

УДК 536.24

А. П. Слесаренко*, д-р фіз.-мат наук**А. О. Костіков***, **, д-р техн. наук**Н. О. Сафонов***, канд фіз.-мат наук* Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України
(м. Харків, e-mail: kostikov@ipmach.kharkov.ua)

** Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

**ШВИДКЕ ВІДНОВЛЕННЯ ТЕПЛОВИХ НАВАНТАЖЕНЬ
МЕТОДОМ СПЕКТРАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ВПЛИВУ**

Запропоновано нову методику ідентифікації теплових потоків та коефіцієнта тепло-віддачі на границі розрахункової області складної форми в реальному масштабі часу за експериментальними даними. Методика ґрунтується на використанні регіональних спектральних функцій впливу та поетапному збільшенні числа регіонів, на які розбивається розрахункова область, і, як наслідок цього, ділянок, з яких складається границя, де відбувається відновлення теплових навантажень.

Предложена новая методика идентификации тепловых потоков и коэффициента теплоотдачи на границе расчётной области сложной формы в реальном масштабе времени по экспериментальным данным. Методика основывается на использовании региональных спектральных функций влияния и поэтапном увеличении числа регионов, на которые разбивается расчётная область, и, как следствие этого, участков, из которых состоит граница, где происходит восстановление тепловых нагрузок.

Вступ

Інструментарій розв'язання обернених задач широко застосовується під час практичних досліджень. Наприклад, проектування нового, діагностику та модернізацію існуючого енергетичного обладнання, радіоелектронних приладів та іншого устаткування на сучасному рівні неможливо виконати без проведення ідентифікації та оптимізації теплових процесів та інших процесів переносу, тобто застосовуючи методологію розв'язання обернених задач теплообміну (ОЗТ).

Сучасний рівень проведення досліджень теплофізичних процесів висуває жорсткі вимоги до їх якості. При цьому досить часто вимоги є конкуруючими, і безумовне виконання однієї може призвести до знехтування іншої. Найпоширенішою ситуацією є необхідність проведення розрахунків, з однієї сторони, з досить високою точністю, а з іншої – досить швидко, в ідеалі – у режимі реального часу.

Одним з ефективних методів розв'язання ОЗТ є метод спектральних функцій впливу [1–3], в якому шукану умову однозначності u подають у вигляді лінійної комбінації відомих базисних функцій φ_i , так званих спектральних складових, з невідомими коефіцієнтами c_i

$$u = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i . \quad (1)$$

Подання температурного поля у вигляді

$$T = W_0 + \sum_{i=1}^N c_i W_i , \quad (2)$$

де W_0 – розв'язок відповідної прямої задачі теплопровідності (ПЗТ) із неоднорідними відомими умовами однозначності та однорідними умовами, що ідентифікуються, а W_i – так звані спектральні функції впливу, тобто температурний відгук на одиничну спектральну складову φ_i за умови однорідних відомих умов однозначності, дозволяє за наявності інформації про

виміри температури в деяких точках звести ОЗТ до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь для пошуку невідомих коефіцієнтів c_i у виразі (1).

Подання умови однозначності, що ідентифікується, у вигляді (1) хоча і дає можливість будувати швидкі алгоритми ідентифікації, які здатні працювати у реальному режимі часу [4], тим не менше може призвести до проблем з точністю розв'язку ОЗ.

Наприклад, якщо використовувати варіаційний або інший проєкційний метод, для отримання спектральних функцій впливу W_i необхідно будувати структуру розв'язку ПЗТ, яка точно задовольняє граничні умови у вигляді формули

$$\phi = \sum_{l=1}^n C_l X_l + \phi_0, \quad (3)$$

невідомі коефіцієнти C_l в якій підбираються виходячи з умови мінімізації функціонала варіаційної задачі [5]. Для областей практично будь-якої форми базисні функції X_l в структурі (3) можна побудувати за допомогою методу R-функцій [6]. Проте досить часто у випадку розгляду областей складної форми такий підхід може призвести до нефізичності у розв'язку внаслідок штучного нав'язування впливу віддалених ділянок границі.

За допомогою використання сіткових методів вищезазначеної проблеми можна уникнути, однак у цьому випадку стає проблематичною побудова швидкого алгоритму ідентифікації, оскільки кожна зі спектральних функцій впливу являє собою великий масив числових даних, на обробку якого необхідно витратити досить багато комп'ютерних ресурсів.

Таким чином, виникає необхідність в проведенні робіт з розвитку методології розв'язання ОЗТ щодо розробки нових підходів та побудови алгоритмів, які б, з одного боку, давали розв'язок з достатньою точністю, а з іншого – були б швидкими, щоб їх можна було застосовувати у системах, які працюють у режимі реального часу.

1. Регіональні спектральні функції впливу

У зв'язку з вищевикладеним під час побудови структури розв'язку типу (3) доцільно використовувати регіонально-структурний підхід [7, 8], який дозволяє уникнути нав'язування нефізичного впливу локальних граничних впливів на всю розрахункову область. Крім того, замість R-функцій доцільно використовувати S-функції [9], завдяки яким вдається побудувати рівняння області $(\omega(x, y, z))_{\Gamma} = 0$; $\omega(x, y, z) > 0$, $(x, y, z) \in \Omega$, в якому функція ω є неперервно диференційованою і має неперервні й обмежені похідні. Це дозволяє вперше будувати консервативні регіонально-аналітичні структури розв'язку прямих і обернених задач теплопровідності

Розрахункова область Ω розбивається на декілька регіонів Ω_i так, щоб їх конфігурація була опуклою і по можливості порівняно простою.

Для кожного з регіонів окремо будується структура розв'язку типу (3) таким чином, щоб точно виконувалися не тільки граничні умови, але й умови сполучення на границях контактів регіонів. При цьому простота конфігурації окремих регіонів забезпечує достатню простоту структур розв'язків для кожного з них.

За допомогою такої процедури з'являється можливість у виразі (1) використовувати фінітні спектральні складові впливу, носій кожній з яких відповідає тому чи іншому регіону. Наприклад, у разі, якщо u – вільний член рівняння в прямій задачі чи інша умова однозначності з областю визначення у всій розрахунковій області Ω , то як спектральні складові ϕ_i логічно обрати функції, носій кожної з яких складається з регіону Ω_i і (за необхідності дотримання гладкості функції u) сусідніх з ним регіонів. Якщо ж u – граничні дані, то частина границі Γ , на якій вони визначені, подається у вигляді ділянок Γ_i , що не пересікаються одна з іншою і кожна з яких відповідає одному з регіонів Ω_i .

У цьому випадку як спектральні складові ϕ_i можна взяти функції, носій кожної з яких складається з ділянки Γ_i і (за необхідності дотримання гладкості функції u) сусідніх з ним ділянок.

Найчастіше в обох вищезазначених випадках доцільно як φ_i використовувати сплайни.

Перепишемо (1) у вигляді

$$u = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{N_k} c_i^{(k)} \varphi_i^{(k)}, \quad (4)$$

де m – число регіонів; N_k – число спектральних складових, які відповідають k -му регіону; $\varphi_i^{(k)}$ ($i = 1, 2, \dots, N_k$) – регіональні спектральні складові умови однозначності u в k -му регіоні, для кожної з котрих можна знайти регіональну спектральну функцію впливу $W_i^{(k)}$, розв'язавши відповідну ПЗТ.

Як наслідок отримаємо, що під час використання регіональних спектральних функцій впливу в ОЗТ невідомі коефіцієнти $c_i^{(k)}$ у виразі (4) можуть бути знайдені як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь розмірності $N_1 + N_2 + \dots + N_m$. На практиці, якщо в кожному з регіонів умова однозначності u має однотипний характер зміни, для досягнення прийнятної точності розв'язку з використанням найменшого числа спектральних функцій впливу доцільно приймати $N_1 = N_2 = \dots = N_m$.

Зазначимо, що за рахунок використання декількох регіонів вдається отримати розв'язок ОЗТ з достатньою точністю при відносно невеликому числі спектральних складових N_k в кожному регіоні. Таким чином усуваються непотрібні коливальні складові в розв'язку, які можуть виникнути в разі використання поліномів високих ступенів в розкладанні (1).

Крім того, зменшення числа параметрів $c_i^{(k)}$, що ідентифікуються, в кожному регіоні покращує обумовленість задачі, тобто є додатковим регуляризуючим фактором під час розв'язання некоректних задач математичної фізики, до числа яких належать ОЗТ. У зв'язку з цим розбивку розрахункової області на регіони слід проводити не тільки виходячи із специфіки її геометрії, але й з метою зменшення ступеня апроксимуючого полінома (4) в межах кожного регіону за рахунок збільшення їх кількості. Іншими словами, використання регіональних спектральних функцій впливу дозволяє вирішити проблему прояви нестійкості ОЗТ при підвищенні точності розв'язку.

2. Швидке відновлення теплових навантажень

Для використання на практиці підходу, який викладено вище, під час побудови швидких алгоритмів відновлення теплових навантажень необхідно задатися числом регіонів m , на які розбивається область Ω . При цьому використання невеликого числа регіонів призведе до низької точності розв'язку, а використання дуже великої кількості сповільнить обчислювальний процес. Вихід з даної ситуації полягає в послідовному збільшенні числа регіонів m . Отже, можна сформулювати такий алгоритм:

1. Обрання початкового значення m .
2. Розбиття розрахункової області Ω на m регіонів.
3. Побудова базисних функцій X_l і вільного члена ϕ_0 у виразах типу (3).
4. Виділення спектральних складових $\varphi_i^{(k)}$ в умові однозначності, що ідентифікуються.
5. Розрахунок спектральної функції впливу $W_i^{(k)}$ для кожної зі спектральних складових $\varphi_i^{(k)}$.
6. Знаходження коефіцієнтів $c_i^{(k)}$ у виразі (4) шляхом розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
7. Перевірка умови зупинення. Якщо вона не виконана, то збільшення числа m і перехід до кроку 2.

Як критерій зупинення ітераційного алгоритму можна прийняти умову

$$\|u_{(l)} - u_{(l-1)}\| \leq \epsilon, \quad (5)$$

де $u_{(l)}$ – умова однозначності, яку знайдено на поточній ітерації; $u_{(l-1)}$ – умова однозначності, яку знайдено на попередній ітерації; ϵ – задана похибка ідентифікації.

Для того щоб викладений алгоритм міг працювати в режимі реального часу, скористаємося особливістю методу спектральних функцій впливу, яка полягає в тому, що самі спектральні функції впливу $W_i^{(k)}$ не залежать від значень ідентифікованих умов однозначності, чи то граничні дані, чи внутрішні джерела. Таким чином, і спектральні складові $\varphi_i^{(k)}$, і спектральні функції впливу $W_i^{(k)}$ можуть бути знайдені до початку роботи обчислювальної системи в режимі реального часу. Для цього необхідно лише задатися максимально можливим числом регіонів m_{\max} і способом розбиття розрахункової області на регіони для будь-якого $m \leq m_{\max}$. У деяких випадках доцільно розглядати не всі значення m , менші або рівні m_{\max} , а лише ті, які підходять з міркувань раціонального розбиття розрахункової області на регіони. Наприклад, якщо область Ω має квадратну форму й ідентифікується питома потужність внутрішніх джерел, то логічно розбивати Ω на квадратні регіони однакового розміру. У цьому випадку m може приймати лише значення з множини $\{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$.

На основі вищевикладеного алгоритм швидкого відновлення теплових навантажень, що здатний працювати в режимі реального часу, можна сформулювати таким чином.

1. Вибір значення m_{\max} , визначення множини можливих значень m .
2. Завдання як m найменшого з усіх його можливих значень.
3. Розбиття розрахункової області Ω на m регіонів.
4. Побудова базисних функцій X_i і вільного члена ϕ_0 у виразах типу (3).
5. Виділення спектральних складових $\varphi_i^{(k)}$ в умові однозначності, що ідентифікується.
6. Розрахунок спектральної функції впливу $W_i^{(k)}$ для кожної зі спектральних складових $\varphi_i^{(k)}$.
7. Якщо $m < m_{\max}$, то обрання як m наступного з його можливих значень і перехід до кроку 3.
8. Вибір початкового значення m .
9. Знаходження коефіцієнтів $c_i^{(k)}$ у виразі (4) шляхом розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
10. Перевірка умови зупинення (наприклад, (5)). Якщо вона не виконана, то збільшення числа m і перехід до кроку 9.

Кроки 1–8 виконуються на попередньому етапі роботи системи, а кроки 9–10 – у режимі реального часу. При цьому необхідно забезпечити зберігання в пам'яті всіх функцій $\varphi_i^{(k)}$ та $W_i^{(k)}$, які знайдено на етапах 1–8 для кожного значення m . Через те що даний алгоритм орієнтований на застосування варіаційних, а не сіткових методів для розв'язання ПЗТ, базу даних спектральних функцій $W_i^{(k)}$ можна організувати у вигляді сховища коефіцієнтів C_i , що фігурують у виразах типу (3). Аналогічно і функції $\varphi_i^{(k)}$ можна подати у вигляді комбінації наперед відомих базисних функцій з деякими коефіцієнтами і зберігати тільки останні.

Зауважимо, що попередній етап (кроки 1–8) допускає дворівневе розпаралелювання, що дозволяє скоротити час розрахунку. Так, всі обчислення, що відбуваються на кроках 3–6 для будь-якого значення m , жодним чином не залежать від отриманих результатів для менших значень m . Крім того, на кроці 6 обчислення кожної спектральної функції впливу $W_i^{(k)}$ може бути проведено незалежно від розрахунків іншої спектральної функції впливу.

3. Швидка ідентифікація граничних теплових навантажень

Перевіримо працездатність методики на тестових модельних задачах, в яких необхідно відновити умови теплообміну на границі розрахункової області.

Розглянемо двовимірну задачу теплопровідності в прямокутній області Ω з граничними умовами третього роду на її границі (рис. 1)

$$\Delta T = -F, \quad (x, y) \in \Omega = [0, a] \times [0, b]. \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \text{Bi}_1(y)T \right) \Big|_{\Gamma_1} &= \text{Bi}_1(y)T_{\text{ср1}}(y), \\ \left(\frac{\partial T}{\partial y} + \text{Bi}_2(x)T \right) \Big|_{\Gamma_2} &= \text{Bi}_2(x)T_{\text{ср2}}(x), \\ \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \text{Bi}_3(y)T \right) \Big|_{\Gamma_3} &= \text{Bi}_3(y)T_{\text{ср3}}(y), \\ \left(\frac{\partial T}{\partial y} + \text{Bi}_4(x)T \right) \Big|_{\Gamma_4} &= \text{Bi}_4(x)T_{\text{ср4}}(x), \end{aligned} \tag{7}$$

де $T = T(x, y)$ – температура; F – вільний член рівняння теплопровідності; Γ_i ($i = 1, \dots, 4$) – сторони прямокутника; Bi_i та $T_{\text{ср}i}$ – критерій Біо та температура навколишнього середовища на стороні Γ_i .

Зауважимо, така постановка не звужує коло задач, що розглядаються, до стаціонарного випадку, оскільки для нестационарного процесу рівняння (6) та (7) можна записати для кожного t -го часового шару, застосувавши неявну різницеву схему. При цьому в кожній t -й задачі величини T , F , Bi_i та $T_{\text{ср}i}$ будуть залежати ще й від параметра Fo_t – числа Фур'є для цього часового шару ($t = 1, 2, \dots, N_{\text{Fo}}$). Далі для стислості викладок залежність від числа Фур'є будемо опускати.

Нехай параметри теплообміну Bi_i та $T_{\text{ср}i}$ на границях $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_4$ відомі, а на границі Γ_2 їх треба ідентифікувати за температурними даними в точках (x_j, y_j) ($j = 1, 2, \dots, M$).

Досить часто температуру навколишнього середовища можна виміряти безпосередньо, тому будемо розглядати ОЗ з ідентифікації розподілу теплового потоку на Γ_2 , тобто замість другого рівняння в (7) будемо розглядати граничну умову другого роду (функція $q_2(x)$ – тепловий потік з точністю до множника, якій дорівнює коефіцієнту теплопровідності)

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{\Gamma_2} = q_2(x).$$

Якщо знайти $q_2(x)$, досить легко отримати $\text{Bi}_2(x)$

$$\text{Bi}_2(x) \Big|_{\Gamma_2} = \frac{q_2(x) \Big|_{\Gamma_2}}{T_{\text{ср2}}(x) - T(x) \Big|_{\Gamma_2}}.$$

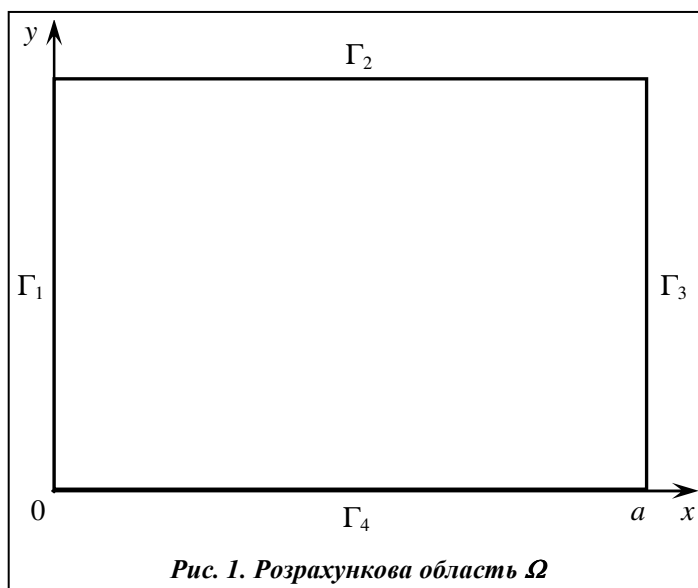


Рис. 1. Розрахункова область Ω

Розв'язання ОЗ з ідентифікації $q_2(x)$ цієї задачі будемо проводити згідно з алгоритмом, який викладено вище.

Для того щоб забезпечити розбиття границі Γ_2 на ділянки, розіб'ємо розрахункову область на прямокутні регіони однакового розміру, які простираються наскрізь у напрямку Oy . В ітераційному процесі використовуємо лише непарну кількість регіонів і відповідно непарну кількість ділянок границі $m \in \{1, 3, 5, \dots\}$ (рис. 2).

На кожній m -й ітерації завдяки введенню в розрахунковій області регіонів границя Γ_2 розби-

вається на m ділянок $a_{k-1} \leq x \leq a_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$), $a_k = k \cdot a/m$, $a_0 = 0$, $a_m = a$. В межах кожної k -ї ділянки Γ_2 шукану функцію $q_2(x)$ розкладемо в лінійну комбінацію за відомими базисними функціями $\phi_i^{(k)}(x)$ з невідомими коефіцієнтами $c_i^{(k)}$

$$q_2^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{N_k} c_i^{(k)} \phi_i^{(k)}(x), \quad (8)$$

де $q_2^{(k)}$ – тепловий потік на k -й ділянці границі Γ_2 ; $c_i^{(k)}$ – шукані коефіцієнти.

Згідно з (2) розв’язок задачі (6), (7) можна подати у вигляді

$$T(x, y) = W_0(x, y) + \sum_{i=1}^{N_k} c_i^{(k)} W_i^{(k)}(x, y). \quad (9)$$

Побудову структур розв’язків ПЗТ, які дозволяють знайти спектральні функції впливу $W_i^{(k)}$ для кожної спектральної складової, а також функцію W_0 , що враховує вплив неоднорідних граничних умов на $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_4$, будемо здійснювати за допомогою регіонально-структурного методу [6, 7]. Для цього необхідно розв’язати

$1 + \sum_{k=1}^m N_k$ ПЗТ: першу – з однорідними граничними умовами на Γ_2 і неоднорідними на $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_4$, а інші – з однорідними граничними умовами на $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_4$ і неоднорідним на Γ_2 для кожної спектральної складової.

На першій ітерації, коли розрахункова область не поділена на регіони ($m = 1$), структура розв’язку кожної ПЗТ може бути побудована як [8]

$$T_i = \frac{\frac{T_{1,i}}{\omega_1^2} + \frac{T_{2,i}}{\omega_2^2} + \frac{T_{3,i}}{\omega_3^2} + \frac{T_{4,i}}{\omega_4^2}}{\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2} + \frac{1}{\omega_4^2}}, \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} T_{1,i} &= T_{cp1,i}(y) + \Phi - \omega_1 D_1^{(1)} \Phi + \omega_1 Bi_1(y) \Phi, \\ T_{2,i} &= q_{2,i}(x) - \omega_2 q_{2,i}(x) + \Phi - \omega_2 D_1^{(2)} \Phi, \\ T_{3,i} &= T_{cp3,i}(y) + \Phi - \omega_3 D_1^{(3)} \Phi + \omega_3 Bi_3(y) \Phi, \\ T_{4,i} &= T_{cp4,i}(x) + \Phi - \omega_4 D_1^{(4)} \Phi + \omega_4 Bi_4(x) \Phi, \end{aligned} \quad (11)$$

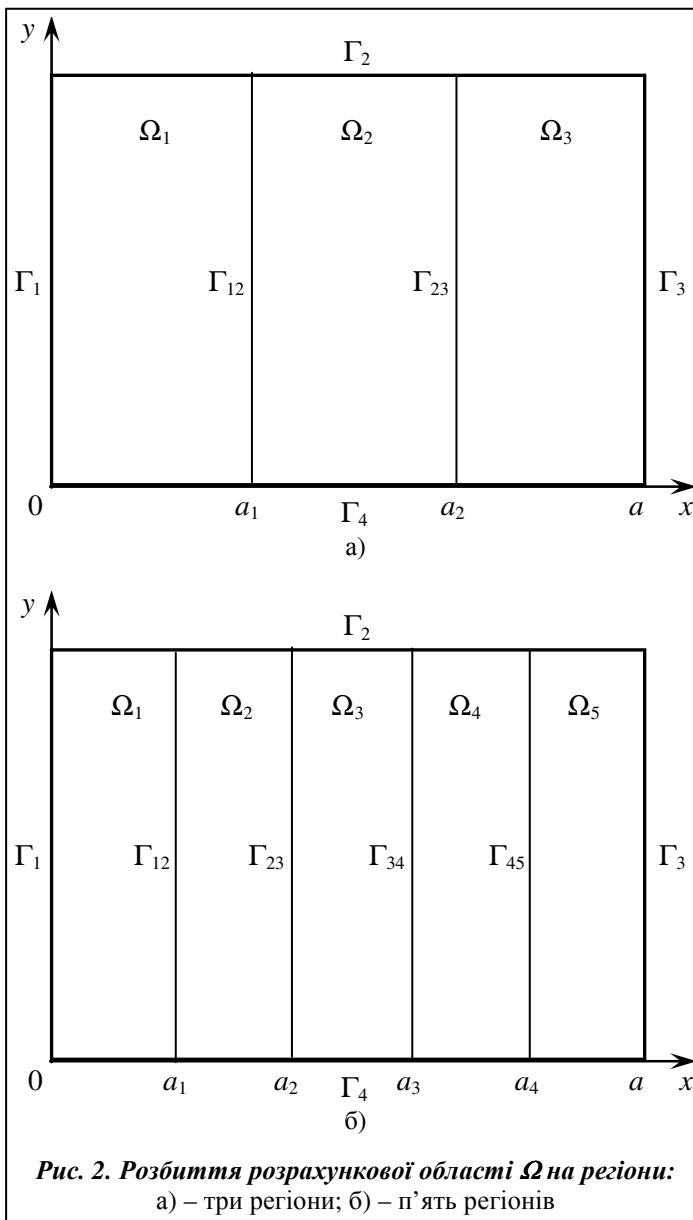


Рис. 2. Розбиття розрахункової області Ω на регіони: а) – три регіони; б) – п’ять регіонів

$$q_{2,i}(x) = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ \varphi_i(x), & i \geq 1, \end{cases}$$

$$T_{\text{cps},i}(\cdot) = \begin{cases} T_{\text{cps}}(\cdot), & i = 0 \\ 0, & i \geq 1, \end{cases} \quad s = 1,3,4,$$

функції ω_i – нормалізовані до першого порядку (див. [6]) функції, що описують відповідні сторони прямокутника Γ_s ($s = 1, 2, 3, 4$)

$$\begin{aligned} \omega_1 &= x, \\ \omega_2 &= b - y, \\ \omega_3 &= a - x, \\ \omega_4 &= y, \end{aligned} \tag{12}$$

оператори $D_1^{(s)}$ визначаються виразами

$$D_1^{(s)} = \frac{\partial \omega_s}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega_s}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}, \tag{13}$$

а невідома компонента структури Φ подається у вигляді лінійної комбінації відомих базисних функцій з невідомими коефіцієнтами, наприклад

$$\Phi = \sum_{p,q} C_{pq} P_p(x) Q_q(y), \tag{14}$$

де $P_p(x)$ – поліноми Чебишева, що нормовані на інтервалі $[0, a]$; $Q_q(y)$ – на інтервалі $[0, b]$.

Невідомі коефіцієнти C_{pq} знаходяться за допомогою розв'язання задачі для рівняння (6) варіаційним методом, наприклад методом Рітца.

На другій ітерації, коли розрахункова область поділена на три регіони ($m = 3$), для кожного з них записується аналог рівняння (6)

$$\Delta T^{(k)} = -F^{(k)}, \quad (x, y) \in \Omega_k = [a_{k-1}, a_k] \times [0, b]. \tag{15}$$

де $k = 1, 2, 3$ – номер регіону.

У кожному регіоні розглядається своя структура розв'язку, яка задовольняє граничні умови (7) на ділянках границь $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$, що відповідають цьому регіону, та умови сполучення на границях розподілу регіонів $\Gamma_{k,k+1}$

$$\begin{aligned} T^{(k)} \Big|_{\Gamma_{k,k+1}} &= T^{(k+1)} \Big|_{\Gamma_{k,k+1}}, \\ \frac{\partial T^{(k)}}{\partial x} \Big|_{\Gamma_{k,k+1}} &= \frac{\partial T^{(k+1)}}{\partial x} \Big|_{\Gamma_{k,k+1}}, \end{aligned} \tag{16}$$

де $k = 1, 2$.

В кожному з регіонів структура розв'язку ПЗТ може бути побудована як [8]

$$\begin{aligned} T_i^{(1)} &= \frac{\frac{T_{1,i}^{(1)}}{\omega_1^2} + \frac{T_{2,i}^{(1)}}{\omega_2^2} + \frac{\Phi_1}{\omega_{12}^2} + \frac{T_{4,i}^{(1)}}{\omega_4^2}}{\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_{12}^2} + \frac{1}{\omega_4^2}}, & T_i^{(2)} &= \frac{\frac{\Phi_1}{\omega_{12}^2} + \frac{T_{2,i}^{(2)}}{\omega_2^2} + \frac{\Phi_2}{\omega_{23}^2} + \frac{T_{4,i}^{(2)}}{\omega_4^2}}{\frac{1}{\omega_{12}^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_{23}^2} + \frac{1}{\omega_4^2}}, \\ T_i^{(3)} &= \frac{\frac{\Phi_2}{\omega_{23}^2} + \frac{T_{2,i}^{(3)}}{\omega_2^2} + \frac{T_{3,i}^{(3)}}{\omega_3^2} + \frac{T_{4,i}^{(3)}}{\omega_4^2}}{\frac{1}{\omega_{23}^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2} + \frac{1}{\omega_4^2}}, \end{aligned} \tag{17}$$

де

$$\begin{aligned}
 T_{1,i}^{(1)} &= T_{cp1,i}(y) + \Phi_1 - \omega_1 D_1^{(1)} \Phi_1 + \omega_1 Bi_1(y) \Phi_1, \\
 T_{2,i}^{(1)} &= q_{2,i}^{(1)}(x) - \omega_2 q_{2,i}^{(1)}(x) + \Phi_1 - \omega_2 D_1^{(2)} \Phi_1, \\
 T_{4,i}^{(1)} &= T_{cp4,i}(x) + \Phi_1 - \omega_4 D_1^{(4)} \Phi_1 + \omega_4 Bi_4(x) \Phi_1, \\
 T_{2,i}^{(2)} &= q_{2,i}^{(2)}(x) - \omega_2 q_{2,i}^{(2)}(x) + \Phi_1 + \Phi_2 - \omega_2 D_1^{(2)} [\Phi_1 + \Phi_2], \\
 T_{4,i}^{(2)} &= T_{cp4,i}(x) + \Phi_1 + \Phi_2 - \omega_4 D_1^{(4)} [\Phi_1 + \Phi_2] + \omega_4 Bi_4(x) [\Phi_1 + \Phi_2], \\
 T_{2,i}^{(3)} &= q_{2,i}^{(3)}(x) - \omega_2 q_{2,i}^{(3)}(x) + \Phi_2 - \omega_2 D_1^{(2)} \Phi_2, \\
 T_{3,i}^{(3)} &= T_{cp3,i}(y) + \Phi_2 - \omega_3 D_1^{(3)} \Phi_2 + \omega_3 Bi_3(y) \Phi_2, \\
 T_{4,i}^{(3)} &= T_{cp4,i}(x) + \Phi_2 - \omega_4 D_1^{(4)} \Phi_2 + \omega_4 Bi_4(x) \Phi_2,
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

$$q_{2,i}^{(k)}(x) = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ \varphi_i^{(k)}(x), & i \geq 1, \end{cases} \quad k = 1, 2, 3,$$

$$T_{cps,i}(\cdot) = \begin{cases} T_{cps}(\cdot), & i = 0 \\ 0, & i \geq 1, \end{cases} \quad s = 1, 3, 4,$$

функції ω_s ($s = 1, 2, 3, 4$) визначаються виразами (12); функції $\omega_{k,k+1}$ – нормалізовані до першого порядку функції, що описують границі розподілу регіонів $\Gamma_{k,k+1}$ ($k = 1, 2$)

$$\omega_{k,k+1} = \pm(a_k - x), \tag{19}$$

при цьому їх знак визначається таким чином, щоб вони були позитивними у тому регіоні, для якого записана структура (17); оператори $D_1^{(s)}$ визначаються виразами (13); а невідомі компоненти структур Φ_i ($i = 1, 2$) подаються вигляді лінійної комбінації відомих базисних функцій з невідомими коефіцієнтами, наприклад

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= \sum_{p,q} C_{pq}^{(1)} P_p^{(1)}(x) Q_q(y); \\
 \Phi_2 &= \sum_{p,q} C_{pq}^{(2)} P_p^{(2)}(x) Q_q(y),
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

де $P_p^{(1)}(x)$ – поліноми Чебишева, що нормовані на інтервалі $[0, a_2]$, $P_p^{(2)}(x)$ – на інтервалі $[a_1, a]$, $Q_q(y)$ – на інтервалі $[0, b]$.

Для кожного з рівнянь (15) записується відповідна варіаційна задача, згідно з методом Рітца або іншим варіаційним методом. Мінімізація суми цих трьох функціоналів дозволяє знайти невідомі коефіцієнти $C_{pq}^{(k)}$.

На третій ітерації, коли розрахункова область поділена на п'ять регіонів ($m = 5$), для кожного з них, як і на попередній ітерації, записується рівняння (15) з тією різницею, що ми тепер маємо 5 таких рівнянь ($k = 1, 2, \dots, 5$). У кожному регіоні розглядається своя структура розв'язку, яка задовольняє граничні умови (7) на ділянках границь $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$, що відповідають цьому регіону, та умови сполучення на границях розподілу регіонів (16), яких в цьому випадку чотири ($k = 1, 2, 3, 4$).

В кожному з регіонів структура розв'язку ПЗТ може бути побудована як [8]

$$T^{(1)} = \frac{\frac{T_{1,i}^{(1)}}{\omega_1^2} + \frac{T_{2,i}^{(1)}}{\omega_2^2} + \frac{\Phi_1}{\omega_{12}^2} + \frac{T_{4,i}^{(1)}}{\omega_4^2}}{\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_{12}^2} + \frac{1}{\omega_4^2}}, \quad T^{(2)} = \frac{\frac{\Phi_1}{\omega_{12}^2} + \frac{T_{2,i}^{(2)}}{\omega_2^2} + \frac{\Phi_2}{\omega_{23}^2} + \frac{T_{4,i}^{(2)}}{\omega_4^2}}{\frac{1}{\omega_{12}^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_{23}^2} + \frac{1}{\omega_4^2}},$$

$$T^{(3)} = \frac{\frac{\Phi_2}{\omega_{23}^2} + \frac{T_{2,i}^{(3)}}{\omega_2^2} + \frac{\Phi_3}{\omega_{34}^2} + \frac{T_{4,i}^{(3)}}{\omega_4^2}}{\frac{1}{\omega_{23}^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_{34}^2} + \frac{1}{\omega_4^2}}, \quad T^{(4)} = \frac{\frac{\Phi_3}{\omega_{34}^2} + \frac{T_{2,i}^{(4)}}{\omega_2^2} + \frac{\Phi_4}{\omega_{45}^2} + \frac{T_{4,i}^{(4)}}{\omega_4^2}}{\frac{1}{\omega_{34}^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_{45}^2} + \frac{1}{\omega_4^2}}, \quad (21)$$

$$T^{(5)} = \frac{\frac{\Phi_4}{\omega_{45}^2} + \frac{T_{2,i}^{(5)}}{\omega_2^2} + \frac{T_{3,i}^{(5)}}{\omega_3^2} + \frac{T_{4,i}^{(5)}}{\omega_4^2}}{\frac{1}{\omega_{45}^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2} + \frac{1}{\omega_4^2}},$$

де

$$\begin{aligned} T_{1,i}^{(1)} &= T_{cp1,i}(y) + \Phi_1 - \omega_1 D_1^{(1)} \Phi_1 + \omega_1 Bi_1(y) \Phi_1, \\ T_{2,i}^{(1)} &= q_{2,i}^{(1)}(x) - \omega_2 q_{2,i}^{(1)}(x) + \Phi_1 - \omega_2 D_1^{(2)} \Phi_1, \\ T_{4,i}^{(1)} &= T_{cp4,i}(x) + \Phi_1 - \omega_4 D_1^{(4)} \Phi_1 + \omega_4 Bi_4(x) \Phi_1, \\ T_{2,i}^{(2)} &= q_{2,i}^{(2)}(x) - \omega_2 q_{2,i}^{(2)}(x) + \Phi_1 + \Phi_2 - \omega_2 D_1^{(2)} [\Phi_1 + \Phi_2], \\ T_{4,i}^{(2)} &= T_{cp4,i}(x) + \Phi_1 + \Phi_2 - \omega_4 D_1^{(4)} [\Phi_1 + \Phi_2] + \omega_4 Bi_4(x) [\Phi_1 + \Phi_2], \\ T_{2,i}^{(3)} &= q_{2,i}^{(3)}(x) - \omega_2 q_{2,i}^{(3)}(x) + \Phi_2 + \Phi_3 - \omega_2 D_1^{(2)} [\Phi_2 + \Phi_3], \\ T_{4,i}^{(3)} &= T_{cp4,i}(x) + \Phi_2 + \Phi_3 - \omega_4 D_1^{(4)} [\Phi_2 + \Phi_3] + \omega_4 Bi_4(x) [\Phi_2 + \Phi_3], \\ T_{2,i}^{(4)} &= q_{2,i}^{(4)}(x) - \omega_2 q_{2,i}^{(4)}(x) + \Phi_3 + \Phi_4 - \omega_2 D_1^{(2)} [\Phi_3 + \Phi_4], \\ T_{4,i}^{(4)} &= T_{cp4,i}(x) + \Phi_3 + \Phi_4 - \omega_4 D_1^{(4)} [\Phi_3 + \Phi_4] + \omega_4 Bi_4(x) [\Phi_3 + \Phi_4], \\ T_{2,i}^{(5)} &= q_{2,i}^{(5)}(x) - \omega_2 q_{2,i}^{(5)}(x) + \Phi_4 - \omega_2 D_1^{(2)} \Phi_4 \\ T_{2,i}^{(5)} &= T_{cp3,i}(y) + \Phi_4 - \omega_3 D_1^{(3)} \Phi_4 + \omega_3 Bi_3(y) \Phi_y, \\ T_{4,i}^{(5)} &= T_{cp4,i}(x) + \Phi_4 - \omega_4 D_1^{(4)} \Phi_4 + \omega_4 Bi_4(x) \Phi_4. \end{aligned} \quad (22)$$

$$q_{2,i}^{(k)}(x) = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ \varphi_i^{(k)}(x), & i \geq 1, \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$T_{cp,s,i}(\cdot) = \begin{cases} T_{cp,s}(\cdot), & i = 0 \\ 0, & i \geq 1, \end{cases} \quad s = 1, 3, 4,$$

функції ω_s ($i = 1, 2, 3, 4$) визначаються виразами (12); функції $\omega_{k,k+1}$ ($k = 1, 2, 3, 4$) – виразами (19) з тим же самим правилом вибору знака; оператори $D_1^{(s)}$ – виразами (13); а невідомі компоненти структур Φ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) подаються у вигляді лінійної комбінації відомих базисних функцій з невідомими коефіцієнтами, наприклад у вигляді типа виразів (20).

Для кожного з рівнянь (15) записується відповідна варіаційна задача, згідно з методом Рітца або іншим варіаційним методом. Мінімізація суми цих п'яти функціоналів дозволяє знайти невідомі коефіцієнти $C_{pq}^{(k)}$.

Вирази, аналогічні (10)–(22), можна записати і для більшої непарної кількості регіонів m .

В результаті для кожної спектральної складової $\varphi_i^{(k)}(x)$ з виразу (8) отримуємо в результаті розв'язання ПЗТ відповідну спектральну функцію впливу $W_i^{(k)}(x, y)$, а також функцію $W_0(x, y)$, що враховує вплив неоднорідних граничних умов на $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_4$. Умову мінімізації функціонала нев'язки між експериментальними та розрахунковими температурами можна записати як

$$J_1(c_0^{(1)}, \dots, c_{N_1}^{(1)}, c_0^{(2)}, \dots, c_{N_m}^{(m)}) = \sum_{j=1}^M \left[W_0(x_j, y_j) + \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{N_k} c_i^{(k)} W_i^{(k)}(x_j, y_j) - T_j^* \right]^2 \rightarrow \min. \quad (23)$$

де T_j^* – експериментальні температурні дані в точках вимірювання (x_j, y_j) ($j = 1, 2, \dots, M$).

Необхідна умова мінімуму $\frac{\partial J_1}{\partial c_i^{(k)}} = 0$ для всіх значень i та k дасть систему лінійних

алгебраїчних рівнянь, розв'язавши яку можна знайти значення невідомих коефіцієнтів $c_i^{(k)}$ у виразі (8). Однак такий підхід може призвести до порушення гладкості ідентифікованої функції $q_2(x)$ у точках сполучення $x = a_k$ ділянок границі Γ_2 . Щоб запобігти цьому, можна під час мінімізації функціонала (23) враховувати додаткові обмеження на значення коефіцієнтів $c_i^{(k)}$, що впливають з умов гладкості, тобто проводити умовну мінімізацію. Наприклад, для забезпечення нерозривності функції $q_2(x)$ та її першої похідної у точці $x = a_1$ необхідно, щоб виконувалися співвідношення

$$\sum_{i=1}^{N_1} c_i^{(1)} \varphi_i^{(1)}(a_1) = \sum_{i=1}^{N_2} c_i^{(2)} \varphi_i^{(2)}(a_1),$$

$$\sum_{i=1}^{N_1} c_i^{(1)} \frac{d\varphi_i^{(1)}(a_1)}{dx} = \sum_{i=1}^{N_2} c_i^{(2)} \frac{d\varphi_i^{(2)}(a_1)}{dx}.$$

Можна також застосовувати інші способи для збереження гладкості, наприклад, будувати вирази для $q_2(x)$ на проміжних ділянках за допомогою формул склейки [6, 7].

Зазначимо, що такий підхід дозволяє автоматично отримати і розв'язок ПЗТ з цими граничними умовами. Дійсно, оскільки і спектральні функції впливу $W_i^{(k)}(x, y)$, і коефіцієнти $c_i^{(k)}$ вже знайдені, то (9) дає вираз для розрахунку температури.

4. Результати розрахунків

На базі методики, яка викладена у попередньому підрозділі, розроблено алгоритм та програмне забезпечення для проведення розрахунків. Експериментальні значення температур в точках виміру моделювались за допомогою розв'язання ПЗТ при відомій функціональній залежності $q_2(x)$, для чого було взято експоненціальну функцію

$$q_{2r}(x) = 1000 \cdot \exp(-x^2/a), \quad (24)$$

де $a = 7$.

Максимальна кількість регіонів дорівнювала семи. Згідно з (19) розбиття розрахункової області на регіони дало такі вирази для описання границь їх сполучення: $\omega_{12} = \pm(7/3 - x)$, $\omega_{23} = \pm(14/3 - x)$ – у випадку трьох регіонів; $\omega_{12} = \pm(1,4 - x)$, $\omega_{23} = \pm(2,8 - x)$, $\omega_{34} = \pm(4,2 - x)$, $\omega_{45} = \pm(5,6 - x)$ – у випадку п'яти регіонів; $\omega_{12} = \pm(1 - x)$, $\omega_{23} = \pm(2 - x)$, $\omega_{34} = \pm(3 - x)$, $\omega_{45} = \pm(4 - x)$, $\omega_{56} = \pm(5 - x)$, $\omega_{67} = \pm(6 - x)$ – у випадку семи регіонів.

Під час проведення розрахунків функція $q_2(x)$ на кожній ділянці границі Γ_2 шукалася у вигляді полінома. Як вже говорилося в попередньому підрозділі, якщо безпосередньо записати аналоги виразів (8)

$$q_2^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{N_k} c_i^{(k)} \left(\frac{x}{a_k} \right)^{i-1} \quad (25)$$

для кожного регіону і шукати невідомі коефіцієнти $c_i^{(k)}$ без додаткових обмежень, то це може призвести до порушення гладкості розв'язку.

Тому для забезпечення гладкості функції $q_2(x)$ вираз (25) безпосередньо використовувався лише на першій і останній ділянках границі Γ_2 , а на інших права частина формули (8) будувалася як склейка двох поліноміальних функцій

$$P_k(x) = \sum_{i=1}^N b_i^{(k)} \left(\frac{x}{a_k} \right)^{i-1}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1,$$

$$q_2^{(1)}(x) = P_1(x);$$

$$q_2^{(k)}(x) = \frac{P_{k-1}(x)(\omega_{k,k+1}(x))^2 + P_k(x)(\omega_{k-1,k}(x))^2}{(\omega_{k,k+1}(x))^2 + (\omega_{k-1,k}(x))^2}, \quad k = 2, \dots, m-1,$$

$$q_2^{(m)}(x) = P_{m-1}(x),$$

де $b_i^{(k)}$ – шукані коефіцієнти; $N - 1$ – ступінь допоміжних поліномів $P_k(x)$.

Для оцінки точності ідентифікації розраховувалося відхилення наближеного розв'язку $q_{2н}(x)$ від відомого точного значення $q_{2т}(x)$ за формулою

$$\varepsilon = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K |q_{т}(x_j) - q_{н}(x_j)|,$$

де $x_j = a \cdot j / K, j = 0, 1, \dots, K$.

Значення функцій $q_{2т}(x)$ та $q_{2н}(x)$ та похибки ε для різних варіантів ідентифікації наведені у табл. 1.

У табл. 2 наведено результати ідентифікації у випадку

$$q_{т}(x) = 1000 \exp\left(-\frac{x}{a}\right) \left(1,01 - \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right). \quad (26)$$

Таблиця 1. Точнісні показники ідентифікації функції $q_2(x)$ у випадку (24)

Поліноми другого ступеня									
x	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	ε
$q_{2т}(x)$	1000,00	866,88	564,71	276,45	101,70	28,11	5,8	0,9	
$q_{2н}(x); m = 3$	1061,68	838,94	575,09	270,98	96,05	29,15	-6,97	15,17	13,41
$q_{2н}(x); m = 5$	1007,36	867,03	564,38	275,21	100,45	26,39	5,24	1,85	0,98
$q_{2н}(x); m = 7$	1001,98	867,03	564,82	276,67	101,75	28,17	6,06	1,32	0,21
Поліноми третього ступеня									
x	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	ε
$q_{2т}(x)$	1000,00	866,88	564,71	276,45	101,70	28,11	5,8	0,9	
$q_{2н}(x); m = 3$	997,08	866,50	564,32	274,23	103,62	28,84	3,76	3,94	1,18
$q_{2н}(x); m = 5$	999,44	866,99	565,06	276,75	101,97	28,30	5,88	-1,25	0,37
$q_{2н}(x); m = 7$	999,82	866,97	564,88	276,54	101,88	28,27	5,88	0,17	0,18
Поліноми четвертого ступеня									
x	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	ε
$q_{2т}(x)$	1000,00	866,88	564,71	276,45	101,70	28,11	5,8	0,9	
$q_{2н}(x); m = 3$	995,53	866,34	564,94	276,43	101,59	27,77	5,53	1,16	0,43
$q_{2н}(x); m = 5$	999,66	866,88	564,73	276,51	101,77	28,15	5,93	1,12	0,06
$q_{2н}(x); m = 7$	999,97	866,93	564,78	276,53	101,80	28,22	5,95	1,03	0,09

Таблиця 2. Точнісні показники ідентифікації функції $q_2(x)$ у випадку (26)

Поліноми другого ступеня									
x	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	ε
$q_{2т}(x)$	1010,00	499,42	171,46	22,84	19,80	111,69	244,48	371,56	
$q_{2н}(x); m = 3$	1015,02	496,86	171,05	20,86	18,47	113,31	238,27	380,87	2,59
$q_{2н}(x); m = 5$	1011,46	499,26	170,99	22,38	19,14	111,05	244,24	372,99	0,41
Поліноми третього ступеня									
x	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	ε
$q_{2т}(x)$	1010,00	499,42	171,46	22,84	19,80	111,69	244,48	371,56	
$q_{2н}(x); m = 3$	1011,20	499,18	170,99	21,82	19,98	111,94	242,86	372,97	0,58
$q_{2н}(x); m = 5$	1010,14	499,36	171,27	22,68	19,64	111,57	244,35	371,86	0,16

Як видно з результатів розрахунку, запропонована методика дозволяє провести ідентифікації граничних теплових навантажень з досить високою точністю при відносно невеликому числі регіонів та ступені апроксимуючих поліномів.

Висновки

Завдяки розвитку методу спектральних функцій впливу розв'язання обернених задач математичної фізики запропоновано нову методику побудови швидких алгоритмів відновлення теплових навантажень, що здатні працювати в реальному часі.

Для підвищення точності ідентифікації використовуються регіональні функції впливу, які будуються завдяки розбиттю просторової області, в якій розглядається фізичний процес, на регіони. Кількість регіонів, яка здатна забезпечити прийнятну точність розрахунків, знаходиться в результаті ітераційного процесу. Використання регіональних функцій впливу є додатковим регуляризуючим фактором під час розв'язання ОЗ, оскільки в межах кожного з регіонів використовуються ідентифікаційні залежності невисокого ступеня, внаслідок чого підвищення точності не призводить до прояви несталості.

Визначені шляхи розпаралелювання обчислювального процесу.

Запропонована методика апробована під час розв'язання тестових задач.

Роботу виконано завдяки підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень, проект № Ф54.1/025.

Література

1. *Мацевитый Ю. М.* Спектральные функции влияния в многомерных обратных задачах теплопроводности / Ю. М. Мацевитый, А. П. Слесаренко, О. С. Цаканян // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1986. – № 5. – С. 72–77.
2. *Мацевитый Ю. М.* Идентификация граничных тепловых воздействий с помощью спектральных функций / Ю. М. Мацевитый, А. П. Слесаренко, О. С. Цаканян // Инж.-физ. журн. – 1987. – Т. 53, № 3. – С. 480–486.
3. *Мацевитый Ю. М.* Обратные задачи теплопроводности: В 2-х т. / Ю. М. Мацевитый. – Киев: Наук. думка, Т. 1 Методология. 2002. – 408 с.; Т. 2. Приложения. 2003. – 392 с.
4. *Численно-аналитическое* моделирование и идентификация теплообмена в панелях модулей негерметичных космических аппаратов / Ю. М. Мацевитый, А. П. Слесаренко, А. О. Костиков, Н. М. Курская // Электрон. моделирование. – 2006. – Т. 28, № 6. – С. 3–16.
5. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. – М.: Госэнергоиздат, 1957. – 512 с.
6. *Рвачев В. Л.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах / В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко. – Киев: Наук. думка, 1976. – 288 с.
7. *Мацевитый Ю. М.* Приближенный регионально-аналитический метод исследования теплопереноса в конструктивных элементах сложной формы с учетом рационального теплообмена / Ю. М. Мацевитый, А. П. Слесаренко, Н. А. Сафонов // Тепломассообмен ММФ-96, Минск. – 1996. – Т. 2. – С. 57–60.
8. *Слесаренко А. П.* Развитие алгебро-логического метода и его приложения к многомерным нелинейным задачам теплопроводности для однородных и композитных сред: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – М., 1984. – 36 с.
9. *Слесаренко А. П.* S-функции в обратных задачах дифференциальной геометрии и управления образования форм / А. П. Слесаренко // Восточно-европейский журнал передовых технологий. Математика и кибернетика – фундаментальные и прикладные аспекты. – 2012. – № 1/4 (55). – С. 41–46.

Надійшла до редакції
22.08.13