

Г. А. Шелудько,
С. В. Угримов,
 канд. техн. наук

Институт проблем машиностроения
 им. А. Н. Подгорного НАН Украины,
 г. Харьков,
 e-mail: sugrimov@ipmach.kharkov.ua

Ключові слова: екстремум, унімодальна функція, одновимірний пошук, кусково-лінійні наближення, середньозважені операції, характеристичні числа, індекс ефективності.

УДК 519.853.3

МЕТОД ЛОКАЛИЗАЦИИ ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА УНИМОДАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Розглянуті триточкові методи пошуку екстремуму кусково-негладкої функції. Особлива увага приділяється застосуванню методів розв'язання задач з поганою обумовленістю, що викликана різнонахильністю функції, яка мінімізується. Завдяки комбінації лінійних методів Regula falsi та пересічних хорд вдалося помітно підвищити ефективність пошукового засобу. На тестових прикладах продемонстровано ефект запропонованого підходу.

Введение

В условиях все более возрастающих массовых трудоемких расчетов различных процессов и объектов предъявляются повышенные требования к вычислительным средствам вообще и к составляющим их элементам в частности. Успех решения сложной задачи минимизации во многом зависит от уровня качества (скорости и точности) решения ее подзадач, по возможности меньшей размерности. Стремление к определенному улучшению методов экстремальных задач породило огромное количество всевозможных подходов, что естественно вызвало затруднение при выборе нужного метода и привело в значительной степени к усложнению постановок и их реализации [1–3].

Поэтому наибольшее распространение в вычислительной практике приобретает получение простейших приемов, обладающих относительно хорошей эффективностью при необходимой точности результата.

Многие задачи легко сводятся к отысканию наименьшего или наибольшего значений функции, однако методы решения данных задач существенно зависят от свойств самой функции. В связи с этим стали обращать внимание на создание методов без привлечения производных [3–5], а также на приемы использования апостериорной информации, возникающей в ходе самого процесса поиска решения. Это способствует сведению до минимума требований к характерным свойствам исследуемой функции.

Обычно задача оптимизации заключается в отыскании точки

$$X^* = \arg \operatorname{extr}_{X \in [A, B]} f(X). \quad (1)$$

Рассматриваемая здесь одномерная минимизация почти всегда выступает обязательным элементом во многих известных методах многомерной минимизации [1, 2]. Хотя на первый взгляд задача одномерной минимизации – самая простая, однако ясно, что не всегда исследуемая функция $f(X)$ дифференцируема на заданном отрезке $[A, B]$, чтобы, приравняв нулю ее производную, получить необходимое условие для отыскания точки минимума. Поэтому в тех случаях, когда функция $f(X)$ не является дифференцируемой, все равно возникает необходимость искать прямые способы поиска минимума такой функции.

К настоящему времени уже известно достаточно большое количество методов, решающих задачу (1), но при этом требования к функции весьма разнообразны. Неудачный выбор метода, т.е. каким из них следует воспользоваться при решении конкретной задачи с заданными свойствами функции $f(X)$ на $[A, B]$, как правило, влечет за собой заметное снижение эффективности решения.

Поводом для написания данной статьи явились результаты работы Е. А. Воронцовой [6], в которой скорость сходимости процесса поиска точки экстремума доведена почти до уровня квадратической прямым методом, т.е. свободным от знания точных производных. Действительно, предложенный алгоритм достаточно хорошо начинает себя вести в весьма малой окрестности решения, когда

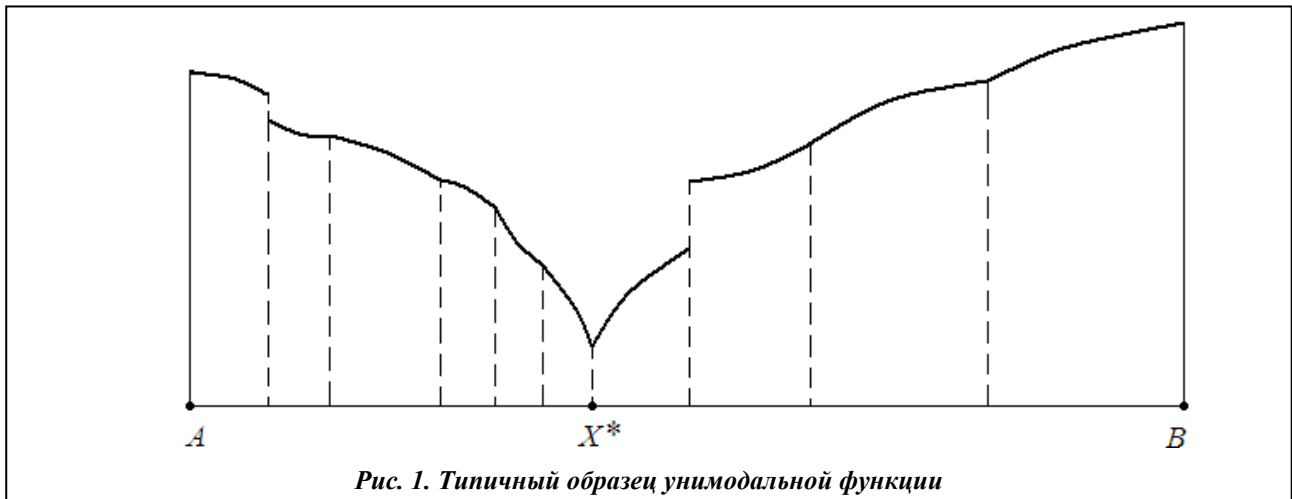


Рис. 1. Типичный образец унимодальной функции

линейная аппроксимация оправдана. Но в качестве объекта минимизации были в основном выбраны почему-то только функции с минимумом в точке со скачком производной.

Здесь рассматривается один из приемов решения задач оптимизации унимодальной функции (рис. 1), не требующий дополнительной информации об ее внутренней структуре. Следовательно, могут быть задействованы не только негладкие, но даже алгоритмически заданные функции. Алгоритм решения позволяет находить различные характерные точки в заданной области, имеются в виду корни нелинейных уравнений, точки экстремума функции, точки перегиба, возврата и т. п. [7, 8]. Эта информация обычно служит для построения линий уровня, осей оврагов и других компонентов на различных этапах решения задач анализа и синтеза [9].

Здесь коснемся лишь тех методов, которые не используют напрямую производные исследуемой функции в заданной области. Чаще всего будем заменять производные их конечно-разностными аналогами, что позволяет расширить класс решаемых задач.

Постановка задачи

Рассмотрим наиболее простой одномерный случай: поиск точки $X^* \in [A, B]$, доставляющей минимальное значение заданной функции $f(X)$, определенной на сегменте $[A, B]$, т. е. удовлетворяющей неравенству

$$f(X^*) \leq f(X) \quad \forall X \in [A, B]. \quad (2)$$

Известно, что унимодальная функция $f(X)$, определенная на $[A, B]$, обязательно достигает своего наименьшего (наибольшего) значения в некоторой точке $X^* \in [A, B]$. Задачу поиска минимума $f(X)$ будем определять как установление подсегмента $[a, b] \subset [A, B]$ заданной длины ε с решением (целью) X^* .

Несмотря на определенную простоту постановки одномерной минимизации (2) существует большое разнообразие вариантов поведения функции (перемежающиеся участки выпуклости и вогнутости, точки перегиба, перелома и конечных разрывов), в частности, по характеру функции в окрестностях решения X^* (скачки и конечные разрывы производных), а также по степени разнонаклонности функции $f(X)$, т.е. по значению критерия

$$\text{het } X = \frac{\left| \frac{\Delta_{AX}}{\Delta_{AX}} - \frac{\Delta_{BX}}{\Delta_{BX}} \right|}{\left| \frac{\Delta_{AX}}{\Delta_{AX}} + \frac{\Delta_{BX}}{\Delta_{BX}} \right|} \quad (3)$$

в окрестности решения (здесь $\Delta_{XY} = (f(X) - f(Y))/(X - Y)$ – кусочно-линейная аппроксимация производной функции $f(X)$ в некоторой точке $Z \in [X, Y]$).

На рис. 2 изображены типичные варианты окрестностей минимума унимодальных функций, заданных на отрезках.

Далее будем различать всякие точки вообще и информативные точки с вычисленным в них значением функции $f(X)$.

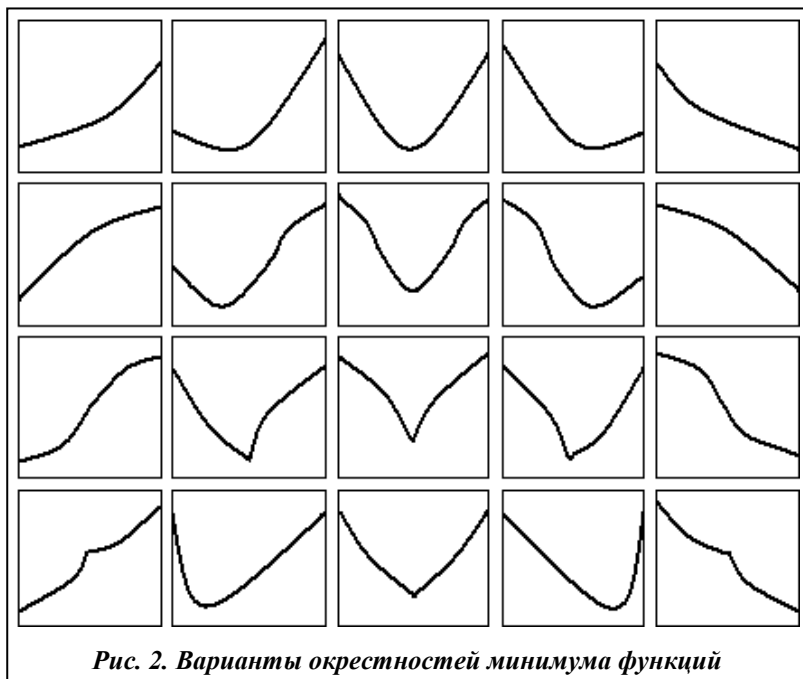


Рис. 2. Варианты окрестностей минимума функций

(унимодальна), то, вычисляя ее в двух точках C и D сегмента $[A, B]$, можно указать содержащую точку минимума X^* подсегменты: $[A, C]$, если $f(C) > f(D)$, и $[D, B]$, если $f(C) < f(D)$. Это позволяет исключать отрезки сегмента $[A, B]$, не содержащие решения X^* .

Так, в методе биссекции точка экстремума локализуется при сравнении двух значений функции в точках, отстоящих от середины сегмента на $0,5\delta$ ($\delta > 0$ – параметр метода). После n итераций длина подсегмента локализации решения X^* становится равной $(B - A) \cdot 2^{-n} + \delta(1 - 2^{-n})$. Обычно считают приближенным значением X^* середину отрезка $[a, b] \subset [A, B]$ длиной $b - a = \varepsilon$, содержащего решение X^* . Здесь ε – достигнутая точность.

Отметим, что задание и четырех информативных начальных точек A, C, B, D еще не может однозначно определить окрестность экстремальной точки X^* при использовании того или иного дискретного метода локализации (рис. 3). Так, на рис. 3, в имеем одинаковую исходную информацию $(A, f_A), (C, f_C), (B, f_B), (D, f_D)$, однако расположение минимумов $X^*_{(i)}$ для функций $f_{(1)}$ и $f_{(2)}$ не совпадают. Все зависит от природы функции $f(X)$. И поэтому понятно, что именно алгоритм поискового метода должен учитывать складывающуюся ситуацию и определять последовательность действий, чтобы поисковые затраты были как можно меньшими.

Средства минимизации

Предлагаемые здесь способы дискретной локализации экстремальных точек X^* пригодны как для гладких, так и негладких функций $f(X)$, определенных на сегменте $[A, B]$, и, как минимум, требуют трихотомии, т.е. использования трех информативных точек. Однако для некоторых одинаково-

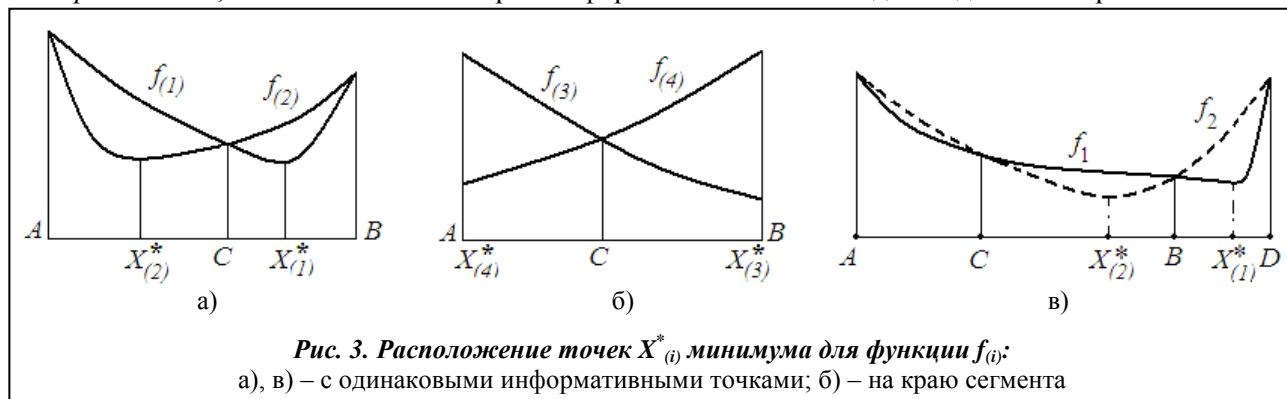


Рис. 3. Расположение точек $X^*_{(i)}$ минимума для функции $f_{(i)}$:
а), в) – с одинаковыми информативными точками; б) – на краю сегмента

Среди известных относительно простых *прямых методов* поиска точки экстремума унимодальной функции $f(X)$, определенной на сегменте $[A, B]$ (рис. 3), наибольшее распространение получили *метод Больцано (биссекции)*, где для каждого такта метода приходится использовать две информативные точки, а оптимальный *метод Фибоначчи* и субоптимальный *метод золотого сечения* [1, 3] требуют одну информативную точку. Все они предъявляют весьма слабые требования к характеру функции $f(X)$. Достаточно лишь иметь возможность вычисления значения функции в любой точке сегмента $[A, B]$.

Нетрудно видеть, если $f(X)$ выпукла или строго квазивыпукла

наклоненных уни-модальных функций $f(X)$ возможно применение *дихотомии*, т.е. достаточно двух информативных точек на одной итерации. На рис. 3 а, б представлены варианты расположения точек $X_{(i)}^*$ минимума ряда выпуклых функций $f_{(i)}$ на $[A, B]$.

Действительно, минимум X^* функции $f(X)$ может оказаться в любом из подотрезков, в которых имеется самая меньшая ордината. Но в каком именно из подотрезков $[A, C]$ или $[C, B]$, связано уже с характером изменения функции $f(X)$ на $[A, B]$. Информацию о поведении функции в точке C можно косвенно установить по знаку производной, используя какое-либо приближенное выражение ее или запоминая тенденцию при спуске на предыдущем этапе поиска. После того как удалось установить, в каком из подотрезков $[A, C]$ или $[C, B]$ (см. рис. 3) расположено решение X^* , то ко всем этим случаям применим известный простой метод **Regula falsi (RF)** поиска корней.

Если заменить значение функции $f(C)$ на $-f(C)$, то можно использовать метод **RF** и записать

$$X = \frac{Af_C - Cf_A}{f_C - f_A} \vee X = \frac{Bf_C - Cf_B}{f_C - f_B} \tag{4}$$

для $[A, C]$ или $[C, B]$ соответственно.

Вид формул (4) подсказывает, что можно также привлечь в качестве дихотомического решения взвешенные средние

$$X = \frac{Af_C + Cf_A}{f_C + f_A} \vee X = \frac{Bf_C + Cf_B}{f_C + f_B} \tag{5}$$

соответственно для $[A, C]$ или $[C, B]$. В отличие от (4) эти формулы позволяют продвигаться к решению дальше от концов A и B подсегментов $[A, C]$ или $[C, B]$, что особенно важно при *одинаково наклоненной* функции $f(X)$, в окрестности решения.

Выражения (5) представляют собой взвешенные средние пар точек A, C или C, B с весами, равными значениям функции f_A, f_C или f_C, f_B .

Текущая точка X , получаемая по формулам (5), всегда оказывается в области $[A, B]$ и располагается ближе к *образующей* точке C . Однако этот положительный момент, удобный при отыскании экстремума *одинаково наклоненной* функции, как раз препятствует успешному поиску цели X^* в случае *разнонаклоненной* функции, тем более что заранее может быть неизвестно, является ли данная функция таковой. И только после нескольких вычислений по формулам (4) или (5), т.е. после добавочных затрат, удастся установить этот факт.

Когда становится известным *разнонаклоненность* функции, то можно, не вычисляя дополнительно новых значений функции (рис. 4, а, б), продвигаться в окрестность решения X^* , используя способ **pRF**

$$X_p = \frac{pBf_C + Cf_B}{pf_C + f_B} \vee X_p = \frac{pAf_C + Cf_A}{pf_C + f_A} \tag{6}$$

соответственно для $[C, B]$ или $[A, C]$ при $p > 1$. Примечательно, что точка X_p всегда принадлежит своему подсегменту при любом действительном $p \in [0, \infty[$.

Если надлежащим образом выбирать параметр p , то можно ускорить попадание точки X в окрестность решения X^* . Принцип построения выражений (6) позволяет строить другие последовательности *неинформативных* точек X_1, X_2, X_3, \dots , удовлетворяющие различным иным условиям, которые просто учесть и реализовать. Для этого можно использовать новые начальные точки, лежащие на образующих прямых $C'B, CB'$ и соответственно $A'C, CA'$ (см. рис. 4).

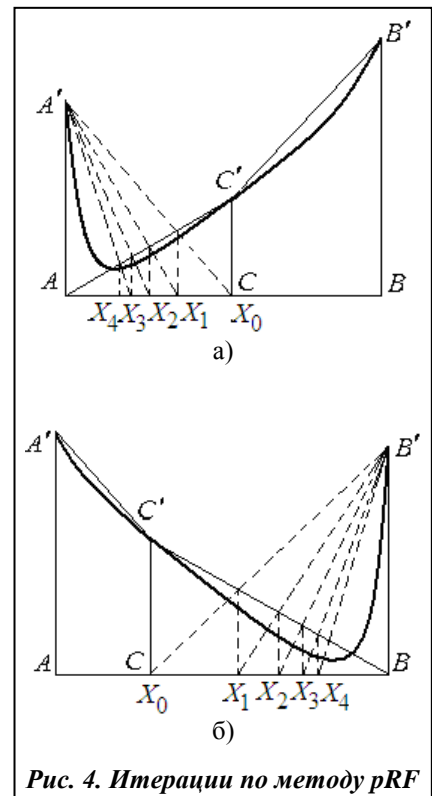


Рис. 4. Итерации по методу pRF

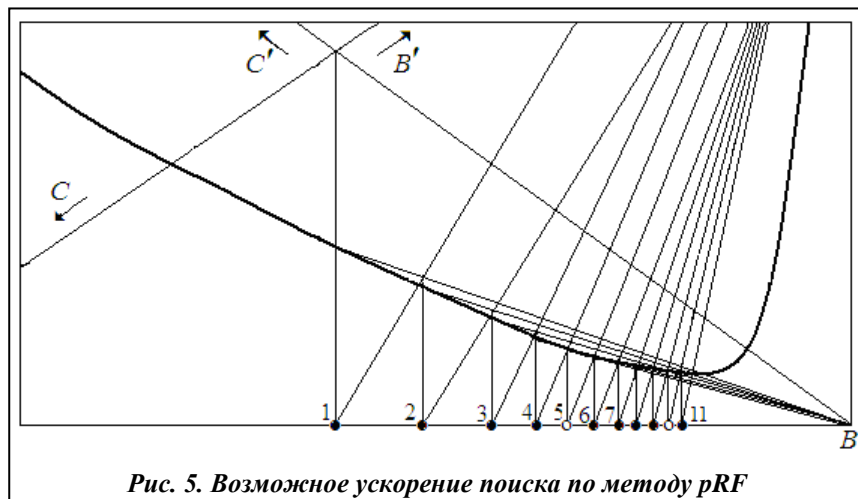


Рис. 5. Возможное ускорение поиска по методу pRF

Уже, например, при $p = 2$ реализуется схема метода секущих [10], обладающего сверхлинейной скоростью сходимости, в отличие от метода RF.

Так, на рис. 5 показан фрагмент процесса pRF на подсегменте [C, B], из которого следует, что использование даже постоянного значения p , например $p = 5$, ускоряет поиск (светлые точки), против обычного $p = 1$ (темные точки). Чем ближе одна из ветвей функции

$f(X)$, тем больше необходимо привлечь информативных точек, чтобы попасть в окрестность решения.

Каким бы ни был закон изменения параметра p , на самом деле важно, чтобы при нарушении условия

$$f_X > f_C \text{ на } [A, C] \vee f_X > f_B \text{ на } [C, B] \tag{7}$$

p увеличивалось и, по понятным причинам, не следует опасаться, что его значение для сложившейся ситуации вдруг окажется чрезмерным. Как только при движении к цели X^* по методу pRF текущее значение функции становится больше предыдущего, то значение параметра p следует уменьшать, доводя его до $p = 1$. Этот прием позволяет без особых трудностей направить процесс поиска в противоположном направлении до точки, в которой функция увеличится в сравнении с предыдущим значением. Такой затухающий колебательный процесс приводит к цели X^* тем быстрее, чем лучше организовано управление параметром p . Если же поставить имеющийся неуправляемый выбор параметра p в зависимость от получаемых результатов, то можно еще больше ускорить продвижение к цели.

Вспомним хорошо известный способ комбинирования методов Дэвиса, Свенна, Кемпи [11], где спуск производился с нарастающим шагом до тех пор, пока не локализовалась окрестность с целью X^* . Далее использовался метод Пауэлла [12], производящего квадратичную интерполяцию до необходимой точности. Подобную идею самоуправления можно применить и к изменению параметра p .

Приведенные способы RF и pRF достаточно хорошо проявляют себя в случае небольших величин конечной точности ϵ , а для более точного определения минимизирующей точки X^* целесообразно применять методы, учитывающие наклоны функции $f(X)$ по обе стороны от решения.

Добавление четвертой информативной точки D (рис. 6) в поиске X^* при соответствующем использовании возникшей ситуации должно поднять эффективность процесса. Действительно, привлечение кусочно-линейных приближений Δ_{AC} и Δ_{DB} (3) приводит к методу пересекающихся хорд (ПХ), который при малых подотрезках [A, C] и [B, D] может способствовать заметному продвижению к цели X^* .

При попадании текущей точки X в довольно малую окрестность точки X^* , когда линейная аппроксимация функции $f(X)$ становится достаточной, использование метода ПХ наиболее целесообразно.

Для случая (см. рис. 6, б) запишем приближение к X^*

$$X = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{1 + \frac{f_C(B - \beta)}{f_B(\alpha - C)}} \tag{8}$$

Здесь использованы характеристические числа

$$\alpha = \frac{Af_C - Cf_A}{f_C - f_A}, \quad \beta = \frac{Bf_D - Df_B}{f_D - f_B}, \tag{9}$$

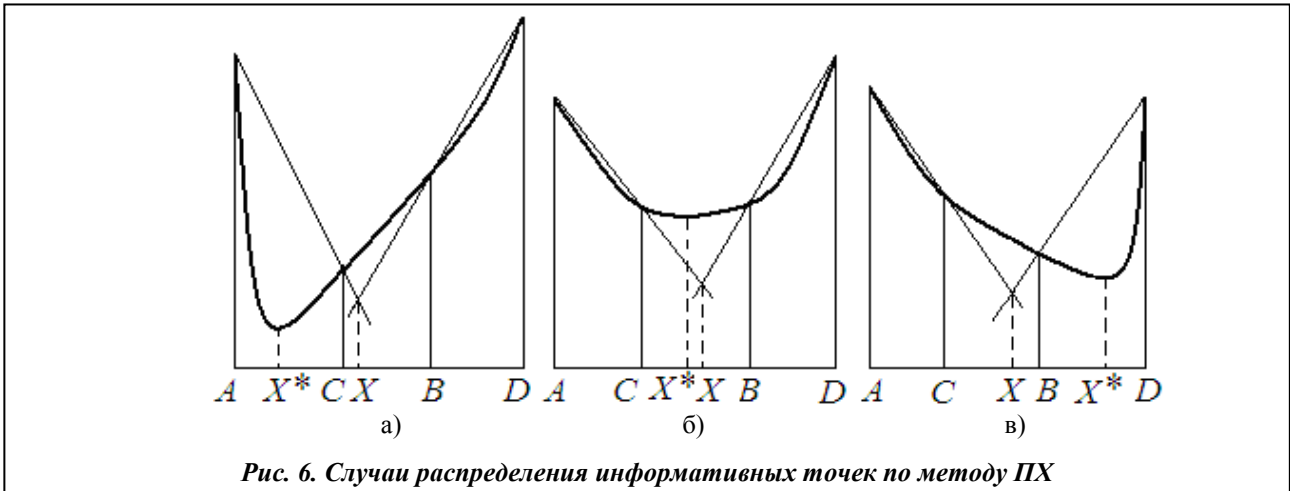


Рис. 6. Случаи распределения информативных точек по методу ПХ

которые являются результатом действия *метода секущих* [10], проявляющего сверхлинейную скорость сходимости, особенно когда точки C и B достаточно близки к цели X^* . Если же воспользоваться хордами \overline{AB} и \overline{CD} (см. рис. 6), можно получить другой вариант метода ПХ, поменяв характеристические числа (9) на выражения

$$\alpha = \frac{Af_B - Bf_A}{f_B - f_A}, \quad \beta = \frac{Cf_D - Df_C}{f_D - f_C}.$$

Однако когда присутствует *разнонаклоненность* (см. рис. 6, а или в), применение (8) напрямую уже не оправдано. Исправить возникшее положение в этом случае, в особенности если *разнонаклоненность* значительна и когда точки C, X (рис. 6, а) и X, B (рис. 6, в) оказываются весьма близкими друг к другу, можно, вернувшись к трехточечному варианту (6) с информативными тройками A, C, X или X, B, D (см. рис. 6). При этом желательно постепенно увеличивать значение параметра p с учетом текущей точности ε .

Но заранее неизвестно, как назначать начальное значение параметра p в (6). Известно только, что оно будет отличаться для каждой функции $f(X)$ и для каждой новой ситуации. Понятно, что его значение должно увеличиваться (см. рис. 6, а и в) по мере приближения текущей точки X к окрестности решения X^* . Хотя значения p могут принимать любые действительные числа из сегмента $[0, \infty[$, однако не стоит нарушать ограничения

$$p \leq |f_A f_C^{-1} [2\varepsilon_k^{-1}(C - A) - 1]| \quad \vee \quad p \leq |f_B f_C^{-1} [2\varepsilon_k^{-1}(B - C) - 1]|$$

соответственно для $[A, C]$ или $[B, D]$ (ε_k – точность, принятая на k -м этапе минимизации).

Так или иначе локализация окрестности решения X^* основана на сходящейся последовательности вложенных отрезков (например, справа)

$$[A_1, C_1, B_1] \supset [A_2, C_2, B_2] \supset [A_3, C_3, B_3] \supset \dots$$

и порождает соответствующую ей убывающую последовательность значений функций

$$f(C_1) \geq f(C_2) \geq f(C_3) \geq \dots$$

Удобно продвижение текущей точки C_i ускорить, поменяв в формуле (6) значение f_C на фиксированное значение f_{C_1} . В результате устраняется неопределенность в выборе параметра p . При этом спуск завершается до получения точки C_i , когда $f_{C_i} > f_{C_{i-1}}$, т. е. до нарушения условия (7). Затем информативная точка C_i может быть включена в четверку точек для продолжения поиска по методу ПХ.

Обнаружение *разнонаклоненности*, а важнее ее степени (3), позволяет осознанно вводить величину параметра p . Например, на начальных шагах работы метода **pRF**, когда могут сильно разниться значения крайних ординат f_A и f_B , можно принимать базовую величину p , равную $\max(|f_A|/|f_B|, |f_B|/|f_A|)$, а затем, по необходимости, увеличивать p по принятому способу, до получения точки X со значением функции $f_X > f_C$. С этого момента, до перехода на метод ПХ, желательно уточ-

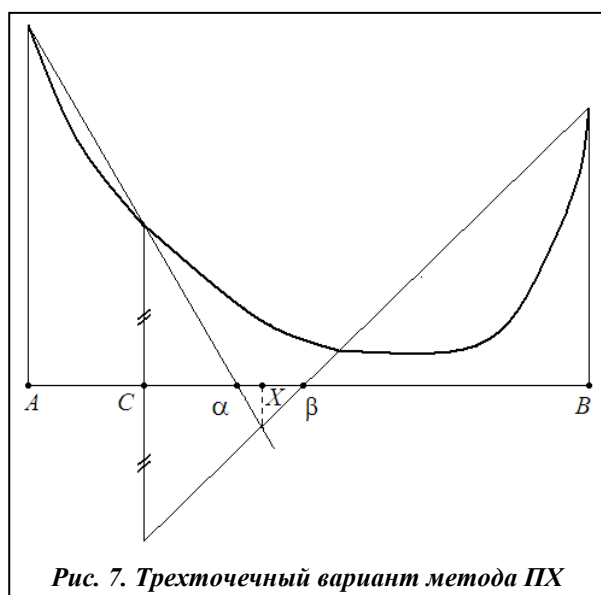


Рис. 7. Трехточечный вариант метода ПХ

нять окрестность решения X^* до выполнения условия $f_A \approx f_B$, наиболее благоприятного для использования формулы (8).

Можно, например, ввести экспоненциальную адаптацию с линейными параметрами, не требующую знания производных для соответствующего изменения параметра p , что еще больше ускорит процесс минимизации.

Возможен также прием перехода к формуле (8), когда выясняется, что окрестность решения X^* , в силу *разнонаклонности* $f(X)$ находится вне рабочего подсегмента $[A, C]$ или $[C, B]$. Для этого подключаем одну информативную точку слева от точки A (вариант а) или справа от точки D (вариант в) (см. рис. 6). Такими точками могут служить, например, уже известные прежние информативные точки, ближайšie к точкам A или D . Таким образом, реализуется своеобразный метод с минимальной *глуби-*

ной памяти [9] в направлении поиска.

Классический вариант метода ПХ с четырьмя информативными точками (рис.6) легко переводится в *трехточечный* (см. рис. 7) с той же структурой формулы (8), если *характеристическое число* β (9) заменить $\bar{\beta} = (Cf_B + Bf_C)/(f_B + f_C)$, когда минимум функции $f(X)$ расположен на подсегменте $[C, B]$, оставив α тем же. Если же минимум попадает на подсегмент $[A, C]$, то следует принять вместо α выражение $\bar{\alpha} = (Cf_A + Af_C)/(f_A + f_C)$.

Но так как и здесь остается в силе прием использования параметра p , смещающего текущее решение в окрестность минимума в случае *разнонаклонной* функции $f(X)$, то подобная замена *приближенным значением* не является большой потерей. Для этого достаточно значение f_C поменять на pf_C , но с естественным ограничением $pf_C < f_A$, если $X^* \in [C, B]$, и $pf_C < f_B$, если $X^* \in [A, C]$.

Способы такой корректировки неизбежно приводят к идее *поэтапного обмена* методами *pRF* и ПХ, где признаком перехода выступает, с одной стороны, установление *разнонаклонности*, а с другой – достигнутая точность на том или ином этапе поиска.

Детали алгоритма

В используемом здесь подходе *pRF* и ПХ необходимо иметь сначала не более четырех информативных точек. При генерации *начальной четверки* точек X_1, X_2, X_3, X_4 , лежащих в заданном сегменте $[A, B]$, целесообразно принять за *старт* информативную точку $X_1 = 0,5(A + B)$, т.к. к этому моменту еще нет никаких сведений о характере функции $f(X)$, кроме ее *униmodalности* на сегменте $[A, B]$. По понятным причинам можно назначить следующей информативной точкой $X_2 = X_1 + 0,5\epsilon_1$, где ϵ_1 – некоторое кратное от финальной точности ϵ . В зависимости от того, в какой стороне находится минимум функции, третьей точкой выбираем

$$X_3 = 0,25 \cdot [B + A + X_2 + X_1 + (B - A + X_2 - X_1) \cdot \text{sgn}(f_1 - f_2)].$$

По той же схеме назначаем четвертую точку

$$X_4 = 0,25 \cdot \{ [X_1 + X_3 + A + (X_1 + X_3 - A) \cdot \text{sgn}(f_3 - f_1)] (1 - \text{sgn}(f_1 - f_2)) + [X_2 + X_3 + B + (X_2 + X_3 - B) \cdot \text{sgn}(f_3 - f_1)] (1 + \text{sgn}(f_1 - f_2)) \},$$

если еще не достигнута так называемая «яма».

Из четырех информативных точек X_1, X_2, X_3, X_4 выбираем три $X_1, X_2, X_3 \vee \vee X_2, X_3, X_4$, среди которых срединная $X_2 \vee X_3$ всегда оказывается с меньшим значением функции, если, конечно, минимум функции случайно не попадает на один из концов сегмента $[A, B]$.

Поскольку одной из особенностей в принятом алгоритме является *ступенчатость* в достижении того или иного значения точности, то процесс поиска снабжен приемом, носящем название

«переброс». Закон изменения шага ступени ε_k может быть выбран в каждом отдельном случае по желанию. В данном алгоритме принята геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 0,1$.

После получения очередной точки C основного процесса проверяются условия $B - \varepsilon_k < C$ (или $A + \varepsilon_k > C$). Если они выполнены, то вычисляем в точке $X = B - \varepsilon_k$ (или $X = A + \varepsilon_k$) функцию $f(X)$ и переходим на новую ступень точности $\varepsilon_{k+1} = 0,1\varepsilon_k$ с новой информативной тройкой $A = B - \varepsilon_k, C = C, B = B$ (или $A = A, C = C, B = A + \varepsilon_k$). Естественно, такой «переброс» осуществляется само собой против спада функции $f(X)$ в соответствующем подсегменте $[C, B]$ (или $[A, C]$), где присутствует решение. Операция «переброс», очевидно, наиболее продуктивна к концу установления конкретной точности ε_k .

Остановкой поиска служит, как уже отмечалось, достижение точности $\varepsilon = b - a$, а решение принимается в виде $X = C$.

Численный эксперимент

Тестирование описанного подхода реализовано на представительной серии функций, заимствованных из известных источников [4–7, 11, 13–18], использованных непосредственно или преобразованных к виду $(\varphi(X) = f^2(X), \varphi(X) = |f(X)|)$, чтобы получить в решении разный характер точки экстремума. В частности, приведено уравнение И. Ньютона, иллюстрирующего на нем свой метод [10], и уравнение Леверье, решение которого послужило открытию планеты Нептун [13]. Выбирались функции с различным характером поведения на $[A, B]$ и разным уровнем *разнонаклонности*, некоторые из них являются выпукло-вогнутыми, особенно трудными для реализации классическими средствами. Нами задавался заведомо протяженный сегмент, учитывая формулу (2), чтобы подчеркнуть «чистоту» эксперимента, а также для демонстрации возможностей испытываемого метода.

Непосредственное отыскание точки X^* экстремума функции $f(X)$, предполагая определенные затраты, должно опираться на некоторый критерий эффективности метода. В данном случае эффективность поиска оценивалась, подобно работе [10], *индексом эффективности*

$$E = N^{-1} \ln[(B - A)/(b - a)], \tag{10}$$

где N – количество вычислений функции $f(X)$ для достижения подсегмента $[a, b] \subset [A, B]$ заданной длины ε , содержащего цель X^* .

В табл. 1 представлены решения ряда примеров комбинированным методом **pRF-ПХ** и установлено одно и то же конечное значение $\varepsilon = b - a = 10^{-15}$. Полученная эффективность во всех случаях оказывается намного выше, чем когда решение производилось каждой частью метода **pRF-ПХ** в отдельности, несмотря на *выпукловогнутость* функций. Функции (см. табл. 1) – гладкие, остальные в решении претерпевают скачок.

Таблица 1. Характеристики решений примеров по методу pRF-ПХ

Функция	$[A, B]$	X^*	E (10)
$(X^3 - 2X - 5)^2$ [10]	$[-2; 5]$	2,094551481542326	1,20302
$X^6 + 4,224X^5 + 6,5071X^4 + 7,5013X^3 + 8,4691X^2 + 3,3641X + 1,6252$ [13]	$[-2,3; -1,5]$	-1,921227833020143	1,19579
$(X^{20} - 1)^2$ [7]	$[0; 5]$	1,000000000000000	1,29031
$(e^{\sin X} - 0,2X - 1)^2$ [14]	$[-1; 1,3]$	0,000000000000000	1,31421
$\sqrt{1 - e^{-X^2}}$ [15]	$[-5; 8]$	0,000000000000000	1,32513
$(e^X - X^2 + 3X - 2)^2$ [4]	$[-12; 10]$	0,257530285439861	1,34392
$\arctg[(X - 3)(X^2 + 4)^{-1}]$ [16]	$[-10; 6,5]$	-0,605551275032148	1,24470
$ \exp\{X^2 + 7X - 30\} - 1 $ [17]	$[-5; 4]$	3,000000000000000	1,35059
$ 2 - X^2 - \cos(X - 3^{-1}) $ [8]	$[0; 3]$	1,145437529920276	1,27276
$ e^X - 5X + 4 $ [10]	$[-20; 30]$	1,609437912434101	1,30588
$ 10X \exp(-X^2) - 1 $ [5]	$[1; 5]$	1,679630610428450	1,40687
$ 11X^{11} - 1 $ [18]	$[-3; 2]$	0,804133097503664	1,06318

В табл. 2 даны результаты сравнения минимизации функций

$$f(X) = \max\{\alpha^2 X^2, e^{-X}\}, \quad (11)$$

заданных на сегменте $[-20; 30]$ и реализованных методом Воронцовой (**МВ**) работы [6], а также методом **pRF-ПХ**.

Таблица 2. Данные сравнения решений примера (11)

Точность ε	Количество вычислений функции N и эффективность E											
	$\alpha = 1$				$\alpha = 10$				$\alpha = 100$			
	МВ		pRF-ПХ		МВ		pRF-ПХ		МВ		pRF-ПХ	
	N	E	N	E	N	E	N	E	N	E	N	E
10^{-1}	14	0,4439	9	0,6905	15	0,4143	11	0,3556	10	0,3912	10	0,6215
10^{-2}	20	0,4258	14	0,6084	15	0,5678	13	0,6552	15	0,5678	11	0,7743
10^{-3}	20	0,5410	16	0,6762	17	0,6364	20	0,5410	16	0,6762	18	0,5694
10^{-4}	20	0,6561	18	0,7210	18	0,7290	20	0,6561	17	0,7719	19	0,6906
10^{-5}	20	0,7712	18	0,8569	20	0,7712	22	0,7011	18	0,8569	24	0,6413
10^{-6}	24	0,7386	18	0,9849	26	0,6818	22	0,8052	20	0,8864	24	0,7386
10^{-7}	28	0,7153	20	1,0015	26	0,7704	22	0,9105	21	0,9538	24	0,8346
10^{-8}	38	0,5877	20	1,1664	26	0,8589	24	0,9305	23	0,9710	24	0,9305
10^{-9}	38	0,6483	22	1,1198	26	0,9475	25	0,9854	24	1,0265	26	0,9475
10^{-10}	38	0,7089	22	1,2244	26	1,0361	25	1,0775	29	0,9288	26	1,0361
10^{-11}	38	0,7695	22	1,3291	26	1,1246	25	1,1696	37	0,7903	28	1,0443
10^{-12}	38	0,8300	22	1,4338	26	1,2132	25	1,2617	41	0,7693	28	1,1265
10^{-13}	38	0,8906	24	1,4102	26	1,3017	25	1,3539	45	0,7521	28	1,2088
10^{-14}	38	0,9513	24	1,5061	26	1,3903	25	1,4459	53	0,6820	28	1,2910
10^{-15}	38	1,0118	24	1,5021	26	1,4789	25	1,5380	57	0,6746	28	1,3732

Как видно из таблицы, способ **МВ** показал хороший результат только при $\alpha = 10$, в то время как методу **pRF-ПХ** даже с постоянным параметром p удается за счет принятой комбинации успешно находить решения при разных степенях *разнонаклоненности* в окрестности решения.

Выводы

Опыт показывает, что причиной неудачного использования известных эффективных методов является разный абсолютный наклон ветвей функции, особенно в окрестности решения. Традиционно *разнонаклоненность* функции преодолевается за счет повышения порядка производных, используемых в методах. Но эти методы, к сожалению, оказываются достаточно эффективными лишь на определенных классах функций. С другой стороны, стремление переходить к прямым методам заставляет прибегать к аппроксимации производных и тем самым усложнять средства реализации поиска экстремума.

В данной работе использование принятого апостериорного подхода и соответствующей комбинации всего лишь линейных методов **pRF** и **ПХ** удается успешно ускорять продвижение к цели даже при значительной степени *разнонаклоненности* исследуемых на экстремум функций. Метод **pRF-ПХ** устроен таким образом, что в начале поиска отдается предпочтение методу **pRF**, а затем вступает в действие метод **ПХ**. Это связано с тем, что на начальном этапе устанавливается *степень разнонаклоненности* и осуществляется вход в окрестность решения, а также создаются необходимые условия, способствующие более успешному функционированию метода **ПХ**, который по мере продвижения решения к финальной точке начинает приобретать свойства, приближающие его к *методу касательных*. Предложенный подход позволяет строить более совершенные эффективные механизмы поиска характерных точек, поскольку не налагает каких-либо специальных требований к свойствам функции, кроме унимодальности. Допускаются в конечном числе точек разрывы функции первого рода. Благодаря комбинированному подходу метод **pRF-ПХ** почти обладает универсальным характером, т. е. может успешно обслуживать не только выпуклые или вогнутые, но и выпукло-вогнутые

унимодальные функции. Не требуются решения каких-либо вспомогательных задач для получения достаточно узкой окрестности экстремальной точки.

Полученные результаты могут быть широко использованы для многомерной оптимизации, в частности, для функций овражного строения, в том числе для некоторых функций с разрывной производной.

Метод не требует какого-либо предварительного исследования минимизируемой функции по выявлению ее особенностей или по установлению окрестности притяжения к решению и позволяет находить оптимум для достаточно широкого класса функций, задаваемых иногда даже эмпирически.

Литература

1. *Васильев, Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. – М.: Наука, 1980. – 520 с.
2. *Аоки, М.* Введение в методы оптимизации / М. Аоки. – М.: Наука, 1977. – 344 с.
3. *Шор, Н. З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения / Н. З. Шор. – Киев: Наук. думка, 1979. – 200 с.
4. *Yasmin, N.* Some derivative free iterative methods for solving non-linear equations / N. Yasmin, M. Junjua // Academic Research Intern. – 2012. – Vol. 2, № 1. – P. 75–82.
5. *Soleymani, F.* New derivative-free quasi-secant algorithm for solving non-linear equations / F. Soleymani // World academi Sciences, Eng. and Thehnology. – 2002. – Vol. 31. – P. 719–721.
6. *Воронцова, Е. А.* Быстросходящийся алгоритм линейного поиска в недифференцируемой оптимизации / Е. А. Воронцова // Моделирование систем. – 2012. – № 2 (32). – С. 39–48.
7. *Трауб, Дж.* Итерационные методы решения уравнений / Дж. Трауб. – М.: Мир, 1985. – 264 с.
8. *Ганшин, Г. С.* К теории итерационных процессов / Г. С. Ганшин // Вычисл. и прикл. математика. – Киев: Изд-во Киев. ун-та. – 1973. – № 19. – С. 143–147.
9. *Мелешко, В. И.* Градиентные методы оптимизации с памятью / В. И. Мелешко // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1973. – Т 1, № 1. – С. 38–51.
10. *Островский, А. М.* Решение уравнений и систем уравнений / А. М. Островский. – М.:Изд-во иностр. лит., 1963. – 219 с.
11. *Vox, M. J.* Non-linear optimization techniques / M. J. Vox, D. Davies, W. H. Swann. – Edinburgh: Oliver&Boyd, 1969. – 60 p.
12. *Powell, M. J. D.* An iterative method for finding stationary values of a function of several variables / M. J. D. Powell // Comp. J. – 1958. – Vol. 5, № 2. – P. 147–151.
13. *Мелентьев, П. В.* Несколько новых методов и приемов приближенных вычислений / П. В. Мелентьев. – Л.; М.: Гл. ред. техн. теорет. Лит, 1937. – 148 с.
14. *Chen, J.* An exponential regula falsi method for solving nonlinear equations / J. Chen, W. Li // Numerical Algorithms. – 2006. – Vol. 41, № 4. – P. 327–338.
15. *Soleymani, F.* Computing simple roots by a sixth order iterative method / F. Soleymani // Int. J. Pure and Appl Maths. – 2011. – Vol. 69, № 1. – P. 41–48.
16. *Вирченко, Н. А.* Графики функций. Справочник / Н. А. Вирченко, И. И. Ляшко, К. И. Швецов. – Киев: Наук. думка, 1979. – 320 с.
17. *Thukral, R.* New family hinh order Steffensen-type methods for solving nonlinear equations / R. Thukral // J. Modern Methods in Numerical Maths. – 2012. – Vol. 3, № 1. – P. 1–10.
18. *Soleymani, F.* A new derivative-free quasi-Secant algorithm for solving non-linear equations / F. Soleymani, M. Sharifi // Intern. J. Math. Comp., Phys. Electr. and Computer Eng. – 2009. – Vol. 3, № 7. – P. 554–556.

Поступила в редакцию 02.03.16