+\cos 2\pi mx_{k+1})+\frac{1}{2\pi^2m^2}\int\limits_0^1\cos 2\pi mxdx=$$

$$=-\frac{\Delta}{4\pi^2m^2}(\cos 2\pi mx_0+\cos 2\pi mx_1+\cos 2\pi mx_1+\cos 2\pi mx_2+\ldots+\cos 2\pi mx_{\ell-1}+\cos 2\pi mx_\ell)=$$

$$=-\frac{\Delta}{4\pi^2m^2}\left(\cos 2\pi mx_0+2\sum_{k=1}^{\ell-1}\cos 2\pi mx_k+\cos 2\pi mx_\ell\right)=-\frac{\Delta}{4\pi^2m^2}\left(1+2\sum_{k=1}^{\ell-1}\cos 2\pi mx_k+1\right).$$

Покажемо, що $\sum\limits_{k=1}^{\ell-1}\cos 2\pi mx_k=-1$. Для цього скористаємось формулою [6]

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+...+\cos n\alpha=\frac{\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}},\qquad \alpha\neq 2\pi r,\quad r\in Z.$$

В нашому випадку $\alpha=\frac{2\pi m}{\ell}$, оскільки $k = 1, 2, \dots, \ell-1$, то $n=\ell-1$. Підставляємо

$$\sum_{k=1}^{\ell-1}\cos k\frac{2\pi m}{\ell}=\frac{1}{2\sin\frac{2\pi m}{2\ell}}\left(\sin\frac{(2(\ell-1)+1)\frac{2\pi m}{\ell}}{2}-\sin\frac{2\pi m}{2\ell}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi m}{\ell}}\left(\sin\frac{\pi m}{\ell}-\sin\frac{(2\ell-1)\pi m}{\ell}\right)=\frac{1}{2\sin\frac{\pi m}{\ell}}\left(2\cos\frac{\frac{\pi m}{\ell}+\frac{(2\ell-1)\pi m}{\ell}}{2}\sin\frac{\frac{(2\ell-1)\pi m}{\ell}-\frac{\pi m}{\ell}}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\pi m}{\ell}}\cos\pi m\sin\left(\pi m-\frac{\pi m}{\ell}\right)=\frac{1}{\sin\frac{\pi m}{\ell}}(-1)^m\left(\sin\pi m\cos\frac{\pi m}{\ell}-(-1)^m\sin\frac{\pi m}{\ell}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\sin\frac{\pi m}{\ell}}(-1)^m(-1)^m\sin\frac{\pi m}{\ell}=-(-1)^{2m}=-1.$$

Таким чином, $\sum\limits_{k=0}^{\ell}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1}-x)(x-x_k)\cos 2\pi mx dx=0$ при $m\neq\ell$ і лема 4 доведена.

3. Основні твердження статті

3.1. Кубатурні формули з точки зору теорії оптимальних алгоритмів

Використання нових інформаційних операторів зумовлює новий підхід до отримання оцінок в теорії оптимальних алгоритмів. В цифровій обробці сигналів як множину кубатурних формул для наближеного обчислення інтеграла від швидкоосцилюючої функції трьох змінних $I(f,\omega)$ розглядають множину кубатурних формул ℓ_N, що використовують інформацію про функцію не більше ніж на N площинах відповідно. Якщо $R(f,\omega,\ell_N)$ – похибка наближеного обчислення $I(f,\omega)$ кубатурною формулою ℓ_N: $R(f,\omega,\ell_N)=I(f,\omega)-\ell_N$, то похибкою кубатурної формули ℓ_N на класі F називають величину $R(f,\omega,\ell_N)=\sup\limits_{f(x)\in F}\left|R(f,\omega,\ell_N)\right|$. Оптимальною похибкою чисельного інтегрування на класі називають $R_N(F,\omega)=\inf\limits_{\ell_N\in L_N}\left|R(f,\omega,\ell_N)\right|$. Щоб отримати оцінку знизу величини $R_N(F,\omega)$, спочатку для фіксованої кубатурної формули ℓ_N, отримують оцінку знизу величини $R(f,\omega,\ell_N)$. Якщо ця оцінка знизу величини $R(f,\omega,\ell_N)$ не залежить від кубатурної формули ℓ_N, то ця ж оцінка справедлива і для величини $R_N(F,\omega)$. Для отримання оцінок знизу величини $R(f,\omega,\ell_N)$ використовують метод “капелюхів”. Кубатурна формула ℓ^*_N, на якій досягається $R_N(F,\omega)$, називається оптимальною за точністю [5].

3.2. Кубатурні формули з використанням операторів лінійної сплайн-інтерфлетації

Введемо позначення

$$h_{10}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{-\Delta}, & x_0\le x<x_1,\\ 0, & x\ge x_1,\end{cases}\quad h_{20}(y)=\begin{cases}\dfrac{y-y_1}{-\Delta}, & y_0\le y<y_1,\\ 0, & y\ge y_1,\end{cases}\quad h_{30}(z)=\begin{cases}\dfrac{z-z_1}{-\Delta}, & z_0\le z<z_1,\\ 0, & z\ge z_1,\end{cases}$$

$$h_{1k}(x)=\begin{cases}0, & x\le x_{k-1}\\ \dfrac{x-x_k}{\Delta}, & x_{k-1}\le x<x_k\\ \dfrac{x-x_{k+1}}{-\Delta}, & x_k\le x<x_{k+1},\\ 0, & x\ge x_{k+1}\end{cases}\quad k=1,\ldots\ell-1;\quad h_{2j}(y)=\begin{cases}0, & y\le y_{j-1}\\ \dfrac{y-y_j}{\Delta}, & y_{j-1}\le y<y_j\\ \dfrac{y-y_{j+1}}{-\Delta}, & y_j\le y<y_{j+1},\\ 0, & y\ge y_{j+1}\end{cases}\quad j=1,\ldots\ell-1$$

$$h_{3s}(z)=\begin{cases}0, & z\le z_{s-1}\\ \dfrac{z-z_s}{\Delta}, & z_{s-1}\le z<z_s\\ \dfrac{z-z_{s+1}}{-\Delta}, & z_s\le z<z_{s+1},\\ 0, & z\ge z_{s+1}\end{cases}\quad s=1,2,\ldots\ell-1;\qquad h_{1\ell}(x)=\begin{cases}0, & x\le x_{\ell-1},\\ \dfrac{x-x_\ell}{\Delta}, & x_{\ell-1}\le x<x_\ell,\\ 0, & x\ge x_\ell,\end{cases}$$

$$h_{3s}(z)=\begin{cases}0, & z\le z_{s-1}\\ \dfrac{z-z_s}{\Delta}, & z_{s-1}\le z<z_s\\ \dfrac{z-z_{s+1}}{-\Delta}, & z_s\le z<z_{s+1},\\ 0, & z\ge z_{s+1}\end{cases}\quad s=1,2,\ldots\ell-1;\qquad h_{1\ell}(x)=\begin{cases}0, & x\le x_{\ell-1},\\ \dfrac{x-x_\ell}{\Delta}, & x_{\ell-1}\le x<x_\ell,\\ 0, & x\ge x_\ell,\end{cases}$$

$$h_{2\ell}(y)=\begin{cases}0, & y\le y_{\ell-1},\\ \dfrac{y-y_\ell}{\Delta}, & y_{\ell-1}\le y<y_\ell,\\ 0, & y\ge y_\ell,\end{cases}\qquad h_{3\ell}(z)=\begin{cases}0, & z\le z_{\ell-1},\\ \dfrac{z-z_\ell}{\Delta}, & z_{\ell-1}\le z<z_\ell,\\ 0, & z\ge z_\ell,\end{cases}$$

$$x_k=k\Delta,\quad y_j=j\Delta,\quad z_s=s\Delta,\quad \Delta=\frac{1}{\ell}$$

Нехай $Of(x, y, z)$ – оператор сплайн-інтерфлетант

$$Of(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\ell}f(x_k,y,z)h_{1k}(x)+\sum_{j=0}^{\ell}f(x,y_j,z)h_{2j}(y)+\sum_{j=0}^{\ell}f(x,y,z_s)h_{3s}(z)-$$
$$-\sum_{k=0}^{\ell}\sum_{j=0}^{\ell}f(x_k,y_j,z)h_{1k}(x)h_{2j}(y)-\sum_{k=0}^{\ell}\sum_{s=0}^{\ell}f(x_k,y,z_s)h_{1k}(x)h_{3s}(z)-$$
$$-\sum_{j=0}^{\ell}\sum_{s=0}^{\ell}f(x,y_j,z_s)h_{2j}(y)h_{3s}(z)+\sum_{k=0}^{\ell}\sum_{j=0}^{\ell}\sum_{s=0}^{\ell}f(x_k,y_j,z_s)h_{1k}(x)h_{2j}(y)h_{3s}(z).$$

Лема 5. [1] Для $Of(x, y, z)$ виконуються також властивості

1. $\left|f(x,y,z)-Of(x,y,z)\right|=O\left(\dfrac{1}{\ell^{3r}}\right)=O(\Delta^{3r}),\quad \forall(x, y, z)\in G=[0, 1]^3,\ r=1, 2;$
2. $Of(x_k, y, z)=f(x_k, y, z),\quad k=0, 1, \ldots, \ell;$
3. $Of(x, y_j, z)=f(x, y_j, z),\quad j=0, 1, \ldots, \ell;$
4. $Of(x, y, z_s)=f(x, y, z_s),\quad s=0, 1, \ldots, \ell.$

Для обчислення інтегралів

$$I_1^3(m,n,p)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y,z)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pz dxdydz;$$

$$I_2^3(m,n,p)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y,z)\cos 2\pi mx\cos 2\pi ny\cos 2\pi pz dxdydz$$

пропонуються формули

$$\Phi_1^3(m,n,p)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 Of(x,y,z)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pz dxdydz;$$

$$\Phi_2^3(m,n,p)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 Of(x,y,z)\cos 2\pi mx\cos 2\pi ny\cos 2\pi pz dxdydz.$$

Підставимо вираз для оператора сплайн-інтерфлетанта у ці формули та отримаємо відповідні кубатурні формули

$$\begin{aligned}\Phi_1^3(m,n,p)&=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\sum_{k=0}^{\ell} f(x_k,y,z)\int\limits_0^1 h_{1k}(x)\sin 2\pi mx dx\sin 2\pi ny dy\sin 2\pi pz dz+\\
&+\int\limits_0^1\int\limits_0^1\sum_{j=0}^{\ell} f(x,y_j,z)\int\limits_0^1 h_{2j}(y)\sin 2\pi ny dy\sin 2\pi mx dx\sin 2\pi pz dz+\\
&+\int\limits_0^1\int\limits_0^1\sum_{s=0}^{\ell} f(x,y,z_s)\int\limits_0^1 h_{3s}(z)\sin 2\pi pz dz\sin 2\pi ny dy\sin 2\pi mx dx-\\
&-\int\limits_0^1\sum_{k=0}^{\ell}\sum_{j=0}^{\ell} f(x_k,y_j,z)\int\limits_0^1 h_{1k}(x)\sin 2\pi mx dx\int\limits_0^1 h_{2j}(y)\sin 2\pi ny dy\sin 2\pi pz dz-\\
&-\int\limits_0^1\sum_{k=0}^{\ell}\sum_{s=0}^{\ell} f(x_k,y,z_s)\int\limits_0^1 h_{1k}(x)\sin 2\pi mx dx\int\limits_0^1 h_{3s}(z)\sin 2\pi pz dz\sin 2\pi ny dy-\\
&-\int\limits_0^1\sum_{j=0}^{\ell}\sum_{s=0}^{\ell} f(x,y_j,z_s)\int\limits_0^1 h_{2j}(y)\sin 2\pi ny dy\int\limits_0^1 h_{3s}(z)\sin 2\pi pz dz\sin 2\pi mx dx+\\
&-\sum_{k=0}^{\ell}\sum_{j=0}^{\ell}\sum_{s=0}^{\ell} f(x_k,y_j,z_s)\int\limits_0^1 h_{1k}(x)\sin 2\pi mx dx\int\limits_0^1 h_{2j}(y)\sin 2\pi ny dy\int\limits_0^1 h_{3s}(z)\sin 2\pi pz dz.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2^3(m,n,p)&=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\sum_{k=0}^{\ell} f(x_k,y,z)\int\limits_0^1 h_{1k}(x)\cos 2\pi mx dx\cos 2\pi ny dy\cos 2\pi pz dz+\\
&+\int\limits_0^1\int\limits_0^1\sum_{j=0}^{\ell} f(x,y_j,z)\int\limits_0^1 h_{2j}(y)\cos 2\pi ny dy\cos 2\pi mx dx\cos 2\pi pz dz+\\
&+\int\limits_0^1\int\limits_0^1\sum_{s=0}^{\ell} f(x,y,z_s)\int\limits_0^1 h_{3s}(z)\cos 2\pi pz dz\cos 2\pi ny dy\cos 2\pi mx dx-\\
&-\int\limits_0^1\sum_{k=0}^{\ell}\sum_{j=0}^{\ell} f(x_k,y_j,z)\int\limits_0^1 h_{1k}(x)\cos 2\pi mx dx\int\limits_0^1 h_{2j}(y)\cos 2\pi ny dy\cos 2\pi pz dz-\\
&-\int\limits_0^1\sum_{k=0}^{\ell}\sum_{s=0}^{\ell} f(x_k,y,z_s)\int\limits_0^1 h_{1k}(x)\cos 2\pi mx dx\int\limits_0^1 h_{3s}(z)\cos 2\pi pz dz\cos 2\pi ny dy-\end{aligned}$$

$$-\int_0^1 \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{s=0}^{\ell} f(x, y_j, z_s) \int_0^1 h_{2j}(y) \cos 2\pi n y dy \int_0^1 h_{3s}(z) \cos 2\pi p z dz \cos 2\pi m x dx +$$

$$-\sum_{k=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{s=0}^{\ell} f(x_k, y_j, z_s) \int_0^1 h_{1k}(x) \cos 2\pi m x dx \int_0^1 h_{2j}(y) \cos 2\pi n y dy \int_0^1 h_{3s}(z) \cos 2\pi p z dz.$$

Теорема 1. Кубатурна формула $\Phi_1^3(m,n,p)$ є оптимальною за точністю для обчислення $I_1^3(m,n,p)$.

Доведення. Маємо таку оцінку:

$$\rho(I_1^3(m,n,p), \Phi_1^3(m,n,p)) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \big(f(x,y,z) - Of(x,y,z)\big) \sin 2\pi m x \sin 2\pi n y \sin 2\pi p z dx dy dz =$$

$$= \sum_{k=0}^{\ell-1} \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{s=0}^{\ell-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{z_s}^{z_{s+1}} \big(f(x,y,z) - Of(x,y,z)\big) \sin 2\pi m x \sin 2\pi n y \sin 2\pi p z dx dy dz =$$

$$= \sum_{k=0}^{\ell-1} \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{s=0}^{\ell-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{z_s}^{z_{s+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{z_s}^{z_{s+1}} f^{(r,r,r)}(\xi,\eta,\varsigma) G_{1k}(x,\xi,r) G_{2j}(y,\eta,r) G_{3s}(x,\varsigma,r) d\xi d\eta d\varsigma \times$$

$$\times \sin 2\pi m x \sin 2\pi n y \sin 2\pi p z dx dy dz,$$

$$G_{1k}(x,\xi,r) = \begin{cases} \dfrac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} \dfrac{(x_k - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_k < \xi < x, \\ \dfrac{x_k - x}{x_{k+1} - x_k} \dfrac{(x_{k+1} - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x < \xi < x_{k+1}, \end{cases}$$

$$G_{2j}(y,\eta,r) = \begin{cases} \dfrac{y_{j+1} - y}{y_{j+1} - y_j} \dfrac{(y_j - \eta)^{r-1}}{(r-1)!}, & y_j < \eta < y, \\ \dfrac{y_j - y}{y_{j+1} - y_j} \dfrac{(y_{j+1} - \eta)^{r-1}}{(r-1)!}, & y < \eta < y_{j+1}, \end{cases}$$

$$G_{3s}(z,\varsigma,r) = \begin{cases} \dfrac{z_{s+1} - z}{z_{s+1} - z_s} \dfrac{(z_s - \varsigma)^{r-1}}{(r-1)!}, & z_s < \varsigma < y, \\ \dfrac{z_s - z}{z_{s+1} - z_s} \dfrac{(y_{j+1} - \varsigma)^{r-1}}{(r-1)!}, & z < \varsigma < z_{s+1}, \end{cases}$$

$$r = 1,2.$$

Зауважимо, що $\sum_{k=0}^{\ell-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} G_{1k}(x,\xi,r) d\xi \sin 2\pi m x dx = 0$, оскільки при $r = 1$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} G_{1k}(x,\xi,r) d\xi = \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} \int_{x_k}^{x} d\xi + \frac{x_k - x}{x_{k+1} - x_k} \int_{x}^{x_{k+1}} d\xi = \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} (x - x_k) + \frac{x_k - x}{x_{k+1} - x_k} (x_{k+1} - x) = 0,$$

а при $r = 2$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} G_{1k}(x,\xi,r)d\xi = \frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}\int_{x_k}^{x}(x_k-\xi)d\xi + \frac{x_k-x}{x_{k+1}-x_k}\int_{x}^{x_{k+1}}(x_{k+1}-\xi)d\xi =$$

$$= -\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}\left.\frac{(x_k-\xi)^2}{2}\right|_{x_k}^{x} - \frac{x_k-x}{x_{k+1}-x_k}\left.\frac{(x_{k+1}-\xi)^2}{2}\right|_{x}^{x_{k+1}} =$$

$$= -\frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}\frac{(x_k-x)^2}{2} + \frac{x_k-x}{x_{k+1}-x_k}\frac{(x_{k+1}-x)^2}{2} =$$

$$= \frac{(x_{k+1}-x)(x_k-x)}{2(x_{k+1}-x_k)}\left(-(x_k-x)+x_{k+1}-x\right) = \frac{(x_{k+1}-x)(x_k-x)}{2}.$$

Отже, згідно з лемою 3 $\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{x_k}^{x_{k+1}} G_{1k}(x,\xi,r)d\xi \sin 2\pi mxdx = 0$.

Аналогічно доводиться, що

$$\sum_{j=0}^{\ell-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{y_j}^{y_{j+1}} G_{2j}(y,\eta,r)d\eta \sin 2\pi nydy = 0, \qquad \sum_{s=0}^{\ell-1}\int_{z_s}^{z_{s+1}}\int_{z_s}^{z_{s+1}} G_{3s}(z,\varsigma,r)d\varsigma \sin 2\pi pzdz = 0..$$

Таким чином, $\rho(I_1^3(m,n,p),\Phi_1^3(m,n,p)) = 0$, і формула $\Phi_1^3(m,n,p)$ на цьому класі є точною.

Теорема 2. Кубатурна формула $\Phi_2^3(m,n,p)$ є оптимальною за точністю для обчислення $I_2^3(m,n,p)$ при $m, m, p \neq \ell$.

Доведення базується на лемі 4 та аналогічне доведенню теореми 1.

3.3 Обчислювальний експеримент

Для $f(x, y, z) = xyz$, різних m, n, p, $r = 1$, $M = 1$ результати обчислень наводяться в табл. 1. Для $f(x, y, z) = x^2y^2z^2/8$, різних m, n, p, $r = 2$, $M = 1$ результати обчислень наводяться в табл. 2.

Результати обчислень підтверджують теоретичні висновки.

Висновки

В статті запропоновані точні кубатурні формули обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій трьох змінних з використанням інтерфлетації на класі функцій, у яких мішані похідні третього або шостого порядку сталі та інформація про функцію задана слідами на системі взаємно-перпендикулярних площин.

Таблиця 1. Наближене обчислення 3D коефіцієнтів Фур'є при r = 1

Номер коефіцієнта			Число відрізків	Точне значення коефіцієнта	Наближене значення коефіцієнта	Похибка наближення
m	n	p	ℓ	$I_1^3(m,n,p)$	$\Phi_1^3(m,n,p)$	$\rho(I_1^3,\Phi_1^3)$
2	2	3	10	–0,00033595348367	–0,00033595348367	0
			20		–0,00033595348367	0
			30		–0,00033595348367	0
6	7	8	10	–0,000011998338703	–0,000011998338703	0
			50		–0,000011998338703	0
			70		–0,000011998338703	0
10	7	8	10	–0,000007199003183	–0,000007199003222	$3{,}9\cdot10^{-14}$
			40		–0,000007199003221	$3{,}8\cdot10^{-14}$
			70		–0,000007199003221	$3{,}8\cdot10^{-14}$

Таблиця 2. Наближене обчислення 3D коефіцієнтів Фур'є при r = 2

Номер коефіцієнта			Число відрізків	Точне значення коефіцієнта	Наближене значення коефіцієнта	Похибка наближення
m	n	p	ℓ	$I_1^3(m,n,p)$	$\Phi_1^3(m,n,p)$	$\rho(I_1^3,\Phi_1^3)$
2	2	3	10	–0,00004199418546	–0,00004199418546	0
			20		–0,00004199418546	0
			30		–0,00004199418546	0
6	7	8	10	–0,00000149979233	–0,00000149979233	0
			50		–0,00000149979233	0
			70		–0,00000149979233	0
10	7	8	10	–0,000000899875398	–0,000000899875403	$5{,}1\cdot10^{-15}$
			40		–0,000000899875404	$6{,}5\cdot10^{-15}$
			70		–0,000000899875403	$5{,}5\cdot10^{-15}$

Література

1. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О. М. Литвин. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
2. *Литвин О. М.* Оператори фінітного тривимірного перетворення Фур'є / О. М. Литвин, В. М. Удовиченко // Радиоэлектроника и информатика. – 2004. – № 4 (29). – С. 130–133.
3. *Литвин О. М.* Оператори фінітного тривимірного дискретно-неперервного перетворення Фур'є на основі методу Файлона та трилінійних сплайнів, точні на тригонометричних поліномах заданого порядку / О. М. Литвин, В. М. Удовиченко // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – 2005. – № 1, 2 (51, 52). – С. 19–23.
4. *Литвин О. М.* Тривимірні фінітні перетворення Фур'є та Хартлі з використанням інтерфлетації функцій / О. М. Литвин, В. М. Удовиченко // Вестн. Нац. техн. ун-та «ХПИ». Автоматика и приборостроение. – Харьков, 2005. – № 38. – С. 90–130.
5. *Задирака В. К.* Цифровая обработка сигналов / В. К. Задирака, С. С. Мельникова. – Киев: Наук. думка, – 1993. – 294 с.
6. *Выгодский М. Я.* Справочник по элементарной математике / М. Я. Выгодский. – М: Наука, – 1982. – 335 с.

Надійшла до редакції
1.04.11

УДК 536.24

А. П. Слесаренко, д-р. физ.-мат. наук
Ю. О. Кобринович

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины
(г. Харьков, e-mail: kobrinovich.jul@mail.ru)

СТРУКТУРНО-РАЗНОСТНЫЙ ПОДХОД К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕСТАЦИОНАРНЫМ ТЕПЛООБМЕНОМ НА ПОВЕРХНОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Впервые построены приближенные аналитические структуры решения задач теплопроводности, точно, с использованием PS-функций удовлетворяющие нестационарным граничным условиям при любых зависимостях от времени коэффициента теплообмена на поверхности конструктивного элемента и температуры окружающей среды. На их базе с использованием по времени и координатам трехслойной и девятиточечной разностных схем соответственно построены структурно-разностные математические