

**Н. М. Калантарлы,**  
канд. физ.-мат. наук  
Институт математики  
и механики  
НАН Азербайджана,  
г. Баку, e-mail:  
nailyak1975@gmail.com

УДК 539.375

## РАЗРУШЕНИЕ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТОГО КОЛЬЦЕВОГО ДИСКА

*Запропоновано модель руйнування для нерівномірно нагрітого кільцевого диску, що ґрунтується на розгляді зони процесу руйнування поблизу кінчика тріщини. Прийнято, що зона руйнування (кінцева зона) являє собою шар скінченної довжини, що є частиною прямолінійної тріщини, в якому частково порушені зв'язки між його окремими структурними елементами. Наявність зв'язків між берегами тріщини в кінцевій зоні моделюється неперервним прикладанням до поверхні тріщини сил зчеплення, що стримують її розкриття. Отримано залежність граничної інтенсивності теплового впливу на кільцевий диск від довжини тріщини.*

**Ключові слова:** *нерівномірно нагрітий кільцевий диск, тріщина зі зв'язками між берегами, зона передруйнування, сила зчеплення.*

### Введение

Задачи прочности кольцевых дисков весьма актуальны и, несомненно, интерес к этим задачам будет повышаться в связи с имеющейся тенденцией развития машиностроения и энергетики. Для анализа надежности кольцевых дисков необходимо проводить исследование их напряженно-деформированного состояния и разрушения. Моделирование и расчет напряженно-деформированного состояния в кольцевых дисках имеет особое прикладное значение, в первую очередь, для правильного выбора их конструкции, оптимальных размеров и допустимых величин рабочих нагрузок. Кольцевые диски часто работают в весьма напряженных условиях. Расчетам кольцевых дисков посвящена обширная литература (см. обзор в монографиях [1, 2]). В большинстве имеющихся работ используется модель трещины А. Гриффитса. В настоящей работе используется модель трещины со связями между берегами [3, 4].

### Постановка задачи

Пусть поперечное сечение неравномерно нагретого кольцевого диска заполняет в плоскости  $z = x + iy$  область  $S$ , с круговыми границами  $L_1$  и  $L$ , представляющими собой окружности радиуса  $R_1$  и  $R$  соответственно. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние в кольцевой области  $S$ , ослабленной теплоизолированной прямолинейной трещиной с концевыми зонами предразрушения при неравномерном температурном поле. Принято, что имеет место плоское напряженное состояние. Распределение температуры  $T(r, \theta)$  по сечению кольцевого диска задается исходя из решения задачи теории теплопроводности. Считается, что в концевых зонах предразрушения имеют место силы сцепления материала, размер концевых зон предразрушения заранее неизвестен, однако сравним с длиной трещины.

Отнесем кольцевой диск к полярной системе координат  $r, \theta$  с началом координат в центре концентрических окружности  $L_1$  и  $L$ . Пусть в центре прямолинейной трещины с концевыми зонами предразрушения будет начало локальной системы координат  $x_1 O_1 y_1$ , ось  $x_1$  которой совпадает с линией трещины и образует угол  $\alpha_1$  с осью  $Ox$  ( $\theta = 0$ ) (рис. 1).

Под действием тепловой нагрузки в связях, соединяющих берега трещины в кон-

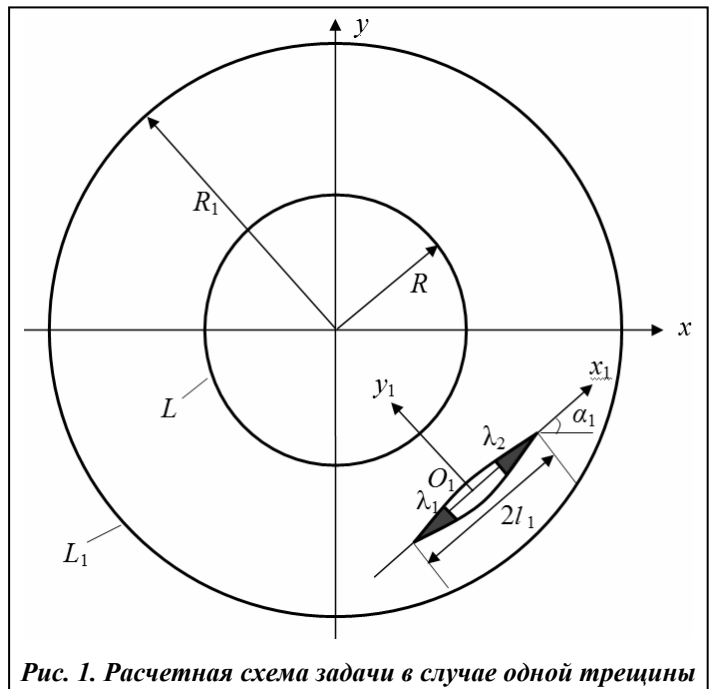


Рис. 1. Расчетная схема задачи в случае одной трещины

цевых зонах предразрушения, будут возникать нормальные  $q_{y_1}$  и касательные  $q_{x_1y_1}$  усилия. Следовательно, к берегам трещины в концевых зонах предразрушения будут приложены нормальные и касательные напряжения, равные соответственно  $q_{y_1}$  и  $q_{x_1y_1}$ . Во внутренней области трещины (вне концевых зон) ее берега будут свободны от внешних усилий.

Для исследования напряженно-деформированного состояния в неравномерно кольцевом диске, ослабленном одной прямолинейной трещиной с концевыми зонами предразрушения, необходимо совместное решение уравнений термоупругости [5, 6] при граничных условиях

$$\sigma_r = 0; \tau_{r\theta} = 0 \text{ на } L; \quad \sigma_r = 0; \tau_{r\theta} = 0 \text{ на } L_1; \quad (1)$$

$$\sigma_{y_1} = 0; \tau_{x_1y_1} = 0 \text{ при } y_1 = 0 \text{ и } \lambda_1 < x_1 < \lambda_2; \quad (2)$$

$$\sigma_{y_1} = q_{y_1}; \tau_{x_1y_1} = q_{x_1y_1} \\ \text{при } y_1 = 0, -l_1 \leq x_1 \leq \lambda_1, \text{ и } \lambda_2 \leq x_1 \leq l_1.$$

Дополнительное уравнение, связывающее раскрытие берегов концевых зон предразрушения и усилия в связях, в рассматриваемой задаче имеет вид

$$(v_1^+ - v_1^-) - i(u_1^+ - u_1^-) = \Pi(x_1, \sigma_1) [q_{y_1}(x_1) - iq_{x_1y_1}(x_1)], \quad (3)$$

где  $(v_1^+ - v_1^-)$  и  $(u_1^+ - u_1^-)$  – нормальная и касательная составляющие раскрытия берегов зоны предразрушения соответственно;  $\Pi(x_1, \sigma_1)$  – представляет собой податливость связей, зависящую от натяжения связей, при  $\Pi = \text{const}$  закон деформирования связей – линейный;  $\sigma_1 = \sqrt{q_{y_1}^2 + iq_{x_1y_1}^2}$  – модуль вектора сил сцепления в связях. В общем случае закон деформирования связей является нелинейным и задан.

### Решение задачи

Решение краевой задачи термоупругости (1) – (2) ищется в виде суммы двух решений

$$\sigma_r = \bar{\sigma}_r + \bar{\bar{\sigma}}_r; \quad \sigma_\theta = \bar{\sigma}_\theta + \bar{\bar{\sigma}}_\theta; \quad \tau_{r\theta} = \bar{\tau}_{r\theta} + \bar{\bar{\tau}}_{r\theta},$$

где  $\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\tau}_{r\theta}$  – решение задачи термоупругости для сплошной кольцевой области.

Для нахождения  $\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\tau}_{r\theta}$  используется [6] термоупругий потенциал перемещений  $F(r, \theta)$ , который в рассматриваемой задаче определяется решением следующего дифференциального уравнения:

$$\Delta F(x, y) = \beta T(x, y), \quad \beta = (1 + \nu)\alpha. \quad (4)$$

Здесь  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала кольцевого диска;  $\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения материала.

Для нахождения термоупругого потенциала перемещений  $F(x, y)$  используется метод разделения переменных. Введем вместо действительных переменных  $x, y$  комплексные переменные

$z = x + iy, \bar{z} = x - iy$  с помощью замены переменных  $x = \frac{z + \bar{z}}{2}, y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ . Тогда

$$T(x, y) = T\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2}\right) = f(z, \bar{z}); \quad \Delta F(x, y) = 4 \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}},$$

и дифференциальное уравнение (4) можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\beta}{4} f(z, \bar{z}).$$

Функцию  $F(z, \bar{z})$  (термоупругий потенциал перемещений) можно формально записать как

$$F(z, \bar{z}) = \frac{\beta}{4} \int dz \int \bar{z} f(z, \bar{z}) d\bar{z}.$$

Здесь переменная  $\bar{z}$  считается постоянной, когда берется интеграл вида  $\int^{\bar{z}}$ , а при взятии интеграла вида  $\int^z$  постоянной считается  $z$ .

На основании формул [6]

$$\bar{\sigma}_r = -2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right); \quad \bar{\sigma}_\theta = -2\mu \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}; \quad \bar{\tau}_{r\theta} = 2\mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right),$$

вычисляем напряжения  $\bar{\sigma}_r$ ,  $\bar{\sigma}_\theta$ ,  $\bar{\tau}_{r\theta}$ . Найденные таким образом напряжения  $\bar{\sigma}_r$ ,  $\bar{\sigma}_\theta$ ,  $\bar{\tau}_{r\theta}$  не удовлетворяют краевым условиям (1)–(2) задачи. Для нахождения второго напряженного состояния  $\bar{\bar{\sigma}}_r$ ,  $\bar{\bar{\sigma}}_\theta$ ,  $\bar{\bar{\tau}}_{r\theta}$  на основании условий (1)–(2) имеем следующие граничные условия:

$$\bar{\bar{\sigma}}_r = -\bar{\sigma}_r, \quad \bar{\bar{\tau}}_{r\theta} = -\bar{\tau}_{r\theta} \quad \text{на } L; \tag{5}$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_r = -\bar{\sigma}_r, \quad \bar{\bar{\tau}}_{r\theta} = -\bar{\tau}_{r\theta} \quad \text{на } L_1;$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{y_1} = -\bar{\sigma}_{y_1}, \quad \bar{\bar{\tau}}_{x_1 y_1} = -\bar{\tau}_{x_1 y_1} \quad \text{при } y_1 = 0 \text{ и } \lambda_1 < x_1 < \lambda_2; \tag{6}$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{y_1} = q_{y_1} - \bar{\sigma}_{y_1}, \quad \bar{\bar{\tau}}_{x_1 y_1} = q_{x_1 y_1} - \bar{\tau}_{x_1 y_1} \quad \text{при } y_1 = 0 \text{ и } \lambda_1 < x_1 < \lambda_2.$$

Используя формулы Колосова–Мухелишвили [7], краевая задача (5)–(6) сводится к отысканию двух аналитических в кольцевой области  $S$  функций  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  из краевых условий

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau} \Phi'(\tau) + \Psi(\tau)] = 0 \quad \text{при } \tau = R e^{i\theta};$$

$$\Phi(\tau_1) + \overline{\Phi(\tau_1)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau}_1 \Phi'(\tau_1) + \Psi(\tau_1)] = 0 \quad \text{при } \tau_1 = R_1 e^{i\theta};$$

$$\Phi(x_1) + \overline{\Phi(x_1)} + x_1 \overline{\Phi'(x_1)} + \overline{\Psi(x_1)} = -(\bar{\sigma}_{y_1} - i \bar{\tau}_{x_1 y_1}) \quad \text{при } y_1 = 0 \text{ и } \lambda_1 < x_1 < \lambda_2;$$

$$\Phi(x_1) + \overline{\Phi(x_1)} + x_1 \overline{\Phi'(x_1)} + \overline{\Psi(x_1)} = q_{y_1} - i q_{x_1 y_1} - (\bar{\sigma}_{y_1} - i \bar{\tau}_{x_1 y_1}) \quad \text{при } y_1 = 0 \text{ и } \lambda_1 < x_1 < \lambda_2.$$

Комплексные потенциалы  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  ищем в виде

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_2(z) + \Phi_3(z), \quad \Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_2(z) + \Psi_3(z);$$

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k; \quad \Psi_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k;$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l_1}^{l_1} \frac{g_1(t) dt}{t - z_1}; \quad \Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-2i\alpha_1} \int_{-l_1}^{l_1} \left[ \frac{\overline{g_1(t)}}{t - z_1} - \frac{\bar{T}_1 e^{i\alpha_1}}{(t - z_1)^2} g_1(t) \right] dt;$$

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l_1}^{l_1} \left\{ \left( \frac{1}{z\bar{T}_1 - 1} + \frac{1}{2} \right) \bar{T}_1 e^{i\alpha_1} g_1(t) + \left[ \frac{T_1}{2} - \frac{z^2 \bar{T}_1 - 2z + T_1}{(z\bar{T}_1 - 1)^2} \right] e^{-i\alpha_1} \overline{g_1(t)} \right\} dt;$$

$$\Psi_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l_1}^{l_1} \left[ \frac{e^{i\alpha_1} \bar{T}_1^3}{(z\bar{T}_1 - 1)^2} g_1(t) + (z^2 \bar{T}_1^2 + 4 - 3z\bar{T}_1 + zT_1 \bar{T}_1^2 - 3T_1 \bar{T}_1) \frac{\bar{T}_1 e^{-i\alpha_1}}{(z\bar{T}_1 - 1)^3} \overline{g_1(t)} \right] dt;$$

$$T_1 = t e^{i\alpha_1} + z_1^0; \quad z_1 = e^{-i\alpha_1} (z - z_1^0),$$

где  $g_1(x_1)$  – искомая функция, характеризующая раскрытие берегов трещины с концевыми зонами предразрушения в сечении неравномерно нагретого кольцевого диска.

Для определения комплексных потенциалов  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$  имеем следующую граничную задачу:

$$\Phi_0(\tau) + \overline{\Phi_0(\tau)} - e^{2i\theta} [\overline{\tau} \Phi_0'(\tau) + \Psi_0(\tau)] = -(f_1^0 - if_2^0); \quad (7)$$

$$\Phi_0(\tau_1) + \overline{\Phi_0(\tau_1)} - e^{2i\theta} [\overline{\tau_1} \Phi_0'(\tau_1) + \Psi_0(\tau_1)] = 0,$$

где  $\tau = R e^{i\theta}$ ;  $\tau_1 = R_1 e^{i\theta}$ ;  $f_1^0(\theta) - if_2^0(\theta) = \Phi_*(\tau) + \overline{\Phi_*(\tau)} - e^{2i\theta} [\overline{\tau} \Phi_*'(\tau) + \Psi_*(\tau)]$ ;  $\Phi_*(\tau) = \Phi_1(\tau) + \Phi_2(\tau)$ ;  $\Psi_*(\tau) = \Psi_1(\tau) + \Psi_2(\tau)$ .

Решение краевой задачи (7) получаем методом степенных рядов. Требуя, чтобы функции  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$  удовлетворяли граничным условиям (9) на круговых границах  $L$  и  $L_1$ , получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений [7].

Необходимо удовлетворить краевым условиям на берегах трещины с концевыми зонами предразрушения при  $y_1 = 0$ ,  $|x_1| \leq l_1$ . После некоторых преобразований получаем комплексное интегральное уравнение относительно искомой функции  $g_1(x_1)$

$$\int_{-l_1}^{l_1} [R(t, x_1)g_1(t) + S(t, x_1)\overline{g_1(t)}] dt = \pi f(x_1), \quad |x_1| \leq l_1, \quad (8)$$

$$f(x_1) = \begin{cases} -(\overline{\sigma}_{y_1}(x_1) - i\overline{\tau}_{x_1 y_1}(x_1)) + f_0(x_1) & \text{при } y_1 = 0 \quad \lambda_1 < x_1 < \lambda_2 \\ q_{y_1} - iq_{x_1 y_1} - (\overline{\sigma}_{y_1}(x_1) - i\overline{\tau}_{x_1 y_1}(x_1)) + f_0(x_1) & \text{при } y_1 = 0 \quad -l_1 \leq x_1 \leq \lambda_1 \text{ и } \lambda_2 \leq x_1 \leq l_1, \end{cases}$$

$$f_0(x_1) = -[\Phi_0(x_1) + \overline{\Phi_0(x_1)} + x_1 \overline{\Phi_0'(x_1)} + \overline{\Psi_0(x_1)}].$$

Функции  $R(t, x_1)$  и  $S(t, x_1)$  определяются по формулам (VI.61) монографии [8].

Для случая внутренней трещины с концевыми зонами предразрушения в сечении неравномерно нагретого кольцевого диска к сингулярному интегральному уравнению (8) необходимо добавить дополнительное равенство

$$\int_{-l_1}^{l_1} g_1(t) dt = 0,$$

обеспечивающее однозначность смещений при обходе контура трещины с концевыми зонами предразрушения.

Используя замену переменных, переходим к безразмерным переменным в интегральном уравнении (8). Применяя процедуру алгебраизации [8–10] к сингулярному интегральному уравнению (8) и дополнительному условию, получаем систему  $M$  комплексных алгебраических уравнений для нахождения  $M$  неизвестных  $g_1(t_m) = v_1^0(t_m) - iu_1^0(t_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ )

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M l_1 [\varphi_0(t_m) R(l_1 t_m, l_1 \eta_r) + \overline{\varphi_0(t_m)} S(l_1 t_m, l_1 \eta_r)] = f(\eta_r), \quad (9)$$

$$\sum_{m=1}^M \varphi_0(t_m) = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, M - 1),$$

$$t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi, \quad (m = 1, 2, \dots, M); \quad x_r = \cos \frac{\pi r}{M}, \quad (r = 1, 2, \dots, M - 1).$$

Так как напряжения в неравномерно нагретом диске ограничены, то для замкнутости алгебраической системы (9) необходимо добавить условия разрешимости краевой задачи

$$\sum_{m=1}^M (-1)^m \varphi_0(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0; \quad (10)$$

$$\sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} \varphi_0(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0;$$

В правые части алгебраической системы (9) входят неизвестные значения напряжений  $q_{y_1}$  и  $q_{x_1y_1}$  в связях между берегами концевых зон трещины. Для получения недостающих уравнений для определения приближенных значений  $q_{y_1}$  и  $q_{x_1y_1}$  используется дополнительное уравнение (3). Применяя полученное решение, уравнение (3) запишем в виде

$$g_1(x_1) = \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dx_1} \left[ \Pi(x_1, \sigma_1)(q_{y_1}(x_1) - iq_{x_1y_1}(x_1)) \right]. \quad (11)$$

Для построения недостающих уравнений, служащих для определения напряжений в связях между берегами предразрушения, потребуем выполнения условий (14) в узловых точках  $t_m$ , содержащихся в концевых зонах. В результате получим еще две системы из  $M_1$  уравнений для определения приближенных значений  $q_{y_1}(t_m)$  и  $q_{x_1y_1}(t_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M_1$ ) соответственно. При этом используется метод конечных разностей.

Полученная система из  $M + M_1 + 2$  уравнений из-за неизвестных размеров концевых зон предразрушения является нелинейной даже для случая линейно-упругих связей. Для численного решения алгебраической системы (9)–(11) использовался алгоритм метода последовательных приближений и метод упругих решений А. А. Ильюшина, при этом в каждом приближении линейная алгебраическая система решалась методом Гаусса с выбором главного элемента. В случае нелинейного закона деформирования связей усилия в связях определяются с помощью итерационного метода, подобного методу упругих решений. Закон деформирования связей считается линейным при  $V = \sqrt{u^2 + v^2} \leq V_*$ . На первом шаге итерационного процесса решается система разрешающих уравнений для линейно-упругих связей, последующие итерации выполняются, если на части концевых зон предразрушения имеет место неравенство  $V > V_*$ . В этом случае решается система разрешающих уравнений для квазиупругих связей с эффективной податливостью, переменной вдоль концевых зон и зависящей от значения модуля вектора усилий, полученного на предыдущей итерации. Эффективная податливость определяется подобно секущему модулю в методе переменных параметров упругости. Когда усилия в связях, полученные на двух последовательных итерациях, мало различаются, процедура последовательных приближений завершается.

Нелинейная часть кривой деформирования связей была представлена в виде билинейной зависимости, причем восходящий участок соответствовал упругому деформированию связей ( $0 < V < V_*$ ) с их максимальным натяжением, а при  $V > V_*$  кривая деформирования связей задавалась нелинейной зависимостью определяемой точками  $(V_*, \sigma_*)$  и  $(\delta_{cr}, \sigma_{cr})$ . При  $\sigma_{cr} \geq \sigma_*$  имеет место возрастающая линейная зависимость (линейное упрочнение, соответствующее упругопластической деформации связей).

Используя полученное решение и произведя некоторые преобразования, находим раскрытие трещины у края концевой зоны предразрушения

– для левой вершины

$$v_1^+(\lambda_1, 0) - v_1^-(\lambda_1, 0) = -\pi \frac{1+\kappa}{2\mu} \frac{l_1}{M} \sum_{m=1}^{M_1} v_1^0(t_m); \quad u_1^+(\lambda_1, 0) - u_1^-(\lambda_1, 0) = -\pi \frac{1+\kappa}{2\mu} \frac{l_1}{M} \sum_{m=1}^{M_1} u_1^0(t_m);$$

– для правой вершины трещины

$$v_1^+(\lambda_2, 0) - v_1^-(\lambda_2, 0) = -\pi \frac{1+\kappa}{2\mu} \frac{l_1}{M} \sum_{m=1}^{M_2} v_1^0(t_m); \quad u_1^+(\lambda_2, 0) - u_1^-(\lambda_2, 0) = -\pi \frac{1+\kappa}{2\mu} \frac{l_1}{M} \sum_{m=1}^{M_2} u_1^0(t_m).$$

Для модуля раскрытия берегов трещины у основания концевой зоны предразрушения находим:

– для левой вершины трещины

$$V_1^l = \pi \frac{1+\kappa}{2\mu} \frac{l_1}{M} \sqrt{A_1^2 + B_1^2};$$

– для правой вершины трещины

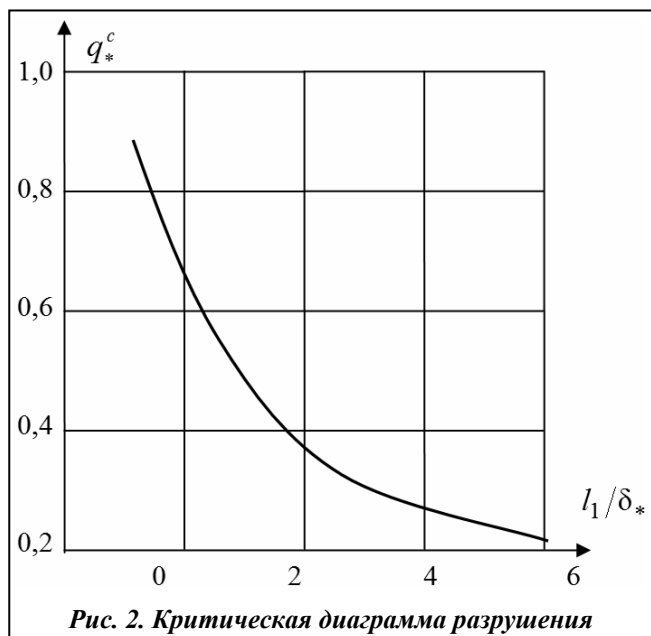


Рис. 2. Критическая диаграмма разрушения

$$V_1^n = \pi \frac{1+\kappa}{2\mu} \frac{l_1}{M} \sqrt{C_1^2 + D_1^2}.$$

Условием, определяющим критическое значение теплового воздействия на кольцевой диск, при котором происходит рост трещины будет:

– для левой вершины трещины

$$V_1^n = \delta_{cr};$$

– для правой вершины трещины

$$V_1^n = \delta_{cr}.$$

Совместное решение полученных уравнений и критерия разрушения позволяет при заданных характеристиках неравномерно нагретого кольцевого диска найти критическую величину теплового воздействия на диск и размеры концевых зон предразрушения для состояния предельного равновесия, при котором происходит разви-

тие трещины. Выбирая различные значения параметров  $\alpha_1$  и  $z_1^0$  можно исследовать разные случаи расположения трещины в неравномерно нагретом кольцевом диске.

На рис. 2 представлена критическая диаграмма разрушения (зависимость критической интенсивности теплового воздействия  $q_*^c$  от относительной длины трещины  $l_1/\delta_*$ ) для правой вершины трещины при  $\alpha_1 = 45^\circ$ . Здесь  $\delta_* = \frac{\pi \delta_c \mu}{(1+\kappa)\sigma_*}$ .

При проектировании элементов механизмов и конструкций в виде кольцевого диска его параметры необходимо подбирать таким образом, чтобы максимальная интенсивность теплового воздействия не превышала некоторого критического значения, вызывающего рост трещины. Это условие можно записать в виде

$$q_{*max} < q_*^c,$$

где  $q_{*max}$  – максимальная интенсивность теплового воздействия в кольцевом диске.

## Выводы

Знание основных значений критических параметров разрушения и влияния на них свойств материала кольцевого диска дает возможность обоснованно управлять процессом роста трещины путем выбора конструкторско-технологических решений при проектировании. С помощью разработанной математической модели на стадии проектирования возможно оценивать гарантированный ресурс кольцевого диска с учетом ожидаемых дефектов и условий нагружения; устанавливать допустимый уровень дефектности, максимальные значения рабочих нагрузок; выбирать материал диска с требуемыми статическими и циклическими характеристиками трещиностойкости.

## Литература

1. Саврук, М. П. Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие. Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / М. П. Саврук. – Киев: Наук. думка, 1988. – 620 с.
2. Саврук, М. П. Численный анализ в плоских задачах теории трещин / М. П. Саврук, П. Н. Осив, И. В. Прокочук. – Киев: Наук думка, 1989. – 248 с.
3. The special issue: Cohesive models // Eng. Fract. Mech. – 2003. – Vol. 70, № 14. – P. 1741–1987.
4. Мирсалимов, В. М. К решению задачи механики контактного разрушения о зарождении и развитии трещины со связями между берегами во втулке фрикционной пары / В. М. Мирсалимов // Прикл. Математика и механика. – 2007. – Т. 71, вып. 1. – С. 132–151.
5. Коваленко, А. Д. Основы термоупругости / А. Д. Коваленко. – Киев: Наук. думка, 1970. – 308 с.
6. Паркус, Г. Неустановившиеся температурные напряжения / Г. Паркус. – М.: Физматгиз, 1963. – 252 с.

7. Мусхелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
8. Каландия, А. И. Математические методы двумерной упругости / А. И. Каландия. – М.: Наука, 1973. – 304 с.
9. Мирсалимов, В. М. Неодномерные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
10. Панасюк, В. В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. – Киев. Наук. думка, 1976. – 443 с.

Поступила в редакцию 12.08.14

**М. А. Чугай,**  
канд. техн. наук

Институт проблем  
машиностроения  
им. А. Н. Подгорного  
НАН Украины, Харьков  
e-mail:  
chugay@ipmach.kharkov.ua

УДК 539.3

## ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ ЛОПАТОЧНОГО АППАРАТА ТУРБОМАШИН

*Досліджується вібраційний стан лопаткового апарата турбомашин з пошкодженнями. Моделювання об'єктів проводилося на підставі тривимірного підходу методу скінченних елементів з використанням спеціальних сингулярних скінченних елементів, що відображають особливості напружено-деформованого стану в околі вершини тріщини. Використання тривимірних скінченноелементних моделей забезпечило можливість детального аналізу вібраційної міцності елементів лопаткового апарата з пошкодженнями.*

**Ключові слова:** робочі лопатки, пошкодження, спеціальні скінченні елементи, вібраційні характеристики, локалізація напружень, метод скінченних елементів.

### Введение

На вибрационную прочность лопаточного аппарата современных турбомашин наибольшее влияние оказывает локализация напряжений в ограниченных зонах лопаток. Эта локализация предопределена конструкционными, технологическими и эксплуатационными факторами. Сложная конструктивная форма и особенности технологической обработки лопаток являются причиной возникновения зон повышенных напряжений при их колебаниях. В процессе эксплуатации могут возникать повреждения, что также приводят к локализации вибрационных напряжений и, возможно, к разрушению элементов лопаточного аппарата турбомашин. Причинами повреждений могут быть дефекты лопаток при изготовлении, усталостные трещины, эрозия, коррозия и воздействие посторонних предметов [1–3].

### 1. Постановка задачи

Существует в основном два подхода для построения конечноэлементных (КЭ) моделей конструкций с повреждением. Первый использует разбиение всей исследуемой области обычными конечными элементами с существенным сгущением сетки элементов по мере приближения к вершине повреждения. Второй заключается в применении специальных элементов, окружающих вершину повреждения, что позволяет учитывать особенности распределения напряжений вблизи повреждения [4–6]. Специальными эти элементы называются потому, что при вычислении матрицы жесткости в них задаются отличные от обычных функции перемещений, которые содержат член, пропорциональный  $\sqrt{r}$ . Они отличаются от обычных КЭ тем, что их промежуточные узлы сдвинуты на четверть длины стороны в направлении вершины трещины. Такие элементы могут иметь особенности вида  $O(r^{-1/2})$  для напряжений, достаточно хорошо описывают изменение напряжений и перемещений в вершине трещины, полностью совместные с обычными квадратичными элементами и отражают смещение тела как целого, и для них остаются справедливыми теоремы о сходимости решения к точному для обычных элементов.