мились показать возможности метода R-функций, поэтому фасад несколько перегружен декоративными элементами. Компьютерная реализация выполнена с помощью [6].

Выводы

В данной работе теория R-функций впервые применяется к математическому и компьютерному моделированию строительных конструкций. Аналитическая идентификация проектируемых объектов дает возможность использовать буквенные геометрические параметры, что, в свою очередь, позволяет оперативно изменять конструктивные элементы проектируемого объекта. При реализации построенных моделей на 3D-принтере заполнение строительным материалом происходит при $w \ge 0$ ($f_{fin} \ge 0$). Заметим, что может возникнуть техническая проблема из-за неодносвязности рассматриваемых объектов. Решить ее весьма просто: оконные и дверные проемы можно выполнять из другого материала, вставив в программу соответствующие дополнения, что легко осуществить с помощью R-функций; либо проводить построение в три этапа: при $z \le h_1$, $h_1 \le z \le H$, $z > H$.

Литература

1. http://www.bbc.co.uk/ukrainian/ukraine_in_russian/2013/04/130416_ru_s_3d_building_amsterdam.shtml
2. *Рвачев, В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – Киев: Наук.думка, 1982. – 552 с.
3. *Rvachev, V. L.* R-functions in boundary value problems in mechanics / V. L. Rvachev, T. I. Sheiko // Appl. Mech. Reviews. – 1995. – Vol. 48, №. 4. – P. 151–188.
4. *Максименко–Шейко, К. В.* R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей / К. В. Максименко-Шейко. – Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2009. – 306 с.
5. *R-функции* в компьютерном моделировании дизайна автомобиля / Д. А. Лисин, К. В. Максименко-Шейко, А. В. Толок, Т. И. Шейко // Прикл. информатика. – 2011. – № 6 (36). – С. 78–85.
6. *Лісін, Д. О.* Комп’ютерна програма «Система візуалізації та побудови сітки на поверхні геометричних об’єктів, які описані за допомогою математичних засобів теорії R-функцій «RFPreview» // Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір. – 2012. – № 45951.

Поступила в редакцию 28.08.14

Н. А. Дёмина, канд. техн. наук

Таврический государственный агротехнологический университет, г. Мелитополь,
e-mail:deminanatasha@yandex.ru

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ШТАМПОВОЙ ОСНАСТКИ

Ключові слова: *математична модель, система призматичних тіл, контактна взаємодія, метод варіаційних нерівностей.*

Описана математична постановка задачі про контактну взаємодію системи призматичних тіл. За допомогою теорії варіаційних нерівностей задача зводиться до проблеми мінімізації випуклого функціонала на випуклій множині функцій.

Анализ контактного взаимодействия является актуальной задачей математики и механики. Для этого привлекаются различные методы: граничных интегральных уравнений, штрафных функций, метод конечных элементов и т. п. [1–7]. Они имеют определенные преимущества и недостатки, проявляющиеся для различного типа задач.

В частности, возникает проблема разработки эффективных постановок для задач о множественном контакте системы нескольких призматических тел. Например, такие задачи возникают при анализе напряженно-деформированного состояния (НДС) элементов штамповой оснастки [8]. При этом для моделирования контактного взаимодействия применяются различные упрощенные постановки, предусматривающие, в частности, раздельное моделирование НДС контактирующих тел. Это может приводить к значительным погрешностям в результатах анализа. В связи с этим возникает актуальная задача разработки математических моделей контактного взаимодействия системы призматических тел, адаптированных для эффективной численной реализации, свободной от различных упрощающих предположений.

Рассмотрим систему призматических тел, контактирующих по плоским поверхностям. На рис. 1 приведена схема такого взаимодействия, отнесенная к локальным “кромочным” координатам для фрагмента из двух тел.

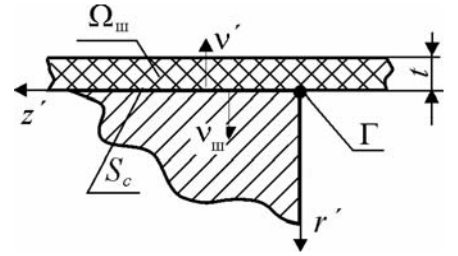

Рис. 1. Схема взаимодействия элементов системы призматических тел: $\Omega_ш$ – область пространства, занимаемая телом 1; S_c – зона возможного контактного взаимодействия; ν‘, $\nu_ш$ – нормали к поверхностям тел 1 и 2 соответственно

Тогда, кроме системы уравнений теории упругости [7], дополненной кинематическими граничными условиями на частях поверхности S_u, добавляются следующие условия на части поверхности возможного контакта (см. рис. 1):

$$u_{\nu'} + u_{\nu_ш} \le \delta_c , \tag{1}$$

Здесь $u_{\nu'}$, $u_{\nu_ш}$ – перемещения точек режущего элемента и заготовки по нормалям к поверхностям; δ_c – начальный зазор в сопряжении.

При решении нелинейной задачи получаем не постулируемый заранее закон распределения контактных нагрузок q_c, а искомый закон их распределения в качестве еще одного неизвестного полученной задачи. При этом в качестве параметра нагружения можно взять или величину усилия прижатия

$$\int\limits_{(S_c)} q_c ds = P_{шт} , \tag{2}$$

или величину хода некоторого нагружаемого тела из некоторой нулевой точки Δ, и тогда

$$u\,|_{S_u^n} = \Delta . \tag{3}$$

Соотношение (2) задает силовое нагружение, а (3) – кинематическое.

Несмотря на кажущуюся простоту соотношения (1), получаемая в результате задача по сравнению с классической задачей линейной теории упругости становится более сложной, существенно нелинейной, причем в качестве дополнительных неизвестных выступают конфигурации контактных зон и распределения контактных нагрузок [8]. Для решения таких задач используется, в частности, метод вариационных неравенств [9], сводящий ее к проблеме минимизации функционала полной внутренней энергии Э исследуемой системы тел на множестве, задаваемом ограничениями (1)

$$Э(u) \to \min. \tag{4}$$

Рассмотрим, следуя [6, 9–12], постановку задачи об исследовании напряженно-деформированного состояния сопряженных призматических тел с учетом условий контакта. Не нарушая общности, можно рассмотреть два соприкасающихся тела Ω и Ω‘. Пусть S_c, S_c’ – предельно возможные зоны контакта. Уравнения, описывающие поверхности S_c и S_c’, примем в форме

$$\Psi(r) = 0, \quad \Psi‘(r’) = 0 \tag{5}$$

и выберем функции Ψ, Ψ‘ таким образом, чтобы было

$$\Psi(r) > 0 \text{ при } r \in \Omega \text{ и } \Psi‘(r) < 0 \text{ при } r \in \Omega \tag{6}$$

(для функции Ψ‘ – аналогично).

В результате деформации поверхности S_c и S_c’ изменяются; в первом приближении искажение формы границы тела (6) определяется нормальными (вдоль ν) перемещениями лежащих на границе частиц. Рассмотрим для определенности тело Ω; пусть r_0 – радиус-векторы частиц S_c до деформации; r – после деформации, имеем

$$r = r_0 + u(r_0). \tag{7}$$

Из уравнения (5) и представления (7) вытекает, что

$$\Psi\,(r - u(r_0)) = 0. \tag{8}$$

Предположим, что Ψ – дифференцируемая функция с ограниченными вторыми производными; разлагая (8) в ряд Тейлора и ограничиваясь линейными по u слагаемыми, перейдем от уравнения (8) к уравнению

$$\frac{\Psi(r)}{|\nabla\Psi(r_0)|} - u\cdot v(r_0) \equiv (r, r_0) - u_{vN}(r_0) = 0\,. \tag{9}$$

Полученная зависимость (9) означает, что в первом приближении форма деформированной границы определяется нормальными перемещениями лежащих на ней частиц.

Условие непроникновения на S_c, S_c’ строятся в первом приближении по величине перемещений и зазора между телами Ω и Ω‘.

Пусть r_0’ – радиус-векторы точек S_c’ до деформации; в результате деформации, определяемой полем перемещений u’, эти точки займут положение

$$r = r_0' + u_{vN}' v'(r') \equiv r_0' + u_{vb}(r')\,. \tag{10}$$

Опустим из точки r^* перпендикуляр на поверхность S_c, радиус-вектор точки пересечения этого перпендикуляра с S_c обозначим r_{00}. С учетом (10) имеет место неравенство

$$u_{\nu N}(r_0) \le \delta^* = (r^* - r_{00})\cdot v(r_{00}). \tag{11}$$

Очевидно, что $r_{00} = r_{00}(r_0', u_{vb}')$; линеаризуем эту зависимость по нормальным перемещениям и по величине (r_0’ – r_0), называемую зазором, где r_0 – радиус-вектор точки пересечения перпендикуляра, проведенного из точки r_0’ к поверхности S_c’, с поверхностью S_c. Заметим, что в неравенстве (11) r_{00} с принятой точностью можно заменить на r_0

$$[u_{\nu b}(r_0') + r_0' - r_0]\cdot\nu(r_0) - u_{\nu N}(r_0) \ge 0, \quad \forall r_0 \in S_c, \quad r_0' = r_0'(r_0). \tag{12}$$

Это соотношение (12) отражает условие непроникновения тел Ω и Ω‘ друг в друга. Зависимость r_0’(r_0) определяется из формулы $r_0' = r_0 + t_0\nabla\Psi(r_0)$, где t_0 – корень уравнения

$$\Psi'(r_0 + t_0\nabla\Psi(r_0)) = 0. \tag{13}$$

После линеаризации (13)

$$r_0'(r_0) = r_0 - \varphi'(r_0, r_0)\cdot\nu(r_0)/(\nu(r_0)\cdot\nu'(r_0)). \tag{14}$$

Формально условие (14) можно записать в виде

$$u_{vN} + u_{vN}' \le \delta\,, \tag{15}$$

где δ – зазор в сопряжении элементов штамповой оснастки.

Из принципа возможных перемещений для каждого из тел Ω можно написать вариационное уравнение

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega^\alpha}\sigma_{ij}(u^\alpha)\delta\varepsilon_{ij}d\Omega - \int\limits_{\Omega^\alpha}\rho^\alpha F\cdot\delta u^\alpha d\Omega - \int\limits_{S_\alpha^\sigma}P^\alpha\delta u^\alpha dS - \int\limits_{S_c^\alpha}\sigma_{ij}(u^\alpha)\cdot\delta u_i^\alpha v_j^\alpha dS \\ a^\alpha(u^\alpha, \delta u^\alpha) - L^\alpha(\delta u^\alpha) - \int\limits_{S_c^\alpha}\sigma_{ij}(u^\alpha)\cdot\delta u_i^\alpha v_j^\alpha dS = 0, \qquad \forall\delta u^\alpha, \quad \alpha = 1,\ldots,M.\end{gathered} \tag{16}$$

В уравнении (16) $\delta u^\alpha \equiv u^\alpha - v^\alpha$ – возможное перемещение из истинного состояния; как истинное поле перемещений u^α, так и кинематически допустимое поле v^α должны удовлетворять условию непроникновения (15).

Для удобства дальнейших формулировок формализуем проводимые построения следующим образом. Введем пространства:

$$V^\alpha = \{v \mid v = v(r), r \in \Omega^\alpha;\ v \mid S_u^{\varepsilon} = 0, v \in H^1(\Omega^\alpha)\}, \quad \alpha = 1, \ldots, M; \tag{17}$$

и их прямое произведение

$$V = V^1 \otimes \ldots \otimes V^M. \tag{18}$$

Определим далее на (17), (18) формы

$$a(u, v) = \sum_\alpha a^\alpha(u, v), \qquad L(v) = \sum_\alpha L^\alpha(v) \tag{19}$$

ISSN 0131–2928. Пробл. машиностроения, 2014, Т. 17, № 3

(через u, v обозначен произвольный элемент V).

В пространстве V введем подмножество функций K по формуле

$$K = \{v \mid v \in V;\ v_{vN}^{\alpha} + v_{vN}^{\beta} \le \delta\}\,. \tag{20}$$

Индексы α и β определяют номера тел, соприкасающихся по кускам своих границ. Суммируя все равенства (16), найдем (здесь и ниже суммирование ведется по всем номерам тел в (19))

$$a(u, \delta u) = L(\delta u) + \sum_{\alpha} \int_{S_c^{\alpha}} \sigma_{ij}(u^{\alpha}) \cdot \delta u_i^{\alpha} v_j^{\alpha} dS\,. \tag{21}$$

Решение задачи в дифференциальной постановке, как следует из [9–12], удовлетворяет вариационному неравенству, вытекающему из вариационного уравнения (21):

$$a(u, \delta u) \ge L(\delta u) \qquad \forall \delta u, \quad v \in K, \quad u \in K. \tag{22}$$

Справедливо утверждение [12]: решение вариационного неравенства (22), если оно существует и обладает вторыми производными (хотя бы обобщенными), удовлетворяет всем уравнениям и условиям задачи в дифференциальной постановке, а решение вариационного неравенства (22) эквивалентно проблеме минимизации функционала

$$J(v) = 1/2a(v, v) - L(v)$$

на подмножестве K (20) пространства V (см. (4)).

Выводы

Естественно, что по сравнению с общей постановкой [12], решаемая задача об определении напряженно-деформированного состояния элементов системы призматических тел с учетом их контактного взаимодействия обладает целым рядом специфических особенностей, основные из которых состоят в следующем:

1. Сопрягаемые элементы взаимодействуют по поверхностям с согласованной геометрией [6], что существенно усиливает строгость принятых в [12] предположений о геометрии контактирующих поверхностей;

2. Принятые в [12] модели предполагают малые перемещения точек поверхностей взаимодействующих тел, что ограничивает область применяемости данной модели;

3. Несмотря на то, что взаимодействующие поверхности контактирующих тел – плоские, область контакта и распределение контактного давления по-прежнему являются в данной задаче искомыми (как и в общем случае).

В результате приходим к возможности вариационной постановки нелинейной контактной задачи теории упругости для элементов системы призматических тел, в ходе решения которой определяются и контактные зоны, и давления.

Предложенная в работе методика будет в дальнейшем использована для исследования напряженно-деформированного состояния элементов штамповой оснастки с учетом контактного взаимодействия.

Литература

1. *Галин, Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л. А. Галин. – М.: Наука, 1980. – 303 с.
2. *Крауч, С.* Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд. – М.: Мир, 1987. – 328 с.
3. *Аргатов, И. И.* Основы теории упругого дискретного контакта / И. И. Аргатов, Н. Н. Дмитриев – СПб: Политехника, 2003. – 233 с.
4. *Зенкевич, О. К.* Метод конечных элементов в технике / О. К. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
5. *Hughes, T. J. R.* The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. – Courier Dover Publications, 2012. – 672 c.
6. *Джонсон, К.* Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 509 с.
7. *Васидзу, К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
8. *Дьоміна, Н. А.* Удосконалення методів розрахунку елементів штампового оснащення на основі аналізу їх напружено-деформованого стану: Автореф. дис. канд. техн. наук: / Н. А. Дьоміна – Харків, 2011. – 20 с.
9. *Кравчук, А. С.* К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров / А. С. Кравчук // Прикл. математика и механика. – 1977. –Т. 41, вып. 2. – С. 329–337.

10. *Кравчук, А. С.* Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования / А. С. Кравчук // Прикл. математика и механика. – 1978. –Т. 42, вып. 3. – С. 466–474.
11. *Дюво, Г.* Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж. Л. Лионс. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
12. *Колтунов, М. А.* Прикладная механика деформируемого твердого тела / М. А. Колтунов, А. С. Кравчук, В. П. Майборода. – М.: Высш. шк., 1983. – 349 с.

Поступила в редакцию 22.07.14

А. М. Чугай
канд. техн. наук

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины,
г. Харьков, e-mail: chugay@ipmach.kharkov.ua

Ключові слова: *Ф-функція, локальна оптимізація, циліндри, сфероциліндри*

УДК 519.859

ОДИН ИЗ ПОДХОДОВ К ПОИСКУ ХОРОШИХ ЛОКАЛЬНЫХ МИНИМУМОВ В ЗАДАЧЕ РАЗМЕЩЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Запропоновано один із підходів, що дозволяє підвищити ефективність пошуку локальних мінімумів в задачах розміщення циліндрів. Запропонований підхід дозволяє вирішити проблему потрапляння в «погані» несуворі локальні мінімуми за рахунок заміни циліндрів на початковому етапі розв'язання задачі сфероціліндрами. Крім того, властивості математичної моделі, що ґрунтуються на вигляді Ф-функцій, дозволили запропонувати спосіб значного скорочення часових і обчислювальних витрат при пошуку локальних мінімумів.

Введение

На сегодняшний день стремительно растет интерес к эффективному решению задач размещения трехмерных объектов, что объясняется разнообразием практических приложений и чрезвычайной сложностью математических моделей и методов их решения. Различные вопросы задач размещения трехмерных объектов рассматриваются во многих работах для различных научно-исследовательских и прикладных областей. В частности, задачи, связанные с поиском оптимального размещения цилиндрических объектов, возникают, например, при планировании плотного размещения грузов различного характера на складах и хранилищах, в различных транспортных средствах.

Анализ литературных данных и постановка проблем

Работы, связанные с поиском оптимального размещения цилиндров, в основном рассматривают различные эвристические подходы [1, 2], в которых трехмерные задачи из-за сложности решения сводятся к двухмерным.

В работе [3] для решения задачи размещения цилиндров вместо эвристических алгоритмов предложен подход, основанный на формулировке задачи в виде задачи нелинейного программирования. Однако авторы все равно сводят задачу к двухмерному случаю и размещают одинаковые круги.

Благодаря использованию аппарата Ф-функций в работе [4] задача упаковки различных цилиндров была сформулирована и решена как задача математического программирования.

Однако вследствие того, что в работе применяется градиентный метод (метод возможных направлений), локальная оптимизация в задаче размещения цилиндров приводит в нестрогие локальные минимумы. Например, на рис. 1 показан нестрогий локальный минимум (в данном примере минимизируется высота области размещения), который может быть улучшен за счет смещения вниз самого верхнего цилиндра.

Получение плохих локальных минимумов в задаче размещения цилиндров связано с тем, что при применении метода возможных направлений в таких точках траектории градиентов ограничений «взаимопогашаются» и не позволяют вычислить вектор «спуска».

Целью данной статьи является разработка нового эффективного подхода к поиску локальных минимумов в задаче размещения цилиндров.