

П. П. Шигорін,

канд. фіз.-мат. наук

Східноєвропейський
національний університет
імені Лесі Українки,
м. Луцьк,
e-mail: pashyh@gmail.com**Ключові слова:** сферичне тіло,
динаміка, обертальний рух,
стійкий стан.

УДК 531.383, 62-752.4

**ДИНАМІКА ОБЕРТАННЯ СФЕРИЧНОГО ТІЛА ЗІ
ЗМІЩЕНИМ ЦЕНТРОМ МАС***Розглянуто теоретичний опис механіки обертання сферичного тіла зі зміщеним центром мас (СТЗЦМ). На основі загальних рівнянь динаміки твердого тіла побудовані рівняння поступального та обертального руху СТЗЦМ. Проаналізовано розв'язки цих рівнянь поблизу точки перевертання. Розраховано критичну частоту обертання, за якої тіло перевертається зі стійкого стану в нестійкий.***Вступ**

Процес обертання сферичного тіла зі зміщеним центром мас є аналогічним до процесу обертання так званої дзиги «Тірре Тор», або дзиги Томсона, що має властивість перевертатися у процесі обертання [1].

Як відомо [2], динаміка «звичайної» дзиги характеризується такими особливостями: напрямок обертання постійно зберігається; у процесі обертання точка на дзигі, яка дотикається поверхні є незмінною; відстань від центру тяжіння дзиги до точки опори також є незмінною. На перший погляд здається, що ці три властивості повинні виконуватися для будь-якої дзиги (яка не містить внутрішнього джерела енергії). Проте нерівномірний розподіл маси по тілу дзиги може привести до іншого характеру обертання, зокрема після початку обертання дзига перевертається і починає обертатися, дотикаючись до поверхні іншою точкою, причому центр мас підіймається вгору. Саме таку властивість має так звана дзига Томсона.

Фізика «Тірре Тор» надзвичайно складна і на цей момент вивчена частково, лише для вузького класу дзиг. Вважається [3], що перевертання дзиги пов'язане з виникненням прецесії під дією моменту сил тертя дзиги по поверхні.

Дана робота присвячена побудові на основі перших принципів рівнянь механіки СТЗЦМ. Висновки, одержані на основі аналізу цих рівнянь, можуть бути використані для опису загальних властивостей руху дзиги типу «Тірре Тор».

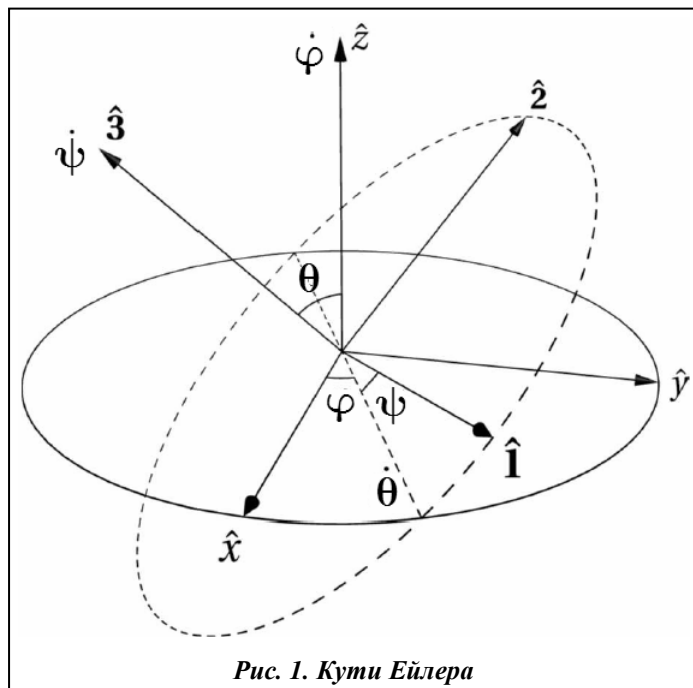


Рис. 1. Кути Ейлера

Теоретична модель

Перед тим як проводити побудову рівнянь механіки СТЗЦМ, нагадаємо метод опису динаміки твердого тіла на основі кутів Ейлера. Для опису орієнтації твердого тіла у просторі розглядають три кути Ейлера (θ, φ, ψ). Ці кути визначають орієнтацію системи $\tilde{K} = (\hat{1}, \hat{2}, \hat{3})$ відносно фіксованої системи відліку $K = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ (див. рис. 1). Тут $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ – одиничні вектори вздовж відповідних осей. Зауважимо, що площина $\hat{1}\hat{2}$ і площина $\hat{x}\hat{y}$ перетинаються вздовж лінії вузлів. Кут θ – кут між осями $\hat{3}$ та \hat{z} . Він змінюється у межах $[0, \pi]$. Кут φ – кут між лінією вузлів та віссю \hat{x} , він змінюється у межах $[0, 2\pi]$. Третій кут ψ є кутом між лінією вузлів та віссю $\hat{1}$, він також змінюється в межах $[0, 2\pi]$.

Запровадимо матрицю перетворень координат \mathbf{R} від системи відліку K до системи \tilde{K}

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{1}} \\ \hat{\mathbf{2}} \\ \hat{\mathbf{3}} \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Ця матриця виражається через кути Ейлера таким чином [3]:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & -\cos \theta \sin \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi \end{bmatrix}$$

Компоненти кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$ відносно системи відліку \tilde{K} можна виразити через кути Ейлера

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \hat{\mathbf{1}} + \omega_2 \hat{\mathbf{2}} + \omega_3 \hat{\mathbf{3}}, \quad (3)$$

де

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{cases}$$

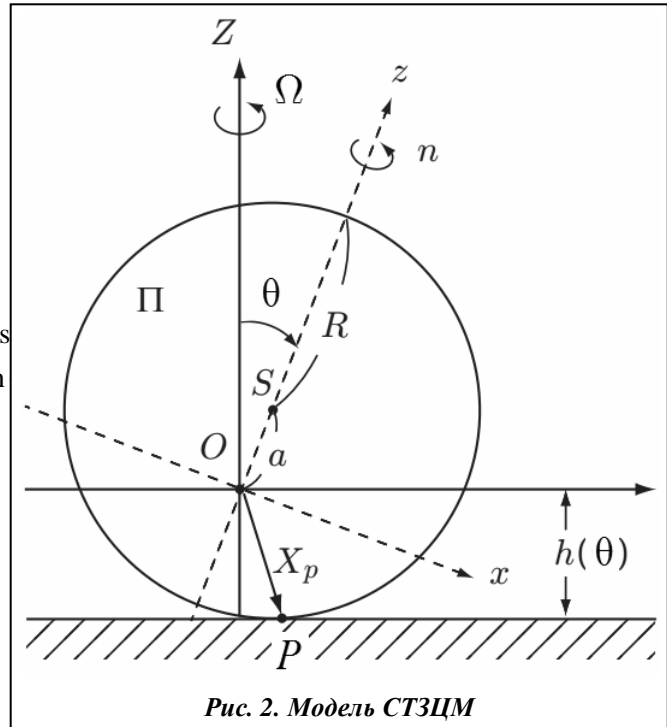


Рис. 2. Модель СТЗЦМ

Перейдемо до опису динаміки СТЗЦМ. Розглянемо модель сферичного тіла масою m та радіусом R , яке знаходиться на горизонтальній площині в полі земного тяжіння (див. рис. 2). Геометричний центр тіла знаходиться в точці S , центр мас – у точці O . Позначимо відстань між геометричним центром та центром мас через a . Позначимо вісь симетрії тіла через Oz (система відліку \tilde{K}). Вертикальна вісь системи OZ (система відліку K). Ці осі визначають площину Π , яка здійснює прецесію навколо осі OZ із кутовою швидкістю $\boldsymbol{\Omega}(t) = (0, 0, \Omega)$, $\Omega = \dot{\varphi}$ (φ – кут Ейлера).

Відстань від центру мас (точки O) до площини позначимо через h . Ця відстань буде функцією кута Ейлера θ . З рис. 2 випливає, що

$$H = h(\theta) = R - a \cos \theta.$$

Позначимо точку дотику тіла до поверхні через P . Тоді радіус-вектор цієї точки в системі відліку K буде мати координати $\mathbf{X}_P = (X_P, 0, Z_P)$, де

$$X_P = a \sin \theta = \frac{dh}{d\theta}, \quad Z_P = -h(\theta). \quad (4)$$

У системі відліку \tilde{K} ($Ox\tilde{y}z\tilde{}$) дзига обертається навколо осі Oz із кутовою швидкістю $\dot{\psi}$. На основі формули (3) знаходимо, що в системі відліку \tilde{K}

$$\boldsymbol{\Omega} = -\Omega \sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \Omega \cos \theta \hat{\mathbf{z}}. \quad (5)$$

Тоді кутова швидкість СТЗЦМ $\boldsymbol{\omega}$ буде визначатись як

$$\boldsymbol{\omega} = -\Omega \sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \dot{\theta} \hat{\mathbf{y}} + n \hat{\mathbf{z}}, \quad (6)$$

де $n = \Omega \cos \theta + \dot{\psi}$.

Вираз для кутового моменту нашого тіла знайдемо зі співвідношення

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}.$$

Оскільки осі Oy та Ox є головними осями, то на основі (6) вектор кутового моменту визначається формулою

$$\mathbf{L} = -A\Omega \sin \theta \hat{\mathbf{x}} + A\dot{\theta} \hat{\mathbf{y}} + Cn \hat{\mathbf{z}}, \quad (7)$$

де (A, A, C) — головні моменти інерції тензора інерції тіла \mathbf{I} .

На основі співвідношень (1) та (2) знаходимо вирази для компонент векторів фізичних величин (6) та (7) в нерухомій системі відліку K

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \left((n - \Omega \cos \theta) \sin \theta, \dot{\theta}, \Omega \sin^2 \theta + n \cos \theta \right), \\ \mathbf{L} &= \left((Cn - A\Omega \cos \theta) \sin \theta, A\dot{\theta}, A\Omega \sin^2 \theta + Cn \cos \theta \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Рівняння руху в динаміці СТЗЦМ

Еволюція в часі вектора кутового моменту визначається рівнянням Ейлера

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M},$$

де $\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ — вектор головного моменту зовнішніх сил.

У нашому випадкові в рухомій системі відліку рівняння Ейлера має вигляд

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{X}_P \times (\mathbf{N} + \mathbf{F}_T), \quad (9)$$

де $\mathbf{N} = (0, 0, N)$ — нормальна реакція опори в точці P , $\mathbf{F}_T = (F_x, F_y, 0)$ — сила тертя в точці P . Зауважимо, що ми розглядаємо випадок, коли тіло під час руху постійно дотикається до поверхні. Як показано у роботі [4], основним джерелом перевертання дзиги є тертя ковзання, тому тертям кочення будемо нехтувати і враховувати лише силу тертя ковзання. Для сили тертя ковзання виберемо модель Кулона, згідно з якою $F_T = \mu N$, μ — коефіцієнт тертя ковзання.

Оскільки точка P лежить у площині Π , то для компонент вектора $\mathbf{X}_P = (X_p, 0, Z_p)$ виконуються співвідношення (4).

Запишемо рівняння руху для кутового моменту (9) покомпонентно із урахуванням виразів для векторів сил та співвідношень (5)

$$\begin{cases} \frac{dL_x}{dt} - \Omega L_y = h(\theta) F_y, \\ \frac{dL_y}{dt} + \Omega L_x = -a \sin \theta N - h(\theta) F_x, \\ \frac{dL_z}{dt} = \frac{dh}{d\theta} F_y = a \sin \theta F_y. \end{cases} \quad (10)$$

Розглядаючи перше та третє співвідношення цієї системи, можна помітити, що комбінація

$$L_z h(\theta) - L_x \frac{dh}{d\theta} = -\mathbf{L} \cdot \mathbf{X}_P \equiv J \quad (11)$$

є інтегралом руху, тобто

$$J = \text{const.}$$

Цей інтеграл руху буде відігравати важливу роль при аналізі динаміки СТЗЦМ.

Перепишемо систему рівнянь (10) із урахуванням (8)

$$\begin{cases} A\dot{\Omega} \sin \theta = (Cn - 2A\Omega \cos \theta)\dot{\theta} + (a - R \cos \theta)F_y, \\ A\ddot{\theta} = -\Omega(Cn - A\Omega \cos \theta) \sin \theta - a \sin \theta N - h(\theta)F_x, \\ C\dot{n} = a \sin \theta F_y. \end{cases} \quad (12)$$

Система диференціальних рівнянь описує обертальний рух СТЗЦМ. Доповнимо ці співвідношення рівняннями для поступального руху центра мас СТЗЦМ (точки O).

Нехай $\mathbf{u}_O = (u_{Ox}, u_{Oy}, u_{Oz})$ — вектор швидкості центра мас в системі відліку K . Другий закон Ньютона для руху центра мас має вигляд

$$m(\dot{\mathbf{u}}_O + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_O) = \mathbf{N} + \mathbf{F}_T + m\mathbf{g}.$$

У проєкціях на осі системи координат K це рівняння зводиться до системи

$$\begin{cases} m(\dot{u}_{OX} - \Omega u_{OY}) = F_X, \\ m(\dot{u}_{OY} + \Omega u_{OX}) = F_Y, \\ m\dot{u}_{OZ} = N - mg. \end{cases} \quad (13)$$

Оскільки $u_{OZ} = \frac{dh}{dt}$, то

$$\dot{u}_{OZ} = \frac{d^2h}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(R - a \cos \theta) = \frac{d}{dt}(a\dot{\theta} \sin \theta) = a(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta).$$

Тоді із третього рівняння (13) знаходимо вираз для модуля сили реакції опори

$$N = m(g + a(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta)). \quad (14)$$

Із цього співвідношення випливає, що сила реакції опори є співмірною із силою тяжіння у випадку, коли $a\dot{\theta}^2 \ll g$, $a|\ddot{\theta}| \ll g$.

Набір рівнянь (12), (13) та (14) описує динаміку дзиги Томсона у моделі сферичного тіла зі зміщеним центром мас.

Аналіз динаміки СТЗЦМ

Для проведення аналізу динаміки СТЗЦМ на основі системи рівнянь, одержаних вище, запровадимо нову динамічну змінну

$$\xi = Cn - A\Omega \cos \theta.$$

У термінах ξ компоненти вектора кутового моменту \mathbf{L} та інтеграл руху (11) набудуть вигляду

$$L_X = \xi \sin \theta, \quad L_Z = \xi \cos \theta + A\Omega, \quad J = -\xi a \sin^2 \theta + L_Z h(\theta). \quad (15)$$

Для аналізу динаміки розглянемо такі параметри моделі:

$$R = 1,5 \text{ см}, \quad a = 0,5 \text{ см}, \quad m = 25 \text{ г}, \quad g = 980 \text{ см/с}^2, \quad A/C = 0,85, \quad \mu = 0,1,$$

та початкові умови

$$\dot{\theta}_0 = \Omega_0 = 0, \quad n_0 \neq 0, \quad \mathbf{u}_0 = 0, \quad \theta_0 \sim 0,1 \text{ рад.}$$

Для таких початкових умов одержимо

$$\xi_0 = Cn_0 - A\Omega_0 \cos \theta_0 = Cn_0,$$

та

$$J = \xi_0(R \cos \theta_0 - a).$$

Перепишемо рівняння руху для кутового моменту (10) у термінах ξ із урахуванням (15). Одержимо

$$\dot{L}_X = \dot{\xi} \sin \theta + \xi \dot{\theta} \cos \theta, \quad \dot{L}_Z = \dot{\xi} \cos \theta - \xi \dot{\theta} \sin \theta + A\dot{\Omega}.$$

Звідси

$$\begin{cases} \dot{\xi} \sin \theta + \xi \dot{\theta} \cos \theta - \Omega L_Y = h(\theta) F_Y, \\ \dot{L}_Y + \Omega \xi \sin \theta = -a \sin \theta N - h(\theta) F_X, \\ \dot{\xi} \cos \theta - \xi \dot{\theta} \sin \theta + A\dot{\Omega} = a \sin \theta F_Y. \end{cases}$$

Аналогічно для рівнянь (12) одержуємо

$$\dot{\xi} \sin \theta = U(\xi, \theta, J) \dot{\theta} + h(\theta) F_Y, \quad (16)$$

$$A\ddot{\theta} = -\frac{1}{Ah(\theta)} V(\xi, \theta, J) \sin \theta - h(\theta) F_X, \quad (17)$$

де ми запровадили позначення

$$U(\xi, \theta, J) = \frac{J - \xi(R \cos \theta - a)}{h(\theta)} - \xi \cos \theta,$$

$$V(\xi, \theta, J) = (J - \xi(R \cos \theta - a))\xi + Amgah(\theta).$$

Рівняння (16) та (17) еквівалентні до системи рівнянь (12) і описують обертальну динаміку СТЗЦМ. За математичною структурою – це нелінійні диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами. Аналітичними методами розв'язати ці рівняння не вдається. Для розв'язання такого типу рівнянь слід використовувати чисельні методи.

Проаналізуємо рівняння (16) та (17) в наближеному вигляді. Зокрема, розглянемо динаміку СТЗЦМ у точці перегину змінної θ , що відповідає моменту перевертання тіла. У цьому випадкові друга похідна функції дорівнює нулю, тобто $\ddot{\theta} = 0$. Врахуємо також, що якщо $\sin \theta \neq 0$, то другий член у рівнянні (17) є набагато меншим у порівнянні із першим, і ним можна знехтувати. Тоді із (17) випливає, що

$$V(\xi, \theta, J) = 0.$$

У явному вигляді це співвідношення приводить до такого рівняння:

$$(J - \xi(R \cos \theta - a))\xi + Amgah(\theta) = 0. \quad (18)$$

Його розв'язок має вигляд

$$\xi_{\pm} = \frac{J \pm \sqrt{J^2 + 4Amg(R \cos \theta - a)(R - a \cos \theta)a}}{2(R \cos \theta - a)}.$$

Таким чином, поблизу точки перегину змінної θ та коли $\sin \theta \neq 0$, величина ξ буде знаходитися на кривій ξ_+ або ξ_- . Чисельний аналіз співвідношення (18) показує, що параметр ξ еволюціонує від початкового значення $\xi_0 = Cn_0$ таким чином, що у початкові моменти часу спостерігаються флуктуації навколо ξ_- , які зі збільшенням кута θ затухають. Лише поблизу стану $\theta = \pi$ знову збільшується амплітуда цих флуктуацій.

У границі $\frac{AmgR^2a}{J} \ll 1$ та $a \ll R$, ми одержимо $\xi_+ \approx \frac{J}{R \cos \theta - a}$, $\xi_- \approx -\frac{AmgaR}{J}$.

Нарешті, знайдемо мінімальну частоту обертання СТЗЦМ, за якої може відбутися перевертання. Скористаємося виразом для інтеграла руху (11), який запишемо у вигляді

$$J = Cn(R \cos \theta - a) + A\Omega R \sin^2 \theta = \text{const}.$$

Розглянемо цей вираз у двох випадках $\theta = 0$ та $\theta = \pi$ (перевернутий стан). Маємо

$$J = Cn_0(R - a) \text{ та } J = Cn_{\pi}(-R - a).$$

Звідси одержуємо

$$n_0 = \frac{R - a}{R + a} n_{\pi}.$$

Значення n_{π} можна визначити з умови стабільності обертання дзиги Томсона [5]

$$n_{\pi} = \sqrt{\frac{mga}{C\left(1 + \frac{a}{R} - \frac{A}{C}\right)}} \left(1 + \frac{a}{R}\right).$$

Таким чином, одержуємо вираз для критичної частоти, за якої відбувається перевертання

$$n_0 = \frac{R - a}{R + a} n_{\pi} = \sqrt{\frac{mga}{C\left(1 + \frac{a}{R} - \frac{A}{C}\right)}} \left(1 + \frac{a}{R}\right) \frac{R - a}{R + a}.$$

Для розглянутої у роботі моделі одержуємо значення критичної частоти

$$n_0 = \sqrt{\frac{0,025 \cdot 9,8 \cdot 0,005}{\frac{2}{5} \cdot 0,025 \cdot 0,0015^2 \left(1 + \frac{1}{3} - 0,85\right)}} \left(1 + \frac{1}{3}\right)^{\frac{3-1}{3+1}} \approx 22 \text{ c}^{-1} \approx 138 \text{ рад/с}.$$

Висновки

У даній роботі побудовано систему рівнянь динаміки обертального та поступального руху для моделі сферичного тіла зі зміщеним центром мас. Одержані рівняння мають вигляд системи нелінійних диференціальних рівнянь. Проведено теоретичний аналіз рівнянь для випадку, коли стан системи відповідає моменту перевертання тіла зі стійкого у нестійкий стан, у якому центр мас системи підіймається вгору. Показано, що параметр ξ , який визначає залежність частоти обертання тіла від кута нахилу, еволюціонує від початкового значення $\xi_0 = Cn_0$ таким чином, що у початкові моменти часу спостерігаються флуктуації навколо ξ , які зі збільшенням кута θ затухають. Поблизу стану $\theta = \pi$ знову збільшується амплітуда цих флуктуацій. Також було розраховано критичне значення частоти обертання СТЗЦМ, за якої може відбутися її перевертання.

Для подальшого аналізу динаміки СТЗЦМ слід застосувати методи чисельного інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь до одержаних у роботі рівнянь руху.

Література

1. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : в 5 т. Изд. 5-е, стереотип. / Д. В. Сивухин. – М.: Физматлит, 2006. – Т. I. Механика. – 560 с. – ISBN 5-9221-0715-1.
2. Алешкевич, В. А. Лекции по механике твердого тела / В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваяев. – М.: МГУ, 1997. – 98 с.
3. Karapetyan, A. V. Qualitative investigation of the dynamics of a top on a plane with friction / A. V. Karapetyan // J. Appl. Math. Mech. – 1991. – Vol. 55. – P. 563–565.
4. Rauch-Wojciechowski S. Mathematical Analysis of the Tippe Top / S. Rauch-Wojciechowski, M. Skoldstam, and T. Glad // Regul. Chaotic Dyn. – 2005. – Vol. 10 – P. 333–362.
5. Ebenfeld, S. New Analysis of the Tippe Top: Asymptotic States and Liapunov Stability / S. Ebenfeld, F. Scheck // Annals of Physics. – 1995. – Vol. 243. – P. 195–217.

Надійшла до редакції 12.09.15