

**Ю. А. Быков**, канд. техн. наук  
**В. И. Гнесин**, д-р техн. наук

Институт проблем машино-  
строения им. А. Н. Подгорного  
НАН Украины, г. Харьков,  
e-mail:  
bykow@ipmach.kharkov.ua,  
gnesin@ipmach.kharkov.ua

УДК 621.625+621.438

## НЕЯВНАЯ ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В РЕШЕТКЕ КОЛЕБЛЮЩИХСЯ ПРОФИЛЕЙ

*Запропоновано неявну чисельну схему моделювання нестационарних газодинамічних процесів в решітках турбомашин з коливними профілями. Схема має другий порядок точності за часом та простором і ґрунтується на модифікованій схемі Годунова другого порядку. Алгоритм розроблено для застосування неструктурних сіток з використанням ітераційних чисельних методів для виконання неявного кроку. Проведено чисельне моделювання течії в решітці турбінних профілів з різними кроками за часом з метою оцінки застосовності неявних схем для задач аеропружності. Отримані висновки відносно ефективності застосованої схеми.*

**Ключові слова:** чисельне моделювання, решітка турбіни, аеропружність.

### Введение

Решение задачи аэроупругости включает в себя решение нестационарной аэродинамической задачи, которая занимает основную часть вычислительных ресурсов. Множество работ посвящено проблеме уменьшения вычислительных затрат именно за счет упрощения или совершенствования методов решения аэродинамической задачи. Самым популярным методом упрощения является решение стационарной аэродинамической задачи с последующим решением одномерной задачи о движении поршня для определения нестационарных нагрузок на поверхность лопатки [1]. Далее по степени упрощения идет метод гармонического баланса [2], который предусматривает решение аэродинамической задачи в частотных координатах с последующим решением системы линейных уравнений для определения условий возникновения колебаний. Допустимым в некоторых случаях упрощением является решение уравнений Эйлера движения жидкости [3] или линеаризованных по времени уравнений Навье–Стокса [4]. Как показывают результаты сравнения различных подходов в решении аэродинамической задачи [5], наиболее точные и детальные данные получаются в результате решения нестационарных уравнений Навье–Стокса. Такой подход довольно широко распространен в применении к аэроупругости турбомашин [6]. В связи со значительными вычислительными затратами в задачах аэроупругости все больше используются различные методы ускорения расчетов, в частности применение неявных схем [7]. Использование неявных схем позволяет существенно увеличить шаг по времени, однако могут возникнуть вопросы по точности получаемых результатов. В данной статье представлена неявная схема интегрирования осредненных по Рейнольдсу нестационарных уравнений Навье–Стокса в применении к задаче аэроупругости решетки профилей и осуществлена количественная оценка соответствия результатов в зависимости от шага по времени.

### Численный метод

В основе численного метода лежит апробированная явная модифицированная численная схема Годунова–Колгана [6], которая имеет второй порядок аппроксимации по пространственным переменным. Схема интегрирует двухмерные, осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{0}. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho e)$  — вектор консервативных переменных;  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$  — потоки консервативных переменных соответственно по  $x$  и  $y$ . Уравнения (1) дополняются уравнениями модели турбулентности  $k$ - $\omega$  Уилкокса [8]. Предлагаемая схема состоит из двух шагов — явного, по основной схеме [6], и дополнительного неявного. Явный шаг заключается в интегрировании уравнений (1) и уравнений турбулентности по объему ячейки в течение выбранного шага по времени, в результате чего получаются

приращения вектора консервативных переменных  $\Delta U$ . Неявный шаг основан на схеме Бима–Уорминга [9] и заключается в решении системы линейных уравнений

$$\left\{ \mathbf{I} + \frac{\theta \Delta t}{1 + \xi} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{A}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{B}} \right] \right\} \Delta \hat{\mathbf{U}}^n = \frac{\Delta t}{1 + \xi} \Delta \hat{\mathbf{U}} + \frac{\xi}{1 + \xi} \Delta \hat{\mathbf{U}}^{n-1}. \quad (2)$$

Здесь  $\Delta t$  — шаг по времени;  $\theta$  и  $\xi$  — параметры интегрирования по времени, для достижения второго порядка выбрано  $\theta = 1$ ,  $\xi = 0,5$ ;  $\Delta \hat{\mathbf{U}}^n$  — вектор приращения примитивных переменных на  $n$ -м шаге,  $\hat{\mathbf{U}} = (\rho, u, v, p)$ ;  $\Delta \hat{\mathbf{U}}$  — приращения примитивных переменных после явного шага;  $\hat{\mathbf{A}}$  и  $\hat{\mathbf{B}}$  — матрицы Якоби для уравнения (1),  $\hat{\mathbf{A}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \hat{\mathbf{U}}}$ ,  $\hat{\mathbf{B}} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \hat{\mathbf{U}}}$ ;  $\mathbf{I}$  — единичная матрица.

Система линейных уравнений (2) решалась следующими итерационными методами: метод Якоби, метод Гаусса–Зейделя, метод релаксации, стабилизированный метод бисопряженных градиентов и метод наименьших квадратов LSQR [10]. Самым эффективным с точки зрения вычислительных ресурсов оказался классический метод Якоби. Вычислительные затраты на решение системы составляют около 27% от затрат на явный шаг.

Схема рассчитана на использование произвольных неструктурных сеток. В данной работе использовалась подвижная O-сетка из четырехугольных ячеек.

### Постановка задачи

В качестве объекта исследования была выбрана плоская решетка турбинных профилей, исследованная в Лозаннском политехническом институте [11] под наименованием «4-я стандартная конфигурация». Решетка обтекалась воздухом при следующих параметрах: полное давление  $p_0 = 205,8$  кПа, давление на выходе  $p_2 = 98,4$  кПа, температура заторможенного потока  $T_0 = 300$  К, угол натекания  $\beta = -44,5^\circ$ . Выбранный режим характеризуется числом Маха  $M_2 = 1,2$  и наличием скачка давления на стороне разрежения, что вызывает значительные колебания давления при движении профиля. Это позволит легко выявить различия в результатах численного моделирования. Лопатки совершали изгибные колебания амплитудой 0,0038 от хорды и частотой 150 Гц. Разность фаз колебаний между лопатками составляла 0 градусов. Расчетная сетка O-типа содержит один межлопаточный канал и состоит из четырехугольных ячеек, несколько слоев сетки, примыкающие к профилю, совершают колебания совместно с профилем (рис. 1).

Моделирование течения выполнялось в течение 1,5 периода колебаний профиля. Начальными условиями служил результат моделирования стационарного течения через решетку. Для оценки влияния шага по времени на получаемые результаты было выполнено шесть расчетов для шагов  $\tau = 1, 2, 4, 6, 8, 8,5$ , где  $\tau = \Delta t / \Delta t_0$ ,  $\Delta t_0$  — шаг по времени для устойчивого расчета по явной схеме. Расчет с шагом  $\tau = 1$  выполнялся по явной схеме, использованной в работе [6].

### Результаты и обсуждение

На рис. 2 представлено распределение осредненного давления  $c_p = \frac{p(x) - p_1}{p_0 - p_1}$  по поверхности профиля (здесь и далее значения  $x/c$  в диапазоне 0...1 соответствуют стороне разрежения профиля, значения 1...2 — стороне давления). На графике хорошо видно присутствие ударной волны на стороне разрежения в области  $x/c = 0,7$ .

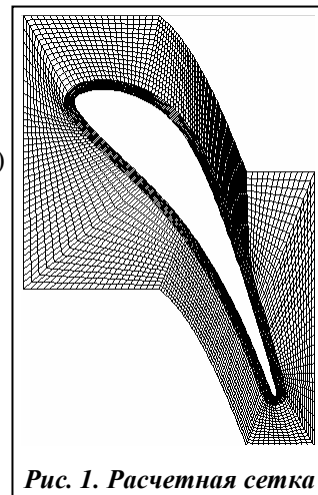


Рис. 1. Расчетная сетка

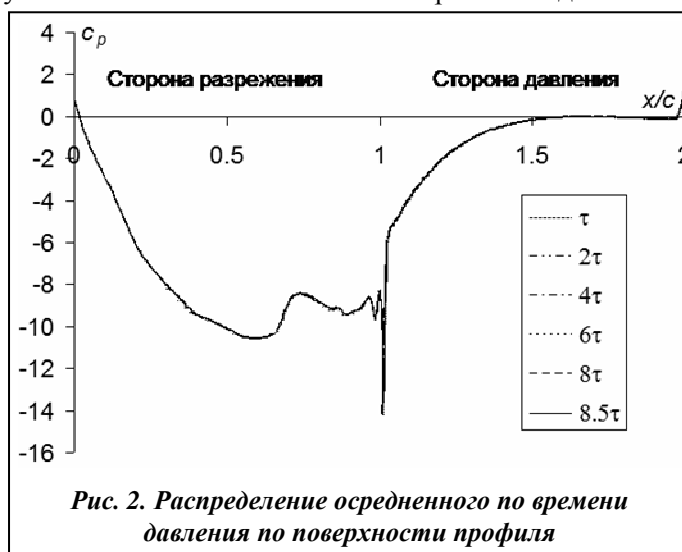


Рис. 2. Распределение осредненного по времени давления по поверхности профиля

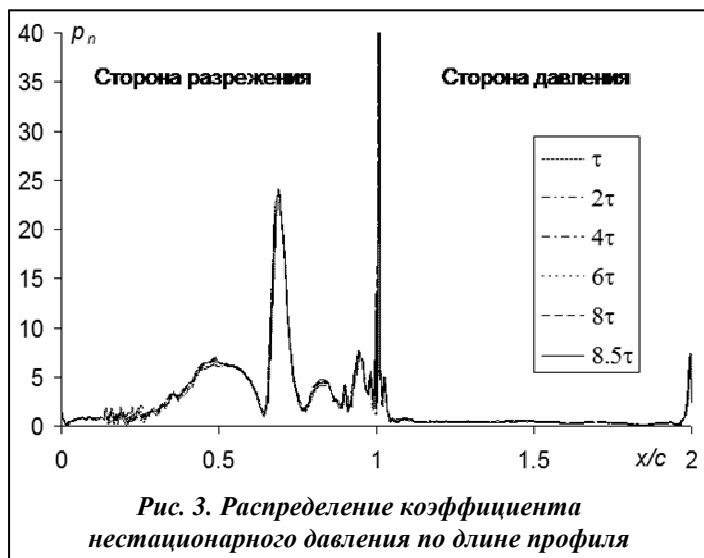


Рис. 3. Распределение коэффициента нестационарного давления по длине профиля

результатов позволяет увидеть, что для значений в области  $x/c = 0,5$  наблюдается увеличение амплитуды с ростом шага по времени, причем расхождение значений достигает 10%. В районе ударной волны  $x/c = 0,7$  наблюдается пик амплитуды, который также увеличивается с ростом шага на 3%.

На рис. 4 представлено также распределение сдвига фазы первой гармоники нестационарного давления от колебаний профиля  $phi(x) = \arctg \frac{C_1^b(x)}{C_1^a(x)}$ .

Колебаниями фазы в области  $x/c = 0,1 \dots 0,3$  можно пренебречь, поскольку амплитуда в этой области близка к нулю и определение фазы может быть недостоверным. В области  $x/c = 0,5$  наблюдается некоторое расхождение в  $5^\circ$  между шагами  $\tau = 8$ ,  $\tau = 8,5$  и всеми остальными. За этими исключениями значения фазы не отличаются друг от друга. Величина фазы в области  $x/c = 0,5$  принимает отрицательные значения, что соответствует положительной работе аэродинамических сил, в области ударной волны  $x/c = 0,7$  переходит через  $180^\circ$  и принимает положительные значения, работая на демпфирование колебаний. Таким образом, существуют две области, влияние которых взаимокомпенсируется.

Для задач аэроупругости важны интегральные характеристики, определяющие работу аэродинамических сил по возбуждению или демпфированию колебаний профиля. Такой характеристикой

может служить коэффициент аэродемпфирования  $\Xi = -\frac{\int \mathbf{F} \mathbf{w} ds}{(p_0 - p_1) \pi h_0^2 c}$ , являющийся безразмерной

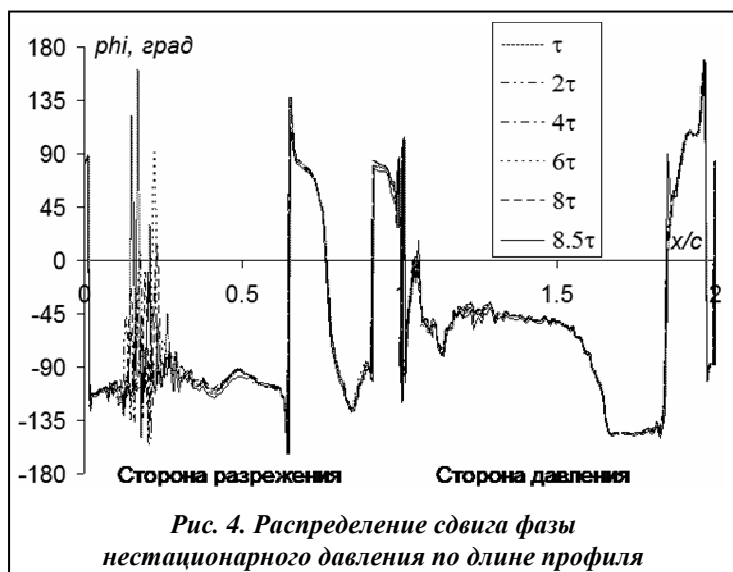


Рис. 4. Распределение сдвига фазы нестационарного давления по длине профиля

Даже при детальном анализе рис. 2 трудно заметить разницу между результатами. Равенство результатов стационарного обтекания для разных шагов по времени свидетельствует об адекватности неявной схемы. Далее представлены нестационарные результаты в виде распределения амплитуды первой гармоники нестационарного давления по длине профиля

$$p_n(x) = \frac{\sqrt{C_1^{a2}(x) + C_1^{b2}(x)}}{(p_0 - p_1) h_0 c} \quad (\text{рис. 3}).$$

Здесь  $C_1^a(x), C_1^b(x)$  — распределение первых коэффициентов разложения в ряд Фурье нестационарного давления.

Тщательный анализ приведенных ре-

зультатов позволяет увидеть, что для значений в области  $x/c = 0,5$  наблюдается увеличение амплитуды с ростом шага по времени, причем расхождение значений достигает 10%. В районе ударной волны  $x/c = 0,7$  наблюдается пик амплитуды, который также увеличивается с ростом шага на 3%.

На рис. 4 представлено также распределение сдвига фазы первой гармоники нестационарного давления от колебаний профиля  $phi(x) = \arctg \frac{C_1^b(x)}{C_1^a(x)}$ . Колебаниями фазы в области  $x/c = 0,1 \dots 0,3$  можно пренебречь, поскольку амплитуда в этой области близка к нулю и определение фазы может быть недостоверным. В области  $x/c = 0,5$  наблюдается некоторое расхождение в  $5^\circ$  между шагами  $\tau = 8$ ,  $\tau = 8,5$  и всеми остальными. За этими исключениями значения фазы не отличаются друг от друга. Величина фазы в области  $x/c = 0,5$  принимает отрицательные значения, что соответствует положительной работе аэродинамических сил, в области ударной волны  $x/c = 0,7$  переходит через  $180^\circ$  и принимает положительные значения, работая на демпфирование колебаний. Таким образом, существуют две области, влияние которых взаимокомпенсируется.

Для задач аэроупругости важны интегральные характеристики, определяющие работу аэродинамических сил по возбуждению или демпфированию колебаний профиля. Такой характеристикой может служить коэффициент аэродемпфирования  $\Xi = -\frac{\int \mathbf{F} \mathbf{w} ds}{(p_0 - p_1) \pi h_0^2 c}$ , являющийся безразмерной работой сил со знаком «минус» (здесь  $\mathbf{F}$  — аэродинамическая сила на поверхности лопатки;  $\mathbf{w}$  — вектор перемещения лопатки, интегрирование ведется по поверхности лопатки). Положительные значения коэффициента свидетельствуют о демпфировании колебаний, отрицательные — о возможности возбуждения колебаний. На рис. 5 представлена зависимость коэффициента аэродемпфирования от шага по времени.

Модуль коэффициента имеет тенденцию к росту, который, очевидно, связан с ростом амплитуды нестационарного давления. Отличие максимального и минимального значения составляет 10%. Нарушение тенденции для шагов  $\tau = 8$  и

$\tau = 8,5$  связано, вероятно, уже с изменением фазы нестационарного давления. Знак коэффициента свидетельствует о положительной работе аэродинамических по возбуждению колебаний, т. е. возможной неустойчивости колебаний профиля, что свидетельствует о преобладании колебаний давления в области  $x/c = 0,5$  длины профиля.

В целом увеличение шага по времени и применение неявной процедуры не приводит к существенным искажениям получаемых результатов. Однако, для практического применения, чтобы не получить необъяснимые результаты, следует выбирать шаг  $\tau < 8$ .

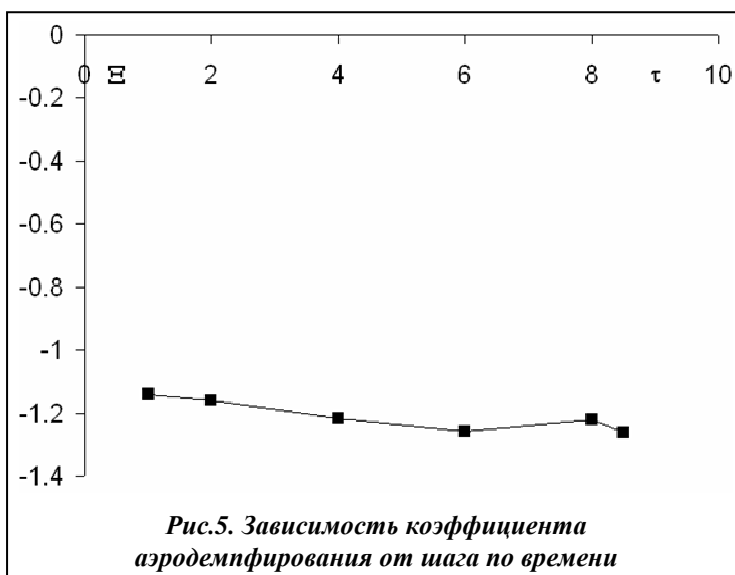


Рис. 5. Зависимость коэффициента аэродемпфирования от шага по времени

### Выводы

Разработан алгоритм численного моделирования течения газа через решетку колеблющихся профилей с помощью неявной численной схемы. Алгоритм предназначен для решения задач аэроупругости в решетках турбомашин. Проведен численный анализ трансзвукового течения через решетку турбинных профилей с использованием разных шагов по времени с целью оценки зависимости погрешности результатов от шага. Выявлено, что применяемый алгоритм увеличивает расчетное время одного временного шага на 27% в сравнении с явным методом и в то же время позволяет увеличить шаг по времени без значительной погрешности до значений  $\tau < 8$ . Таким образом, разработанный неявный алгоритм моделирования течения в решетке колеблющихся профилей вполне может применяться при решении задач аэроупругости.

### Литература

1. Brouwer, K. Rapid Prediction of Unsteady Aeroelastic Loads in Shock-Dominated Flows / K. Brouwer, A. R. Crowell, J. J. McNamara // Proc. of 56th AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conf. – 2015. – P. 1–20.
2. Padmanabhan, M. A. Simulation of Aeroelastic Limit-Cycle Oscillations of Aircraft Wings with Stores / M. A. Padmanabhan, C. L. Pasilliao, E. H. Dowell // AIAA J. – 2014. – Vol. 52, № 10. – P. 2291–2299.
3. Chen, T. Aeroelastic Modeling Using Geometrically Nonlinear Solid-Shell Elements / T. Chen, M. Xu, L. Xie // AIAA J. – 2014. – Vol. 52, № 9. – P. 1980–1993.
4. Time-Linearized and Time-Accurate 3D RANS Methods for Aeroelastic Analysis in Turbomachinery / H. Kersken, C. Frey, C. Voigt, G. Ashcroft // ASME. J. Turbomach. – 2012. – № 134 (5). – P. 051024-051024-8.
5. Gupta, K. K. Aeroelastic Simulation of Hypersonic Flight Vehicles / K. K. Gupta, L. S. Voelker // AIAA J. – 2012. – Vol. 50, № 3. – P. 717–723.
6. Гнесин, В. И. Численное исследование аэроупругих характеристик лопаточного венца турбомшины, работающей на нерасчетном режиме / В. И. Гнесин, Ю. А. Быков // Пробл. машиностроения. – 2004. – Т. 7, №1. – С. 31–40.
7. Gendel, S. Fluid–Structure Interaction of an Elastically Mounted Slender Body at High Incidence / S. Gendel, O. Gottlieb, D. Degani // AIAA J. – 2015. – Vol. 53, № 5. – P. 1309–1318.
8. Wilcox, D. C. Reassessment of the Scale-Determining Equation for Advanced Turbulence Models // AIAA J. – 1988. – Vol. 26, № 11. – P. 1299–1310.
9. Beam, R. M. An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations / R. M. Beam, R. F. Warming // AIAA J. – 1978. – Vol. 16, №4 – P. 393–402.
10. Paige, C. C. LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares / C. C. Paige, M. A. Saunders // ACM Transactions on Mathematical Software. – March 1982. – Vol. 8, № 1 – P. 43–71.
11. Bolcs, A. Aeroelasticity in Turbomachines. Comparison of Theoretical and Experimental Cascade Results / A. Bolcs, T. H. Fransson // Communication du Laboratoire de Thermique Appliquee et de Turbomachines, Lausanne, EPFL. – 1986. – № 13. – 230 p.

Поступила в редакцию 01.10.15