

УДК 539.3

А. В. Борисюк***К. В. Аврамов****, д-р техн. наук

* Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»
(г. Харьков, e-mail: alexborysiuk@mail.ru)

** Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины
(г. Харьков, e-mail: kavramov@ipmach.kharkov.ua)

К РАСЧЕТУ НЕЛИНЕЙНЫХ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ЦАПФЫ РОТОРОВ НА ПОДШИПНИКАХ СКОЛЬЖЕНИЯ

Предлагается новый вариант конечноэлементной процедуры расчета распределения давления в подшипниках скольжения. Силы, действующие на цапфы, представляются в виде степенных рядов относительно перемещений и скоростей цапфы ротора. Полученные выражения сравниваются с известным аналитическим решением.

Пропонується новий варіант скінченноелементної процедури розрахунку розподілу тиску в підшипниках ковзання. Сили, що діють на цапфи, подаються у вигляді степеневих рядів відносно переміщень та швидкостей цапфи ротора. Отримані вирази порівнюються з відомим аналітичним розв'язком.

Введение

Подшипники скольжения широко используются в роторах стационарных газотурбинных установок. Со стороны масляного слоя на цапфы роторов действуют усилия, которые могут приводить к возникновению режимов автоколебаний с большими амплитудами. Эти силы нелинейно зависят от перемещений и скоростей цапф. Много усилий ученых и инженеров было предпринято как для предсказания таких автоколебаний, так и для определения сил, с которыми масляный слой действует на цапфы роторов. В монографии [1] представлены теоретические основы расчетов подшипников скольжения. Позняк [2] получил аналитические выражения для распределения давлений масляной пленки в коротких подшипниках скольжения. В работе [3] представлено асимптотическое решение уравнения Рейнольдса, описывающее масляный слой в подшипниках скольжения. Для получения этого



Рис. 1. Расчетная схема подшипника скольжения

решения используется вариационный подход. Каринцев и Шульженко [4] исследовали влияние инерции масляного слоя на значения давлений в коротких подшипниках и получили модель давлений в масляном слое. В [5] исследовалось распределение давления в подшипнике с учетом деформации рабочей поверхности.

В настоящей статье предложена конечноэлементная процедура определения нелинейных сил, действующих на цапфы роторов. Эти силы представляются в виде степенных рядов относительно перемещений и скоростей цапф. Для определения коэффициентов этих степенных рядов применяется метод конечных элементов. Результаты сравниваются с известными аналитическими решениями. Исследована сходимость получаемых решений.

1. Математическая модель распределения давления в подшипниках скольжения

В данной статье рассматривается короткий подшипник скольжения; его эскиз представлен на рис. 1. Течение смазки между поверхностями подшипника скольжения описывается уравнением Рейнольдса [1]

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) = \Omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (1)$$

где z, θ – продольная и угловая координаты подшипника ($z \in [0, L_b], \theta \in [0, \pi]$); L_b, R – длина и радиус подшипника; μ – вязкость масла; Ω – угловая скорость вращения вала; h – величина зазора между цапфой и рабочей поверхностью подшипника.

В большинстве работ [2–5] предполагается, что масляный слой занимает область $\theta \in [0, \pi]$. Граничные условия на концах подшипника $z = 0$ и $z = L_b$ записываются так: $p(0, \theta) = p(L_b, \theta) = 0$. Величина зазора h определяется

$$h = c - x \cos(\theta + \phi) - y \sin(\theta + \phi),$$

где x, y – координаты центра цапфы.

Для решения уравнения (1) применим методы конечных элементов и Галеркина [6, 7]. Разобьем масляную пленку на M четырехугольных конечных элементов с узлами в вершинах. Рассмотрим конечный элемент E , который занимает область

$$z \in [z_i, z_j]; \quad \theta \in [\theta_i, \theta_j]$$

Давление $\bar{p}_E(z, \theta)$ на этом конечном элементе представим

$$\bar{p}_E(z, \theta) = \sum_{i=1}^4 p_i u_i(z, \theta),$$

где $u_1(z, \theta), \dots, u_4(z, \theta)$ – линейно-независимые базисные функции, удовлетворяющие граничным условиям; p_1, \dots, p_4 – неизвестные параметры. В качестве базисных функций $u_j(z, \theta)$ используем следующие билинейные функции:

$$\begin{aligned} u_1(z, \theta) &= \frac{(z_j - z)(\theta_j - \theta)}{(z_j - z_i)(\theta_j - \theta_i)}, & u_2(z, \theta) &= \frac{(z - z_i)(\theta_j - \theta)}{(z_j - z_i)(\theta_j - \theta_i)}, \\ u_3(z, \theta) &= \frac{(z - z_i)(\theta - \theta_i)}{(z_j - z_i)(\theta_j - \theta_i)}, & u_4(z, \theta) &= \frac{(z_j - z)(\theta - \theta_i)}{(z_j - z_i)(\theta_j - \theta_i)}. \end{aligned}$$

Следуя методу Бубнова–Галеркина, составим слабые решения для системы (1) на конечном элементе E и воспользуемся интегрированием по частям. В результате получим

$$-\iint_{S_E} h^3 \left[\frac{\partial u_j(z, \theta)}{\partial z} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_j(z, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right] dz d\theta = \iint_{S_E} 6\mu \left(\Omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right) u_j(z, \theta) dz d\theta, \quad j = 1, \dots, 4, \quad (2)$$

где S_E – площадь масляной пленки подшипника на конечном элементе E . Величину h^3 запишем

$$h^3 = \sum_{i=1}^{10} a_i F_i,$$

где $\{F_1, \dots, F_{10}\} = \{1, x, y, x^2, y^2, xy, x^3, y^3, x^2y, xy^2\}$; a_1, \dots, a_{10} – коэффициенты, зависящие от углов θ, ϕ ; они здесь не приводятся для краткости изложения. Уравнение (2) представим следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=1}^{10} F_i \iint_{S_E} a_i \left(\frac{\partial u_j}{\partial z} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_j}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) = F_2 \iint_{S_E} 6\mu\Omega \sin(\theta + \phi) \cdot u_j dzd\theta - \\
 & - F_3 \iint_{S_E} 6\mu\Omega \cos(\theta + \phi) \cdot u_j dzd\theta - \dot{x} \iint_{S_E} 12\mu \cos(\theta + \phi) \cdot u_j dzd\theta - \dot{y} \iint_{S_E} 12\mu \sin(\theta + \phi) \cdot u_j dzd\theta, \quad (3) \\
 & j = 1, \dots, 4.
 \end{aligned}$$

В матричном виде система (3) выглядит так:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix},$$

где $A_{i,j} = - \iint_{S_E} h^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial z} \frac{\partial u_j}{\partial z} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_i}{\partial \theta} \frac{\partial u_j}{\partial \theta} \right) dzd\theta$, $B_i = \iint_{S_E} 6\mu \left(\Omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right) u_i dzd\theta$, $i = 1, \dots, 4$,

$j = 1, \dots, 4$

Следуя [6], произведем процедуру ансамблирования всех конечных элементов. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных p_i всех M конечных элементов. Эту систему, в общем случае, представим следующим образом:

$$[A(x, y)] \cdot [P] = [B(x, y, \dot{x}, \dot{y})], \quad (4)$$

где $[P] = [P_1, P_2, \dots]$ – глобальный вектор неизвестных коэффициентов аппроксимации всех элементов. Подчеркнем, что элементы матрицы и вектора правых частей системы (4) являются полиномами от обобщенных перемещений x, y и скоростей \dot{x}, \dot{y} цапфы.

Решение системы (4) определяется в виде степенного ряда по перемещениям и скоростям цапфы x, y, \dot{x}, \dot{y}

$$P_i = p_{i,1} + p_{i,2}x + p_{i,3}y + p_{i,4}\dot{x} + p_{i,5}\dot{y} + p_{i,6}x^2 + p_{i,7}y^2 + p_{i,8}xy + \dots \quad (5)$$

Матрицу $[A(x,y)]$ представим $[A(x, y)] = \sum_{i=1}^{10} [\tilde{A}_i] F_i$. Вектор неизвестных системы (4)

$[P]$ запишем в следующем виде:

$$[P] = \sum_{j=1}^n [\tilde{P}_j] S_j,$$

где $\{S_1, \dots, S_n\} = \{1, x, y, \dot{x}, \dot{y}, x^2, xy, x\dot{x}, x\dot{y}, \dots\}$; $[\tilde{P}_j] = [p_{1,i}; p_{2,i}; \dots]$. Вектор правых частей системы (4) представим

$$B(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \sum_{k=1}^4 [\tilde{B}_k] R_k. \quad (6)$$

где $\{R_1, R_2, R_3, R_4\} = \{x, y, \dot{x}, \dot{y}\}$; $[\tilde{B}_k]$ – вектора, состоящие из чисел. Теперь систему (4) можно переписать

$$\sum_{i=1}^{10n} [\tilde{Q}_i(P)] T_i = \sum_{k=1}^4 [\tilde{B}_k] R_k, \quad (7)$$

где T_i – степенные функции, которые получается в результате перемножения каждого элемента из $\{S_1, \dots, S_n\}$ с каждым элементом из $\{F_1, \dots, F_{10}\}$. Вектор $[\tilde{Q}_i(P)]$ зависит от элементов векторов $[\tilde{P}_1], [\tilde{P}_2], \dots$. Теперь приравняем коэффициенты при одинаковых степенных

функциях от x, \dot{x}, y, \dot{y} слева и справа (7). В результате получим набор систем линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $p_{i,1}; p_{i,2}; \dots$. Решая эти системы, имеем распределение давления в масляном слое подшипника скольжения.

2. Численный анализ давлений на цапфы

Численные расчеты проводились для подшипника скольжения со следующими параметрами:

$$R = 0,057 \text{ м}; \mu = 18 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}; L_b = 28,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}; c = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \Omega = 1460 \text{ рад/с}. \quad (8)$$

В дальнейшем полученные нами конечноэлементные решения будут сравниваться с аналитическим решением уравнения Рейнольдса для короткого подшипника скольжения, которое представим [8]

$$p_a = \frac{3\mu}{h^3} \left[\Omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right] z(z - L_b). \quad (9)$$

На рис. 2 показано решение уравнение Рейнольдса для случая короткого подшипника (9).

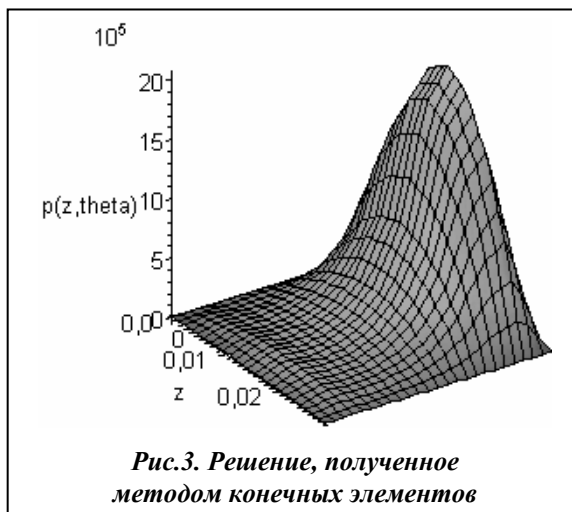
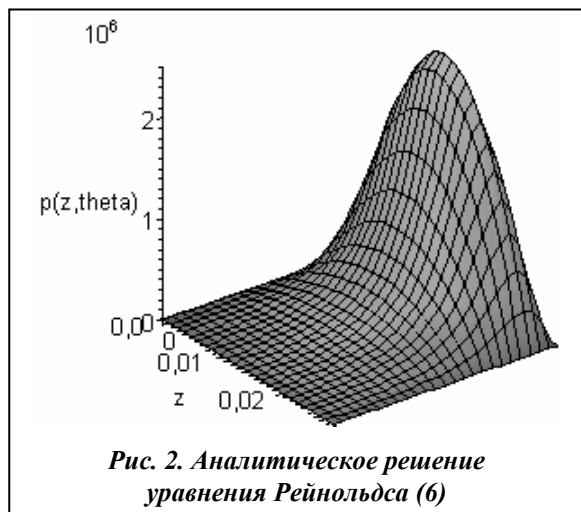
Для получения конечно элементного решения уравнения Рейнольдса плоскость (z, θ) разбиваем на 72 конечных элемента. Нами проводилось исследование сходимости решения (5) и обнаружено, что для получения решений с достаточной степенью точности используются слагаемые вплоть до девярых степеней в рядах Тейлора. На рис. 3 показан результат расчета с указанными параметрами.

Для сравнения результатов с аналитическим решением вычислялась относительная погрешность

$$\delta = \frac{\int_0^{L_b} \int_0^\pi [p_a(z, \theta) - \bar{p}(z, \theta)] d\theta dz}{\int_0^{L_b} \int_0^\pi p_a(z, \theta) d\theta dz}. \quad (10)$$

Для параметров (8) относительная погрешность составляла $\delta = 0,1198$.

Исследовалась сходимость конечноэлементного решения при увеличении числа элементов, на которые разбивается масляная пленка. На рис.4 приведены графики зависимости относительной погрешности от количества элементов. Число участков, на которые проводилось разбиение вдоль оси θ , выбиралось фиксированным и равным 7, а число участков вдоль оси z , на которые проводилось разбиение, менялось от четырех до одиннадцати. После проведения конечноэлементных расчетов считалась относительная погрешность по формуле (10). Результаты расчета приведены на рис. 4, а. Они демонстрируют довольно быструю



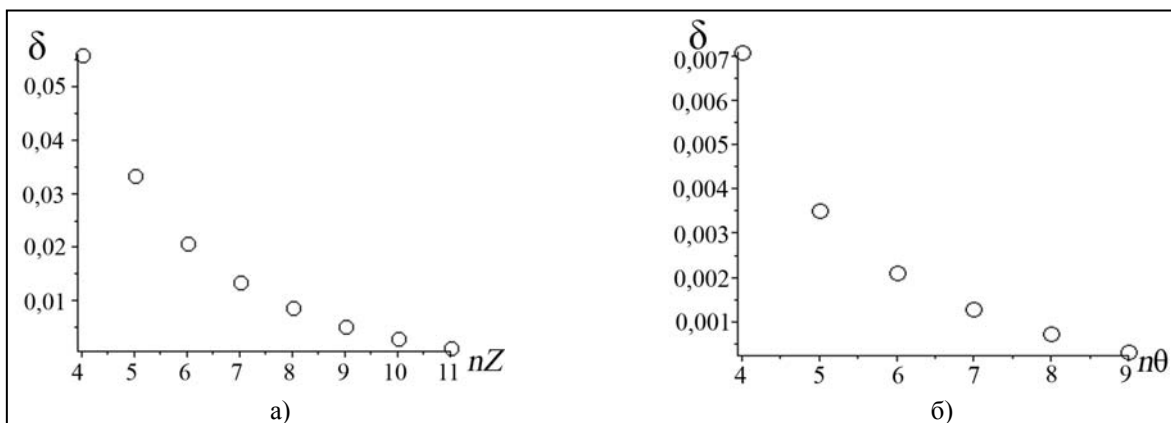


Рис. 4. Относительная погрешность решения:

а) – число участков разбиения вдоль оси θ принималось равным 7, а число участков разбиения вдоль оси z менялось; б) – число участков разбиения вдоль оси z принималось равным 7, а число участков разбиения вдоль оси θ менялось

сходимость к точному решению. Теперь число элементов разбиения вдоль оси z фиксировалось равным 7, а число элементов вдоль оси θ менялось от четырех до девяти. После проведения конечноэлементных расчетов определялась относительная погрешность из уравнения (10). Результаты расчетов приводятся на рис. 4, б. Итак, полученные результаты демонстрируют быструю сходимость решений к точному.

Исследовалась сходимость решений метода конечных элементов при увеличении числа членов в укороченном ряде Тейлора (5). Область масляной пленки разбивалась на 20 конечных элементов. Производились численные расчеты с учетом различных степеней в (5). Для полученных решений считалась относительная погрешность по формуле (10). Результаты расчетов представлены на рис. 5.

Выводы

Число конечных элементов, на которые разбивается область масляной пленки, существенно не влияет на точность решения. Для получения результатов с достаточной степенью точности необходимо небольшое число конечных элементов разбиения. Однако число слагаемых в степенном ряде, описывающем давление, оказывает существенное влияние на точность результатов. Подчеркнем, что при малом количестве слагаемых в степенном ряде погрешность решения может достигать 70%.

В результате конечноэлементного расчета получается функция давления в масляной пленке, которая выражается в виде степенных рядов относительно перемещений и скоростей цапф.

Эта функция может использоваться при численном анализе нелинейной динамики роторных систем.

Литература

1. Коровчинский М. В. Теоретические основы работы подшипников скольжения. – М.: МАШГИЗ, 1959. – 404 с.
2. Олимпиев В. И. О собственных частотах ротора на подшипниках скольжения // Изд. АН СССР, ОТН. – 1960. – № 3. – С. 24–29.
3. Позняк Э. Л. Неустойчивые колебания роторов на подшипниках скольжения // Динамика гибких роторов. – М.: Наука, 1972. – С. 22–29.
4. Каринцев И. Б. Статические и динамические характеристики масляной пленки ко-

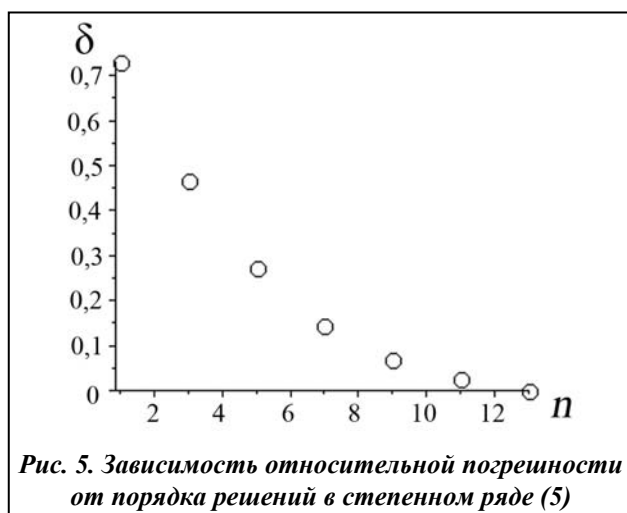


Рис. 5. Зависимость относительной погрешности от порядка решений в степенном ряде (5)

- ротких подшипников скольжения / И. Б. Каринцев, Н. Г. Шульженко // Динамика и прочность машин. – 1972. – Вып. 16. – С. 14–18.
5. Темис М. Ю. Расчет статических и динамических коэффициентов подшипника скольжения с учетом деформативности его рабочих поверхностей // Вестн. Гомель. техн. ун-та им. П. О. Сухого. – 2004. – № 4. – С. 25–32.
 6. Зинкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зинкевич, К. Морган. – М.: Мир, – 1986. – 318 с.
 7. Коннор Дж. Метод конечных элементов в механике жидкости / Дж. Коннор, К. Бреббия. – Л.: Судостроение, 1979. – 264 с.
 8. Аврамов К. В. Нелинейные нормальные формы автоколебаний однодискового несимметричного ротора в двух коротких подшипниках скольжения // Пробл. прочности. – 2010. – № 4. – С. 130–144.
 9. Аврамов К. В. Нелинейная динамика упругих систем. Т.1. Модели, методы, явления / К. В. Аврамов, Ю. В. Михлин. – М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Ин-т компьютер. исследований, 2010. – 704 с.

Поступила в редакцию
27.05.11

УДК 621.031.50

А. Е. Божко, чл.-кор. НАН Украины
К. Б. Мягкохлеб, канд. техн. наук

Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины
(г. Харьков, e-mail: bozhko@ipmach.kharkov.ua)

ФОРМИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВИБРАЦИЙ НА ОСНОВЕ СОВМЕСТНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОБОБЩЕННОГО РЯДА ФУРЬЕ И РЯДА КОТЕЛЬНИКОВА

Предлагается метод определения случайной функции вибрации на основе совместного использования для ее представления обобщенного ряда Фурье и ряда Котельникова. Метод основан на соединении приближений имитационных вибраций к эксплуатационным по плотности вероятностей амплитуд ускорений и по спектральной плотности.

Пропонується метод визначення випадкової функції вібрації на основі спільного використання для її подання узагальненого ряду Фур'є та ряду Котельникова. Метод ґрунтується на з'єднанні наближень імітаційних вібрацій до експлуатаційних по щільності ймовірностей амплітуд прискорень і по спектральній щільності.

Введение

В практике вибрационных испытаний машин и приборов большое внимание уделяется созданию индивидуальных условий испытания, соответствующих конкретному назначению работы испытываемого объекта. В этом случае хорошо может себя зарекомендовать метод воспроизведения кривых записей эксплуатационных вибраций, который включает соединение приближений имитационных вибраций к эксплуатационным по плотности вероятностей амплитуд ускорений и по спектральной плотности.

Основная часть

Для воспроизведения случайных вибраций в задачах вибрационных испытаний объектов необходимо сформировать реализации случайных управлений вибровозбудителями испытательных стендов в виде определенных детерминированных совокупностей случайных величин. Получение случайных функций управления вибровозбудителями базируется на использовании различных представлений случайных функций, например, в виде обобщенных рядов Фурье [1] и рядов Котельникова [2]. В работе [3] эти представления рассмотрены