

УДК 517.95 + 518.517+519.6 (075.8)

Д. А. Лисин*

К. В. Максименко-Шейко*, ** канд. физ.-мат. наук

Т. И. Шейко*, д-р техн. наук

* Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины
(г. Харьков, e-mail: sheyko@ipmach.kharkov.ua)

** Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ АВТОМОБИЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ R-ФУНКЦИЙ

С помощью R-функций проведено поэтапное моделирование кузова автомобиля многопараметрическими уравнениями с буквенными параметрами для геометрических характеристик и методика построения уравнений поверхностей с непрерывной функцией кривизны. Проиллюстрирована работа новой быстродействующей системы визуализации уравнений поверхностей геометрических объектов в 3D.

За допомогою R-функцій проведено поетапне моделювання кузова автомобіля багатопараметричними рівняннями з буквенними параметрами для геометричних характеристик та методика побудови рівнянь поверхонь з неперервною функцією кривизни. Проілюстровано роботу нової швидкодіючої системи візуалізації рівнянь поверхонь геометричних об'єктів у 3D.

Введение

Важным элементом разработки новых изделий является создание их трехмерных моделей для систем автоматизированного проектирования и конструирования [1]. Как правило, на практике приходится иметь дело с объектами сложной формы, что затрудняет построение моделей и их последующую дискретизацию. В настоящее время существует несколько подходов [2] к описанию геометрических объектов (ГО) разнообразной формы. Они могут быть классифицированы следующим образом:

- параметрическое описание поверхности, когда на определенном входном языке или в определенном формате описываются граничные сегменты, задающие замкнутую геометрическую фигуру;
- твердотельное геометрическое моделирование, когда форма объекта восстанавливается по чертежам трех ее проекций;
- композиция топологической модели как некоторой совокупности базовых топологических примитивов и эйлеровых операций над ними.

У каждого из этих подходов есть свои достоинства и недостатки. Параметрическое описание границ сложного трехмерного ГО — процесс трудоемкий. Твердотельное моделирование не всегда позволяет получить модель, пригодную для последующей дискретизации. Композиция модели из базовых примитивов ограничена их набором, и с ее помощью невозможно описать произвольный геометрический объект. Следовательно, есть необходимость в альтернативном подходе к описанию сложных ГО, особенно неклассической формы. Многие CAD/CAM-системы производят механообработку с постоянным Z-уровнем на базе триангулированной модели. Идея такова: объемная модель аппроксимируется плоскими треугольниками (или многогранниками), а затем триангулированная модель рассекается семейством параллельных плоскостей. При значении погрешности 0,01–0,001 мм только триангуляция реальных моделей занимает недопустимое количество времени [3].

При создании 3D-модели чаще всего используется технология моделирования BRep. Модель строится из кусков сплайновых поверхностей или с помощью операций над набором

полигонов. Реализация данной технологии представлена такими системами, как 3D Studio MAX, Rhinoceros [4]. Главное достоинство данной технологии — возможность получения практически любых форм поверхностей, что и обуславливает ее популярность. Но существенным недостатком является высокая трудоемкость моделирования и серьезные требования к подготовке пользователя-дизайнера. Кроме того, использование сложного математического аппарата в реализациях технологии VRer повышает требования к мощности вычислительной техники. Важно также отметить, что 3D-модели на основе сплайнов неудобны для вычислений, что необходимо при послойном моделировании, изготовлении пресс-форм и фрезеровании.

Одна из возможных альтернатив – применение математического аппарата теории R-функций [5–9], который позволяет аналитически описать границу произвольного ГО. Процесс ее описания сводится к заданию некоторой функции от координат, принимающей нулевые значения на границе области, положительные внутри области и отрицательные вне ее. С помощью R-функций оказывается возможным построение в неявной форме уравнений границ составных областей по известным уравнениям простых областей. До настоящего времени визуализация уравнений геометрических объектов в 3D осуществлялась в системе РАНОК [7]. Однако время расчетов было слишком велико и исчислялось часами работы компьютера, что существенно затрудняло проведение вычислительного эксперимента, а в будущем могло стать неприемлемым для работы конструктора-дизайнера.

Целью работы является моделирование поверхности автомобиля многопараметрическими уравнениями с помощью R-функций и иллюстрация работы новой быстродействующей системы визуализации уравнений геометрических объектов в 3D.

Основная часть

Визуализация функции, заданной в неявной форме, является весьма трудоемким процессом, прежде всего за счет необходимости нахождения достаточного количества опорных точек для построения триангуляции. В качестве среды для создания системы, визуализирующей такие функции, был выбран MATLAB, прежде всего из-за встроенных в него средств триангулирования и создания изоповерхностей, а также из-за возможности получить объектный код C++.

Входным языком для задания в неявной форме уравнений границ ГО является язык MATLAB, в который добавлены функции, реализующие R-операции системы $\{R_0\}$, а именно, $\text{rfAND}(f_1, f_2) = f_1 \wedge_0 f_2 = f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$, $\text{rfOR}(f_1, f_2) = f_1 \vee_0 f_2 = f_1 + f_2 + \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ и $\text{rfNOT}(f_1) = -f_1$. Пример функции, описывающей поверхность клапана (рис. 1), приведен на рис. 2.



Рис. 1. Клапан

Как было сказано выше, наиболее трудоемкой частью процесса визуализации функции является получение опорных точек для триангуляции. Для качественной визуализации клапана на рис. 1 потребовалось задать более 15 миллионов опорных точек. Для того чтобы ускорить процесс визуализации и уменьшить объем используемой памяти, область построения ГО (описанный вокруг ГО прямоугольный параллелепипед) разбивается на определенное количество подобластей, вычисления в каждой из которых ведутся независимо с применением распараллеливания вычислений.

В табл. 1 представлена зависимость времени, которое занимает процесс визуализации клапана, от количества опорных точек и подобластей.

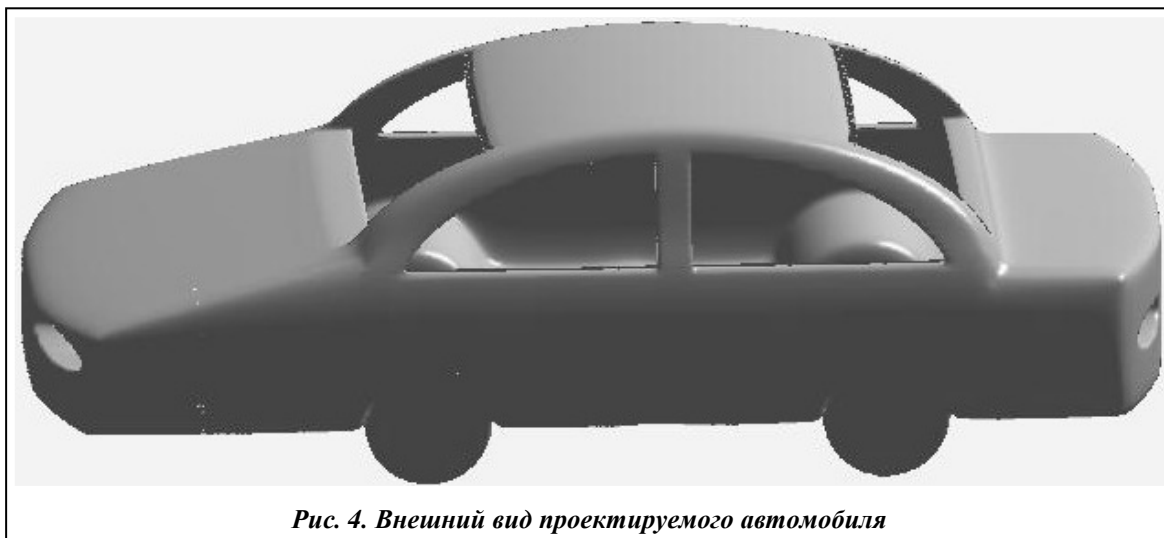


Рис. 4. Внешний вид проектируемого автомобиля

Капот: $f_3 = \frac{c_3 - a_3 y - b_3 z}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}} \wedge_0 \frac{(y_3 - y)(y - y_4)}{y_3 - y_4}$,

где a_3, b_3, c_3, y_3, y_4 – параметры капота.

$\omega_{123} = (f_1 \vee_0 f_2 \vee_0 f_3) \wedge_0 z = 0$ — поверхность крыши, багажника и капота.

Арки:

$$f_5 = \frac{(y + y_5)^2 + z^2 - r_a^2}{2r_a} \vee_0 \frac{(x_{k2} - x_a)^2 - x^2}{2(x_{k2} - x_a)}; \quad f_6 = \frac{(y - y_6)^2 + z^2 - r_a^2}{2r_a} \vee_0 \frac{(x_{k2} - x_a)^2 - x^2}{2(x_{k2} - x_a)},$$

где r_a, y_5, y_6 – параметры арок.

$$\omega_{56} = f_5 \wedge_0 f_6 = 0. \quad \omega_{bkk_a} = \omega_{123} \wedge_0 \omega_{56} = 0;$$

$$\omega_{test1} = \omega_{bkk_a} \wedge_0 \frac{x_s^2 - x^2}{2x_s} = 0 \text{ – поверхность крыши, багажника и капота с арками (рис. 5), где } x_s$$

– промежуточный параметр ширины машины.

Время счета 23,32 с.

$$\text{Скругление: } fk = \frac{r_k^2 - x^2 - y^2}{2r_k}; \quad fb = \frac{r_b^2 - x^2 - (y - y_b)^2}{2r_b}.$$

где r_k, r_b, y_b – параметры скругления багажника и капота.

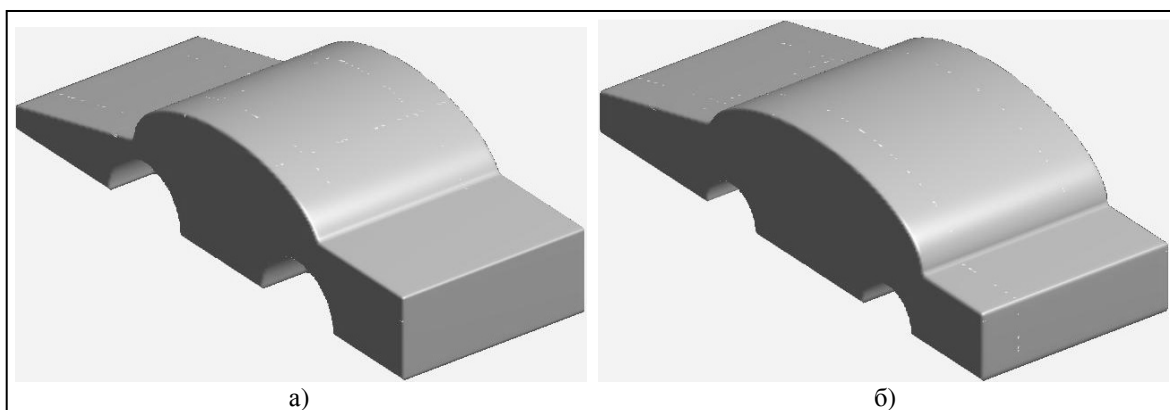


Рис. 5. Поверхность крыши, багажника и капота с арками

а) – $a_1 = 8, b_1 = 4, z_1 = 4, y_2 = 15, z_2 = 5, a_3 = 2,5, b_3 = 10, c_3 = 60, y_3 = 18, y_4 = 1, r_a = 3, y_5 = 6, y_6 = 7, x_{k2} = 4, x_a = 1, x_s = 6$; б) – $a_1 = 9, b_1 = 4, z_1 = 4, y_2 = 14, z_2 = 4, a_3 = 2,5, b_3 = 10, c_3 = 70, y_3 = 18, y_4 = 1, r_a = 1, y_5 = 6, y_6 = 7, x_{k2} = 4, x_a = 1, x_s = 6$

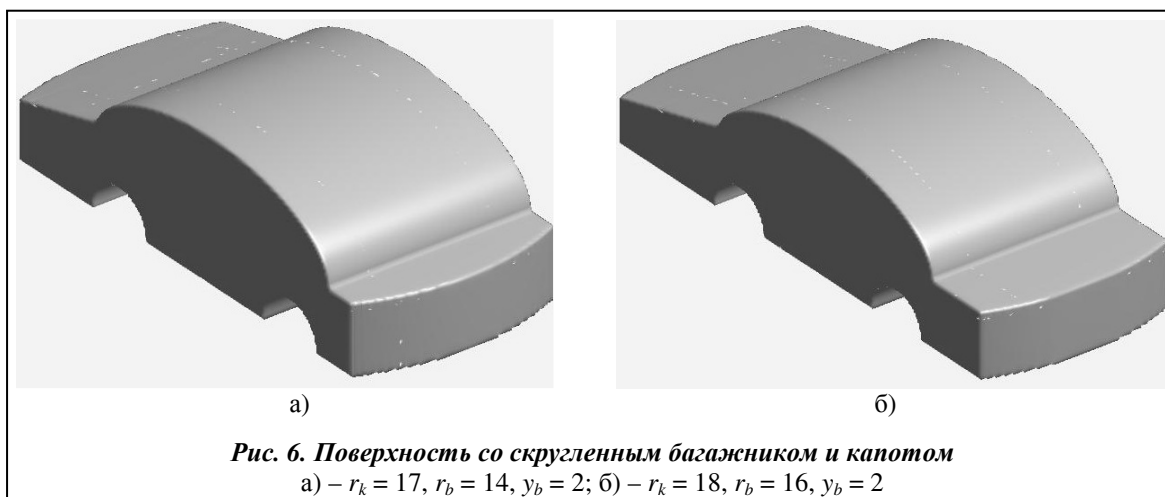


Рис. 6. Поверхность со скругленным багажником и капотом

а) – $r_k = 17, r_b = 14, y_b = 2$; б) – $r_k = 18, r_b = 16, y_b = 2$

$$\omega_{sk} = \omega_{bkka} \wedge_0 fk \wedge_0 fb = 0,$$

$\omega_{test2} = (\omega_{test1} \wedge_0 fk) \wedge_0 fb = 0$ – поверхность со скругленным багажником и капотом (рис. 6).

Время счета 23,35 с.

Боковые поверхности:

$$ff_{11} = 1 - \frac{(x - x_b)^2}{a_b^2} - \frac{(z - z_b)^2}{b_b^2}; \quad f_{b1} = \frac{ff_{11}}{\sqrt{ff_{11}^2 + 4 \frac{(x - x_b)^2}{a_b^4} + 4 \frac{(z - z_b)^2}{b_b^4}}};$$

$$ff_{22} = 1 - \frac{(x + x_b)^2}{a_b^2} - \frac{(z - z_b)^2}{b_b^2}; \quad f_{b2} = \frac{ff_{22}}{\sqrt{ff_{22}^2 + 4 \frac{(x + x_b)^2}{a_b^4} + 4 \frac{(z - z_b)^2}{b_b^4}}};$$

$$ff_3 = \frac{h_1 x - h_2 z + h_3}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}; \quad ff_4 = \frac{-h_1 x - h_2 z + h_3}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}; \quad ff_5 = \frac{h_4^2 - x^2}{2h_4},$$

где $a_b, b_b, x_b, z_b = \frac{z_2}{2}$, h_1, h_2, h_3, h_4 – параметры боковой поверхности.

$$\omega_b = (ff_3 \wedge_0 ff_4 \wedge_0 ff_5) \vee_0 (f_{b1} \vee_0 f_{b2}) = 0,$$

$\omega_{test3} = \omega_{sk} \wedge_0 \omega_b = 0$ – полная поверхность кузова (рис. 7).

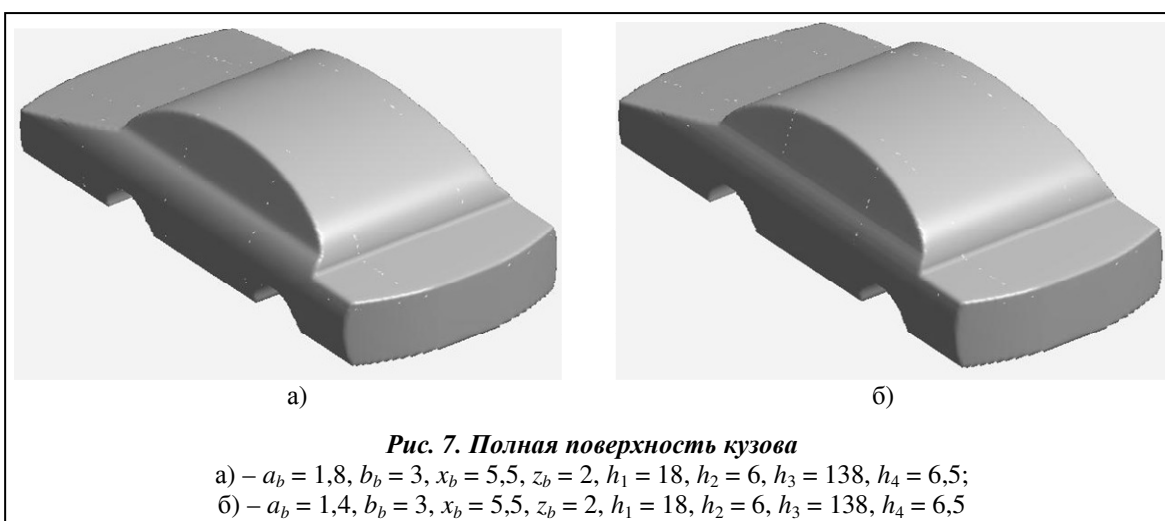


Рис. 7. Полная поверхность кузова

а) – $a_b = 1,8, b_b = 3, x_b = 5,5, z_b = 2, h_1 = 18, h_2 = 6, h_3 = 138, h_4 = 6,5$;

б) – $a_b = 1,4, b_b = 3, x_b = 5,5, z_b = 2, h_1 = 18, h_2 = 6, h_3 = 138, h_4 = 6,5$

Время счета 23,91 с.
Колеса:

$$f_7 = \frac{(r_a - \varepsilon)^2 - (y + y_5)^2 - z^2}{2(r_a - \varepsilon)} \wedge_0 \frac{(x_{k1} - x)(x - x_{k2})}{x_{k1} - x_{k2}};$$

$$f_8 = \frac{(r_a - \varepsilon)^2 - (y - y_6)^2 - z^2}{2(r_a - \varepsilon)} \wedge_0 \frac{(x_{k1} - x)(x - x_{k2})}{x_{k1} - x_{k2}};$$

$$f_9 = \frac{(r_a - \varepsilon)^2 - (y + y_5)^2 - z^2}{2(r_a - \varepsilon)} \wedge_0 \frac{(x_{k1} + x)(-x - x_{k2})}{x_{k1} - x_{k2}};$$

$$f_{10} = \frac{(r_a - \varepsilon)^2 - (y - y_6)^2 - z^2}{2(r_a - \varepsilon)} \wedge_0 \frac{(x_{k1} + x)(-x - x_{k2})}{x_{k1} - x_{k2}};$$

$$\omega_{78910} = (f_7 \vee_0 f_9) \vee_0 (f_8 \vee_0 f_{10}) = 0.$$

где $r_a - \varepsilon, y_5, y_6, x_{k1}, x_{k2}$ – параметры колес.

$\omega_{test4} = \omega_{test3} \vee_0 \omega_{78910} = 0$ – поверхность кузова (рис. 8) с колесами (рис. 8, а). Время счета 23,78 с.

Окна:

$$fo_1 = \left(\left(1 - \frac{y^2}{y_o^2} - \frac{(z - z_h)^2}{z_o^2} \right) \wedge_0 (z - h_5) \right) \wedge_0 \frac{y^2 - d^2}{2d};$$

$$fo_2 = ((o_1 x - o_2 z + o_3) \wedge_0 (-o_1 x - o_2 z + o_3)) \wedge_0 ((ho_1 - z)(-ho_2 + z));$$

$$\omega_o = \overline{fo_1} \wedge_0 \overline{fo_2} = 0,$$

где $y_o, z_o, z_h, h_5, d, o_1, o_2, o_3, ho_1, ho_2$ – параметры окон.

$\omega_{test5} = (\omega_{test3} \vee_0 \omega_{78910}) \wedge_0 \omega_o = 0$ – поверхность кузова с колесами и окнами (рис. 8, б). Время счета 23,91 с.

Фары:

$$fa_1 = \left(1 - \frac{(x - x_f)^2}{a_f^2} - \frac{(z - z_f)^2}{b_f^2} \right) \wedge_0 (y - y_f);$$

$$fa_2 = \left(1 - \frac{(x + x_f)^2}{a_f^2} - \frac{(z - z_f)^2}{b_f^2} \right) \wedge_0 (y - y_f);$$

$$fa_3 = \left(1 - \frac{(x - x_f)^2}{c_f^2} - \frac{(z - z_f)^2}{d_f^2} \right) \wedge_0 (y - y_f);$$

$$fa_4 = \left(1 - \frac{(x + x_f)^2}{c_f^2} - \frac{(z - z_f)^2}{d_f^2} \right) \wedge_0 (y - y_f);$$

$$\omega_{far} = (fa_1 \vee_0 fa_2) \vee_0 (fa_3 \vee_0 fa_4),$$

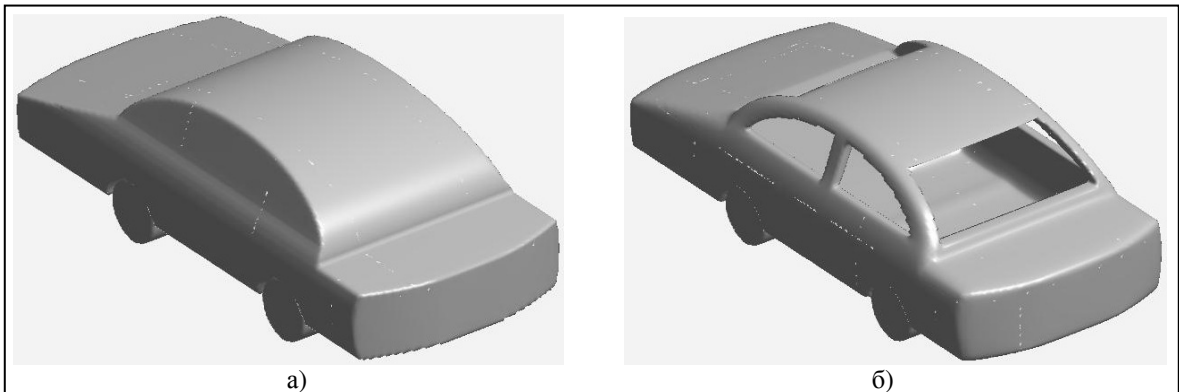


Рис. 8. Поверхность кузова:

а) – с колесами $\varepsilon = 0,2, y_5 = 6, y_6 = 7, x_{k1} = 6,5, x_{k2} = 4$; б) – с колесами и окнами $y_o = 8, z_o = 4, z_h = 3,5, h_5 = 5, d = 0,5, o_1 = 3, o_2 = 1, o_3 = 21, ho_1 = 7,5, ho_2 = 5$

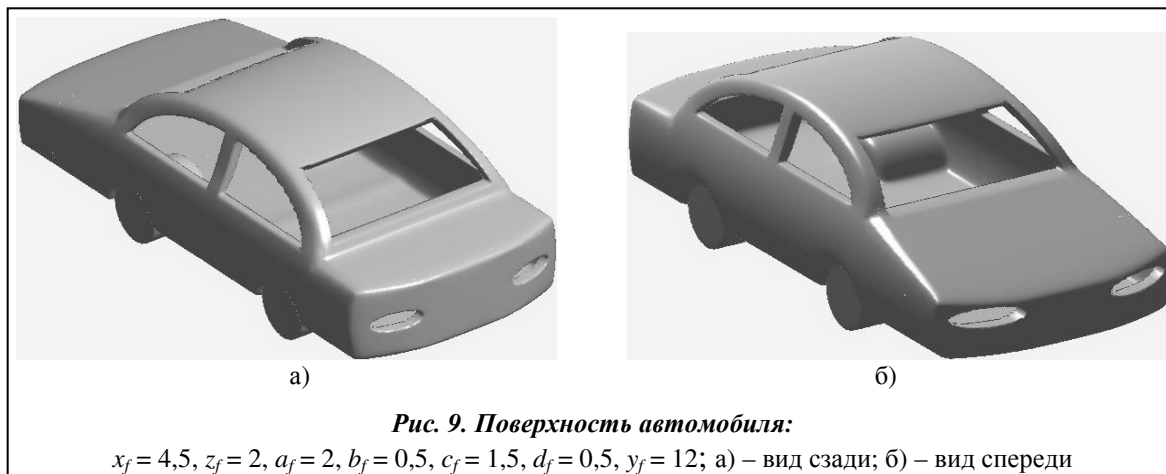


Рис. 9. Поверхность автомобиля:

$x_f = 4,5, z_f = 2, a_f = 2, b_f = 0,5, c_f = 1,5, d_f = 0,5, y_f = 12$; а) – вид сзади; б) – вид спереди

где $x_f, z_f, a_f, b_f, c_f, d_f, y_f$ – параметры фар.

$W = (\omega_{test5} \vee_0 \overline{\omega}_{far})$ – поверхность автомобиля с фарами (рис. 9).

Время счета 23,86 с для 27 подобластей по 125000 опорных точек и 93 с для 125 областей по 125000 опорных точек. Построенная математическая модель поверхности автомобиля имеет 42 варьируемых параметра.

Отметим, что при реализации задачи обтекания следует выбирать уравнение поверхности, изображенной на рис. 8, а.

Кроме собственно визуализации функций в системе предусмотрена возможность получения и визуализации триангуляции поверхности ГО. На рис. 10 представлена триангуляция поверхности автомобиля по 125000 опорным точкам (при большем количестве опорных точек сетка слишком густа для визуализации).

При исследовании задачи обтекания и формировании нестандартного дизайна автомобиля предлагается следующая, использующая блендинг на каркасе методика построения уравнений поверхностей с непрерывной функцией кривизны.

Нормализованное уравнение отрезка прямой на интервале $-a \leq x \leq a$ имеет такой

$$\text{вид: } f_o = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{f_1^4 + f_2^2} - f_2}{2}\right)^2} + f_1^2 \geq 0, \text{ где } f_1 = y \geq 0, f_2 = \frac{a^2 - x^2}{2a} \geq 0.$$

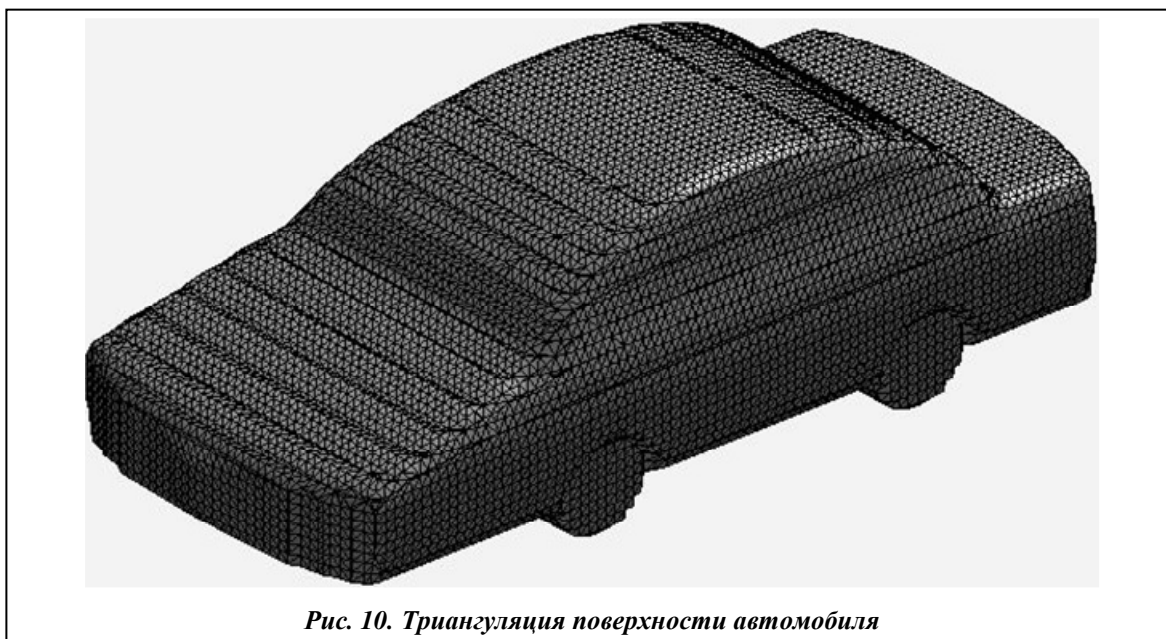


Рис. 10. Триангуляция поверхности автомобиля

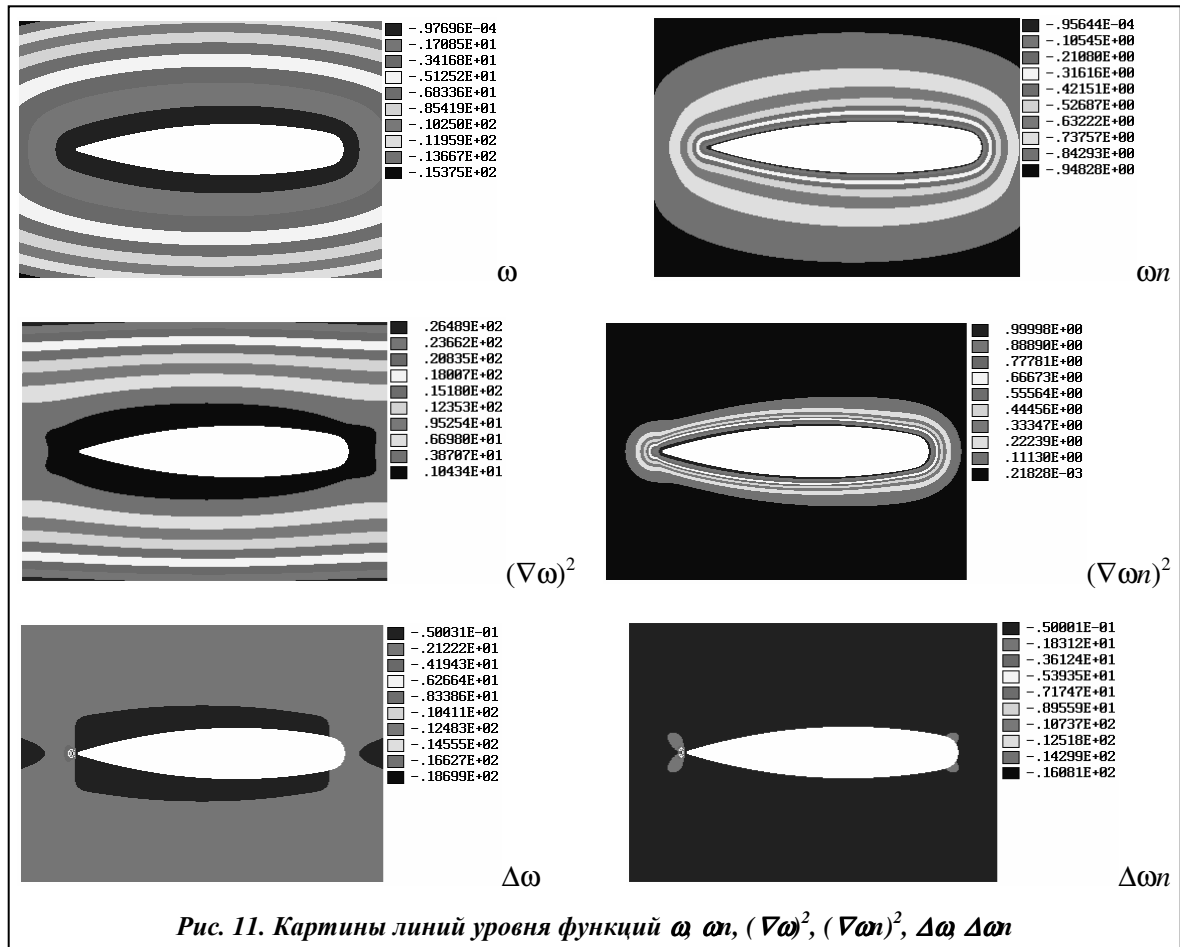


Рис. 11. Картины линий уровня функций ω , ωn , $(\nabla\omega)^2$, $(\nabla\omega n)^2$, $\Delta\omega$, $\Delta\omega n$

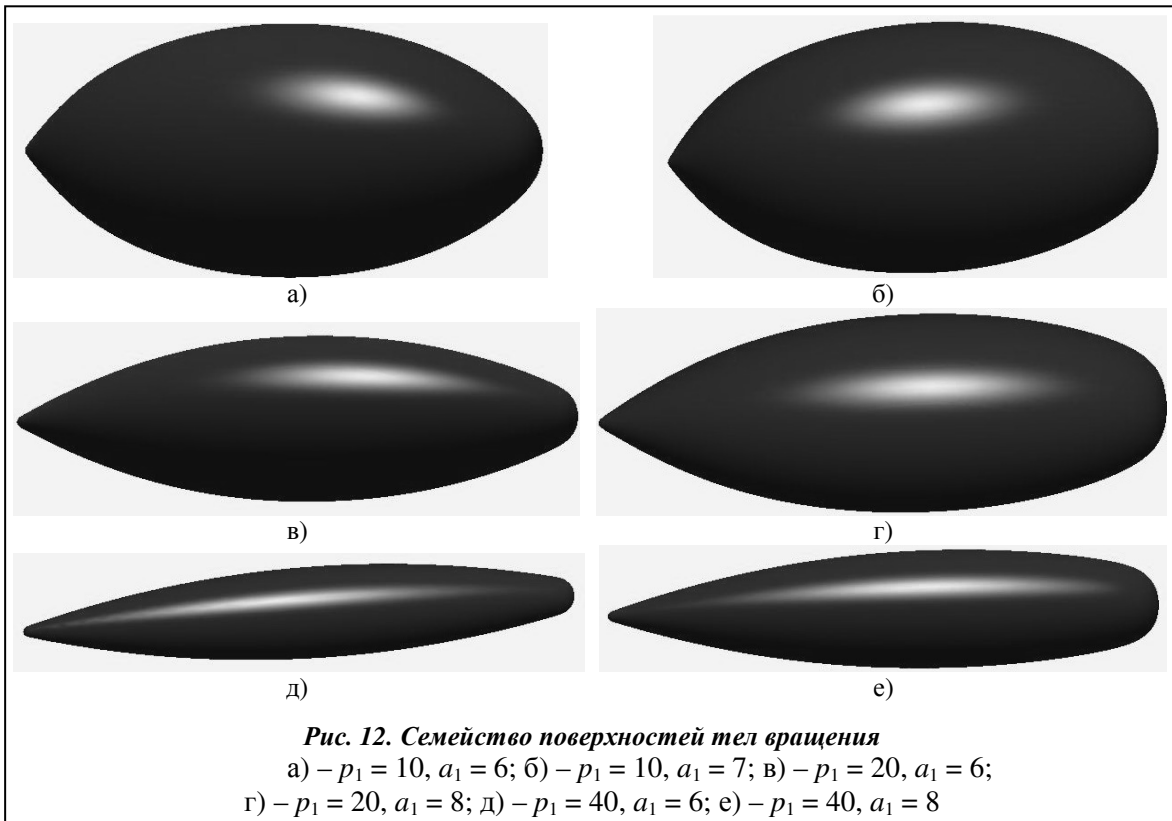
Рассмотрим уравнение семейства кривых $\omega = -f_0 + \frac{(a_1 - x)(a_2 + x)}{p_1} - p_2 = 0$ с пятью рабочими параметрами a , a_1 , a_2 , p_1 , p_2 , нормализовать которое можно по формуле

$$\omega n = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + (\nabla\omega)^2}} = 0.$$

Вычислим $(\nabla\omega)^2 = \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2$, $(\nabla\omega n)^2 = \left(\frac{\partial\omega n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega n}{\partial y}\right)^2$, $\Delta\omega = \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$ и $\Delta\omega n = \frac{\partial^2\omega n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega n}{\partial y^2}$ при $a = 5$; $a_1 = 8$; $a_2 = 5,3$; $p_1 = 40$; $p_2 = 0,1$. На рис. 11 представлены линии уровня исследуемых функций.

Анализ результатов позволяет отдать предпочтение нормализованной функции $\omega n(x, y) = 0$. Выполнив подстановку $y \Leftarrow \sqrt{y^2 + z^2}$, получим семейство нормализованных уравнений поверхностей тел вращения $\omega n\left(x, \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$, представленных на рис. 12 при фиксированных значениях $a = a_2 = 5$, $p_2 = 0,1$.

Поверхности, изображенные на рис. 12, можно использовать при проектировании корпуса подводной лодки, фюзеляжа самолета и др., а также спроектировать автомобиль с кузовом нестандартной формы (рис.13) с последующей триангуляцией поверхности (рис.14).

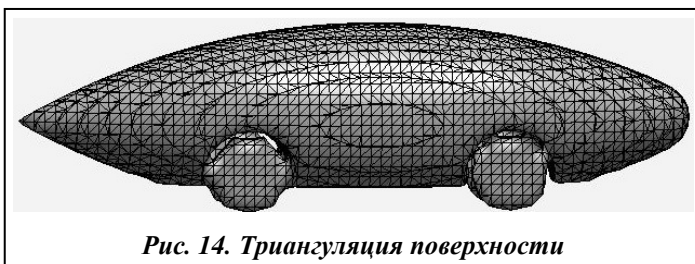
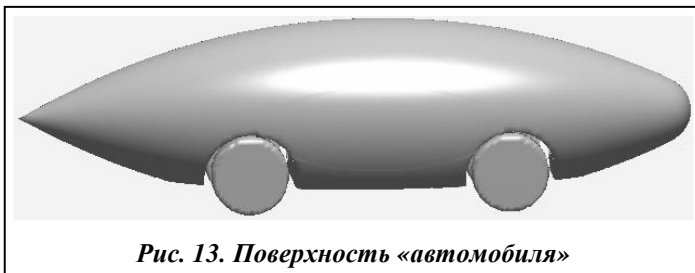


Выводы

Проведенные исследования показали, что метод R -функций и новая система визуализации построенных уравнений удобны для математического моделирования геометрических объектов в 3D, в частности, кузовов автомобилей и деталей машиностроения. Изменение буквенных параметров в построенных уравнениях может привести к существенному изменению дизайна кузова. При этом в работе не ставилась цель получить какие-то оригинальные отточенные формы. Задача сводилась к исследованию возможностей метода и новой системы визуализации уравнений. При наличии навыков построить математическую модель с буквенными параметрами новой машины можно за 0,5 часа, а процесс визуализации уравнения занимает 30–100 секунд. Система позволяет полученный на экране геометрический объект разворачивать во всех направлениях и триангулировать его поверхность. Предложенная методика построения уравнений поверхностей с непрерывной функцией кривизны может быть использована при проектировании корпусов подводных лодок, фюзеляжей самолетов и др.

Литература

1. Желтов С. Ю. Современные подходы к трехмерному сканированию объектов сложной пространственной формы / С. Ю. Желтов, В. А. Князь // Лазерно-компьютерные технологии создания деталей сложной формы: 3-й Всероссийский семинар. – М. ГосНИИ авиац. систем, 2003. – С. 23–27.
2. Лисняк А. А. Применение R -функ-



- цій для геометричного моделювання об'єктів складної форми / А. А. Лисняк, С. И. Гоменюк // *Радіоелектроніка. Інформатика. Управління*. – 2009. – № 2. – С. 76–81.
3. *Адамов А.* АДЕМ: підготовка к третьому тисячеліттю / А. Адамов // *САПР и графика*. – 2000. – № 12. – С. 56–60.
 4. *Ермилов В.* Концептуальні геометричні моделі / В. Ермилов, В. Харин, М. Шалак // *Department of Computer Aided Design. Izhevsk State Technical University*. – Izhevsk, Russia, 2004. – С. 34–37.
 5. *Рвачев В. Л.* Теорія R-функцій і деякі її застосування / В. Л. Рвачев. – Київ: Наук. думка, 1982. – 552 с.
 6. *Максименко-Шейко К. В.* R-функції в математичному моделюванні геометричних об'єктів і фізических полів / К. В. Максименко-Шейко. – Харків: ИПМаш НАН України, 2009. – 306 с.
 7. *R-функції* і обернена задача аналітичної геометрії в трьохмерному просторі / К. В. Максименко-Шейко, А. М. Мацевитий, А. В. Толок, Т. І. Шейко // *Інформаційні технології*. – 2007. – №10. – С. 23–32.
 8. *Maksimenko-Sheiko K. V.* R-functions in mathematical modeling of geometric objects with symmetry / K. V. Maksimenko-Sheiko, T. I. Sheiko // *Cybernetics and Systems Analysis*. – 2008. – Vol. 44 (6). – P. 855–862.
 9. *Maksimenko-Sheiko K. V.* Automation of constructing equations of geometric objects in the method of R-functions / K. V. Maksimenko-Sheyko, A. M. Matsevityi, T. I. Sheiko // *Cybernetics and Systems Analysis*. – 2006. – Vol. 42 (2). – P. 284–290.

Поступила в редакцію
05.06.13

УДК 519.6

О. О. Литвин, канд. фіз.-мат. наук

Є. Л. Хурдей

Українська інженерно-педагогічна академія
(м. Харків, e-mail: academ@kharkov.ua)

МЕТОД ПОБУДОВИ ОПЕРАТОРІВ ІЗ ЗАДАНИМИ ПРОЕКЦІЯМИ ВЗДОВЖ ПЕРЕТИННИХ ПРЯМИХ, ЯКІ ІНТЕРПОЛЮЮТЬ $f(x, y)$ В ТОЧКАХ ПЕРЕТИНУ ЦИХ ПРЯМИХ

Запропоновано метод побудови операторів наближення функції $f(x, y)$, який інтерполює $f(x, y)$ в точках перетину прямих Γ_k , $k = 1, 2, \dots, M$ і має проєкції вздовж цих прямих, які збігаються з проєкціями від $f(x, y)$ вздовж цих прямих. Метод побудови операторів інтерполяції функцій двох змінних із заданими проєкціями досліджується для випадку перетинних прямих, ніякі три з яких не перетинаються в одній точці. Розглянуто приклади побудови інтерполяційних операторів із заданими проєкціями вздовж $M = 3, 4$ перетинних прямих.

Предложен метод построения операторов приближения функции $f(x, y)$, который интерполирует $f(x, y)$ в точках пересечения прямых Γ_k , $k = 1, 2, \dots, M$ и имеет проекции вдоль этих прямых, совпадающих с проекциями от $f(x, y)$ вдоль этих прямых. Метод построения операторов интерполяции функций двух переменных с заданными проекциями исследуется для случая пересекающихся прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Рассмотрены примеры построения интерполяционных операторов с заданными проекциями вдоль $M = 3, 4$ пересекающихся прямых.

Вступ

В роботах О. М. Литвина і О. О. Литвина наведено формулювання загального методу для побудови операторів наближення функцій двох змінних, які одночасно інтерполюють ці функції і мають задані проєкції, а також наведено конкретні приклади для випадку, коли си-