[1] **І. В. Сергієнко**, академік НАН України
[2] **О. М. Литвин**, д-р фіз.-мат. наук
[2] **О. О. Литвин**, канд. фіз.-мат. наук
[3] **О. В. Ткаченко**, канд. фіз.-мат. наук
[3] **О. Л. Грицай**

[1] Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, м. Київ
[2] Українська інженерно-педагогічна академія,
м. Харків, e-mail: academ_mail@ukr.net
[3] ДП СКБ «Івченко-Прогрес»
м. Запоріжжя, e-mail: avt2007@outlook.com

Ключові слова: *збереження класу диференційовності, сліди функції, сліди похідних на лінії, поліном Тейлора за однією змінною.*

УДК 519.6

ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАТОРА НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ ІЗ ЗБЕРЕЖЕННЯМ КЛАСУ ДИФЕРЕНЦІЙОВНОСТІ ЗА СЛІДАМИ ЇХ ПОХІДНИХ ДО ФІКСОВАНОГО ПОРЯДКУ НА ЗАДАНІЙ ЛІНІЇ

Запропоновано та досліджено методи побудови операторів відновлення диференційовних функцій двох змінних в околі гладкої кривої $\Gamma: \omega(x, y) = 0$ $\omega \in C^r(R^2)$, які зберігають клас диференційовності $C^r(R^2)$. Методи використовують для побудови вказаних операторів сліди наближуваної функції та її частинних похідних по одній змінній до заданого порядку на вказаній кривій.

Вступ

Стаття присвячена повному доведенню тверджень статті [1]. Оператори Тейлора та їх узагальнення, що використовують для своєї побудови значення наближуваної функції та її частинних похідних до заданого порядку $N \ge 0$ у деякій точці, мають порядок диференційовності, що повністю визначається диференціальними властивостями допоміжних (базисних) функцій (поліномів алгебраїчних, тригонометричних, узагальнених, сплайнів тощо). Оскільки функції двох і більше змінних можуть бути задані не тільки своїми значеннями та значеннями своїх частинних похідних в окремих точках, але також своїми слідами та слідами деяких диференціальних операторів на заданих лініях, то оператори, що використовують такі сліди, належать до класу диференційовності, який визначається диференціальними властивостями допоміжних (базисних) функцій і вказаних слідів. Нагадаємо, запис «$f(x_1, \dots, x_n) \in C^r(R^n)$» означає, що сама функція f і всі її частинні похідні до порядку r ($r \ge 0$) є неперервними, тобто $\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^{\beta_1} \cdots \partial x^{\beta_n}} f \in C(R^n),\ 0 \le |\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_n \le r$. Отже, в цьому означенні нема ніяких обмежень на частинні похідні порядків γ, $|\gamma| > r$, тобто існує вкладення класів функцій $C^q(R^n) \subseteq C^r(R^n)$, $r \le q < \infty$. У зв'язку з цим будемо говорити, що оператор L зберігає клас диференційовності наближуваної функції f, якщо $f \in C^r(R^n) \Rightarrow Lf \in C^r(R^n)$. Якщо ж $f \in C^r(R^n) \Rightarrow Lf \in C^q(R^n)$, $q < r$, то будемо говорити, що оператор L не зберігає клас диференційовності функції f.

Задача продовження функцій n змінних з границі області на область або на весь n-вимірний простір із збереженням потрібних диференціальних властивостей є однією з ключових задач теорії наближення функцій багатьох змінних (див. [2]–[11], [12]. В роботі [6] наведена формула

$$u(x, y) = \sum_{s=0}^{m-1} \frac{\partial^s G(x, y)}{\partial y^s} * \phi_s(x) = \sum_{s=0}^{m-1} \frac{1}{\pi(m-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_s(t) \frac{\partial^s}{\partial y^s}\left[\frac{y^m}{y^2 + (x-t)^2}\right] dt, \qquad u \in C^\infty(R^2).$$

$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt$ – згортка функцій f, g, яка є розв'язком задачі Коші для ітерованого оператора Лапласа

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^m u(x, y) = 0,\ u^{(0,s)} = \phi_s(x), \qquad s = 0, \dots, m-1.$$

Функція $G(x,y)=\dfrac{y^{m-1}}{\pi(m-1)!}\dfrac{y}{y^2+x^2}$ є фундаментальним розв'язком цієї задачі, тобто функцією, що задовольняє рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^m G(x,y)=0,$$

та умови Коші

$$G^{(0,k)}(x,0)=0,\quad k=0,\dots m-2;\qquad G^{(0,m-1)}(x,0)=\delta(x),$$

де $G^{(0,k)}(x,0)=\left.\dfrac{\partial^k G(x,y)}{\partial y^k}\right|_{y=0}$, $k=0,\dots m-2$; $\delta(x)$ – дельта функція Дірака.

При m = 1 отримуємо формулу Пуассона

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_0(t)\left[\frac{y}{y^2+(x-t)^2}\right]dt,$$

що є розв'язком задачі Коші $u(x, 0) = \varphi_0(x)$, $x \in R$ для рівняння $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y)=0$.

В працях [13], [14] досліджувалися оператори відновлення функцій багатьох змінних за допомогою операторів, що зберігають клас диференційовності $C^r(R^n)$, якому належить наближувана функція, але загальний випадок операторів, що зберігають клас диференційовності в околі довільної кривої, не досліджувався. Водночас практика дає приклади, у яких необхідно відновлювати поверхні за відомими слідами їх частинних похідних або деякої системи диференціальних операторів (взагалі кажучи, нелінійних) на заданій кривій. Найбільш відомим таким прикладом є задача побудови системи координатних функцій для варіаційних методів розв'язання крайових задач, що точно задовольняють граничні умови на границі області інтегрування. Якщо область, у якій розв'язується крайова задача, є об΄єднанням кількох відомих областей, то границя такої області може мати кутові точки, тобто буде недиференційовною лінією складної форми, що є об΄єднанням відрізків кількох відомих ліній. Як приклад також відмітимо необхідність відновлення поверхонь лопаток авіадвигунів або лопаток гвинтів на атомних підводних човнах, форма яких знаходиться з умови найкращого обтікання поверхні газом або рідиною шляхом розв'язання відповідних крайових задач (тобто форма поверхні обтікання є невідомою). Такі задачі є важливою складовою процесу конструювання лопаток. Однією з найскладніших задач, які виникають при цьому, є збереження відповідної гладкості наближуваної поверхні (тобто належність відповідних функцій до заданого класу диференційовності) та ізогеометрії (опуклість, вгнутість тощо) [5]. Загальний метод розв'язання таких задач можна отримати на основі використання узагальнень операторів інтерлінації функцій із збереженням класу диференційовності [13], [14].

Постановка задачі

В даній статті пропонуються і досліджуються методи побудови операторів наближення функцій двох змінних із збереженням класу диференційовності, якому належить наближувана функція за умови, що сліди цих операторів і сліди їх частинних похідних за однією із змінних до фіксованого порядку на заданій лінії співпадають із відповідними слідами наближуваної функції на цій лінії.

Метод побудови вказаних операторів планується використати для побудови узагальнених формул інтерлінації функцій двох змінних із збереженням потрібного класу диференційовності та із заданими слідами і слідами частинних похідних до фіксованого порядку на системі неперетинних плоских кривих в декартовій системі координат з використанням інтерлінації функцій [3], [15]–[21].

Оператори відновлення функцій двох змінних за допомогою їх слідів та слідів їх похідних за однією змінною на заданій лінії

Вважаємо, що ця лінія є неперервною разом із своїми похідними до порядку N включно Γ : $y = \gamma(x)$, $x \in R$, $\gamma(x) \in C^r(R)$, $r \geq N$, тобто $\omega(x, y) = y - \gamma(x)$.

Зауважимо, що оператор Тейлора за однією змінною

$$T_N f(x,y) = \sum_{s=0}^{N} f^{(0,s)}(x,\gamma(x)) \frac{\left(y-\gamma(x)\right)^s}{s!}, \qquad f^{(0,s)}(x,\gamma(x)) = \left.\frac{\partial^s f(x,y)}{\partial y^s}\right|_{y=\gamma(x)}$$

має властивості

$$\left.\frac{\partial^q T_N f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma(x)} = \left.\frac{\partial^q f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma(x)}, \qquad 0 \leq q \leq N,$$

$$f \in C^r(R^2) \bigcap f^{(0,s)}(x,\gamma(x)) \in C^{r-s}(R^2), \qquad 0 \leq s \leq N \leq r \Rightarrow T_N f \in C^{r-N}(R^2).$$

Тобто цей оператор, який є класичним узагальненням оператора Тейлора, по змінній y (змінна x вважається параметром) не зберігає класу диференційовності $C^r(R^2)$, якому належить функція $f(x, y)$. Це твердження, зокрема, виконується для функцій

$$f(x,y) = \left|x+y-1\right|^{2q+1} \in C^{2q}(R^2), \qquad f \notin C^{2q+1}(R^2), \qquad q = 0,\dots,N,$$

$$f(x,y) = \left|x+y-1\right|^{2q+1}\left(x+y-1\right) \in C^{2q+1}(R^2), \qquad f \notin C^{2q+2}(R^2).$$

Таким чином, $T_N f(x, y)$ не можна використовувати замість $f(x, y)$ без додаткового аналізу у тих задачах, де істотною є вимога, щоб функція $f(x, y)$ мала неперервні похідні порядку $t > 0$. Потрібні оператори такого типу вперше були побудовані в працях [16], [17] для випадку $\gamma(x) \equiv 0$ в дискретній та інтегральній формах. Зокрема, в дискретній формі оператор

$$L_N f(x,y) = \sum_{\ell=0}^{N} \lambda_{0,\ell} f(x+\beta_{0,\ell} y, 0) + \sum_{s=1}^{N}\sum_{\ell=0}^{N} \lambda_{s,\ell} \int_0^{x+\beta_{s,\ell} y} f^{(0,s)}(t,0) \frac{\left(x+\beta_{s,\ell} y - t\right)^{s-1}}{(s-1)!} dt$$

задовольняє такі умови:

$$f \in C^r(R^2) \bigcap f^{(0,s)} \in C^{r-s}(R^2) \Rightarrow L_N f \in C^r(R^2), \qquad 0 \leq s \leq N \leq r,$$

$$\left.\frac{\partial^q L_N f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial^q f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=0} \in C^{r-s}(R^2), \qquad 0 \leq q \leq N, \qquad ,$$

якщо невідомі $\lambda_{s,\ell}$, $l = 0, \ldots, N$ для кожного $s = 0, \ldots, N$ знаходяться шляхом розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{\ell=1}^{N} \lambda_{s,\ell} (\beta_{s,\ell})^p = \delta_{p,s}, \qquad 0 \leq p \leq N$$

за умов $-1 \leq \beta_{s,0} < \beta_{s,1} < \ldots < \beta_{s,N} \leq 1$, $s = 0, \ldots, N$.

Основні твердження статті

Нижче узагальнимо цей результат на випадок, коли сліди наближуваної функції та сліди її частинних похідних за змінною y до фіксованого порядку N задаються на лінії $y = \gamma(x) \in C^r(R)$. Нехай $f^{(0,s)}(x,y) = \frac{\partial^s f(x,y)}{\partial y^s}$. Введемо до розгляду оператор

$$O_N f(x,y) = \sum_{\ell=1}^{N} \lambda_{0,\ell} f(x+\beta_{0,\ell}(y-\gamma(x)), \gamma(x)) + \sum_{s=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{N} \lambda_{s,\ell} \int_0^{x+\beta_{s,\ell}(y-\gamma(x))} f^{(0,s)}(t,\gamma(t)) \frac{\left(x+\beta_{s,\ell}(y-\gamma(x))-t\right)^{s-1}}{(s-1)!} dt,$$

де $\beta_{s,\ell} \in [-1, 1]$, $s = 0, \ldots, N$, $\ell = 0, \ldots N$ – задані різні числа (дійсні або комплексні), невідомі $\lambda_{s,\ell}$, $s = 0, \ldots, N$, $\ell = 0, \ldots N$ для кожного цілого значення $s \in [0, N]$ знаходяться шляхом розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{\ell=1}^{N} \lambda_{s,\ell} (\beta_{s,\ell})^p = \delta_{p,s}, \qquad 0 \le p \le N.$$

Зауважимо, що ці системи мають єдиний розв'язок, оскільки їх детермінанти $\det [\beta_{s,\ell}^p]_{\ell=\overline{0,N}}^{p=\overline{0,N}} \neq 0$, $s = 0, \ldots, N$ є детермінантами Вандермонда.

Теорема 1. Оператор $O_N f$ має властивості

$$f \in C^r(R^2) \bigcap f^{(0,s)}(x, \gamma(x)) \in C^{r-s}(R^2), \qquad s = 0, \ldots, N \Rightarrow O_N f \in C^r(R^2),$$

$$\left.\frac{\partial^q O_N f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma(x)} = \left.\frac{\partial^q f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma(x)}, \qquad 0 \le q \le N, N \le r.$$

Доведення. Перш за все відмітимо, що доданок $F_0(x,y) = \sum_{\ell=1}^{N} \lambda_{0,\ell} f(x + \beta_{0,\ell}(y - \gamma(x)), \gamma(x))$ в операторі $O_N f(x, y)$ задовольняє умови $f \in C^r(R^2) \bigcap \gamma(x) \in C^r(R^2) \Rightarrow F_0 \in C^r(R^2)$, оскільки $F_0(x, y)$ є сумою доданків, кожний з яких належить до класу $C^r(R^2)$:

$$f \in C^r(R^2) \bigcap \gamma(x) \in C^r(R) \Rightarrow f(x + \beta_{0,\ell}(y - \gamma(x)), \gamma(x)) \in C^r(R^2).$$

Крім того,

$$F_0(x,y)\big|_{y=\gamma(x)} = \sum_{\ell=1}^{N} \lambda_{0,\ell} f(x + \beta_{0,\ell}(y - \gamma(x)), \gamma(x))\big|_{y=\gamma(x)} = f(x, \gamma(x)) \sum_{\ell=1}^{N} \lambda_{0,\ell} = f(x, \gamma(x)),$$

тому що $\sum_{\ell=1}^{N} \lambda_{0,\ell} (\beta_{0,\ell})^q = 1$, коли $q = 0$.

Далі

$$\left.\frac{\partial^q F_0(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma(x)} = \sum_{\ell=1}^{N} \lambda_{0,\ell} (\beta_{0,\ell})^q f^{(q,0)}(x + \beta_{0,\ell}(y - \gamma(x)), \gamma(x))\big|_{y=\gamma(x)} =$$

$$= f^{(q,0)}(x, \gamma(x)) \sum_{\ell=1}^{N} \lambda_{0,\ell} (\beta_{0,\ell})^q = f^{(q,0)}(x, \gamma(x)) \cdot 0 = 0, \qquad q = 1, \ldots N,$$

тому що $\sum_{\ell=1}^{N} \lambda_{0,\ell} (\beta_{0,\ell})^q = 0$, коли $q = 1, \ldots N$.

Тобто $\left.\frac{\partial^q F_0(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma(x)} = f(x, \gamma(x)) \delta_{0,q}$, $q = 0, \ldots N$.

Для доданків

$$F_s(x,y) = \sum_{\ell=1}^{N} \lambda_{s,\ell} \int_0^{x+\beta_{s,\ell}} f^{(0,s)}(t, \gamma(t)) \frac{(x + \beta_{s,\ell}(y - \gamma(x)) - t)^{s-1}}{(s-1)!} dt, \qquad s = 1, \ldots N$$

можна написати

$$\left.\frac{\partial^q F_s(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma(x)} =$$

$$\begin{cases} \sum_{\ell=1}^{N} \lambda_{s,\ell} (\beta_{s,\ell})^q \int_0^{x+\beta_{s,\ell}(y-\gamma(x))} f^{(0,s)}(t,\gamma(t)) \frac{(x+\beta_{s,\ell}(y-\gamma(x))-t)^{s-q-1}}{(s-q-1)!} dt\Big|_{y=\gamma(x)}, & 0 \le q \le s-1, \\ \sum_{\ell=1}^{N} \lambda_{s,\ell} (\beta_{s,\ell})^q f^{(0,s)}\left(x+\beta_{s,\ell}(y-\gamma(x)), \gamma(x+\beta_{s,\ell}(y-\gamma(x)))\right)\Big|_{y=\gamma(x)}, & q = s, \\ \sum_{\ell=1}^{N} \lambda_{s,\ell} (\beta_{s,\ell})^q \frac{\partial^{q-s}}{\partial y^{q-s}} f^{(0,s)}(x+\beta_{s,\ell}(y-\gamma(x)), \gamma(x+\beta_{s,\ell}(y-\gamma(x))))_{y=\gamma(x)}, & q = s+1, \dots N, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \int_0^x f^{(0,s)}(t,\gamma(t)) \frac{(x-t)^{s-q-1}}{(s-q-1)!} dt \sum_{\ell=1}^{N} \lambda_{s,\ell}(\beta_{s,\ell})^q, & 0 \le q \le s-1, \\ f^{(0,s)}(x,\gamma(x)) \sum_{\ell=1}^{N} \lambda_{s,\ell}(\beta_{s,\ell})^q, & q = s, \\ \frac{\partial^{q-s}}{\partial y^{q-s}} f^{(0,s)}(x+\beta_{s,\ell}(y-\gamma(x)), \gamma(x+\beta_{s,\ell}(y-\gamma(x))))_{y=\gamma(x)} \sum_{\ell=1}^{N} \lambda_{s,\ell}(\beta_{s,\ell})^q, & q = s+1, \dots N, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \int_0^x f^{(0,s)}(t,\gamma(t)) \frac{(x-t)^{s-q-1}}{(s-q-1)!} dt \cdot 0 = 0, & 0 \le q \le s-1, \\ f^{(0,s)}(x,\gamma(x)), & q = s, \\ \frac{\partial^{q-s}}{\partial y^{q-s}} f^{(0,s)}(x+\beta_{s,\ell}(y-\gamma(x)), \gamma(x+\beta_{s,\ell}(y-\gamma(x))))_{y=\gamma(x)} \cdot 0 = 0, & q = s+1, \dots N. \end{cases}$$

Таким чином, $\left.\frac{\partial^q F_s(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma(x)} = \delta_{s,q},\ 1 \le s, q \le N$. Це дозволяє написати такі рівності:

$$\left.\frac{\partial^q O_N f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma(x)} = \sum_{s=0}^{N} \left.\frac{\partial^q F_s(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma(x)} = \sum_{s=0}^{N} f^{(0,s)}(x,\gamma(x))\delta_{s,q} = f^{(0,q)}(x,\gamma(x)), \quad q = 0, \dots N.$$

Теорема 1 доведена.

Зауваження. При $\gamma(x) = 0$ як частинний випадок отримуємо $L_N f = O_N f$.

Оператори відновлення функцій двох змінних в інтегральній формі за допомогою їх слідів та слідів їх похідних за однією змінною на заданій кривій лінії

Введемо до розгляду оператор

$$D_N u(x,y) = \int_{-1}^{1} G_0(\beta) u(x+\beta(y-\gamma(x)), \gamma(x)) d\beta + \sum_{s=1}^{N} \int_{-1}^{1} G_s(\beta) \int_0^{x+\beta(y-\gamma(x))} u^{(0,s)}(t,\gamma(t)) \frac{(x+\beta(y-\gamma(x))-t)^{s-1}}{(s-1)!} dt d\beta.$$

де $G_s(\beta) \in C^r[-1, 1]$, $s = 0, \dots, N$ – задані функції.

$$\int_{-1}^{1} G_s(\beta) \beta^q d\beta = \delta_{s,q}, \qquad 0 \le s, q \le N.$$

Теорема 2. Оператор $D_N f$ задовольняють умови

$$f \in C^r(R^2) \bigcap \frac{\partial^s f}{\partial y^s} \in C^{r-s}(R^2) \Rightarrow D_N f \in C^r(R^2),$$

$$\left.\frac{\partial^q D_N f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma(x)} = \left.\frac{\partial^q f(x,y)}{\partial y^q}\right|_{y=\gamma(x)}, \qquad 0 \le q \le N, \quad N \le r,$$

якщо $\gamma(x) \in C^r(R)$ і допоміжні функції задовольняють умови

$$\int_{-1}^{1} G_s(\beta)\beta^p d\beta = \delta_{s,p}, \qquad 0 \le s, p \le N .$$

Доведення. Введемо позначення

$$F_0(x,y) = \int_{-1}^{1} G_0(\beta) f(x + \beta(y-\gamma(x)), \gamma(x)) d\beta .$$

Очевидно, $G_0(\beta) f(x + \beta(y-\gamma(x)), \gamma(x)) \in C^r(R^2)$ $\forall\beta \in [-1, 1]$, тому $F_0(x, y) \in C^r(R^2)$, оскільки інтегрування за параметром β не зменшує класу диференційовності. Крім того, оскільки $\int_{-1}^{1} G_0(\beta)\beta^p d\beta = \delta_{0,p}$, $0 \le p \le N$, то

$$\left.F_0(x,y)\right|_{y=\gamma(x)} = \left.\int_{-1}^{1} G_0(\beta) f(x + \beta(y-\gamma(x)), \gamma(x)) d\beta\right|_{y=\gamma(x)} =$$

$$= \int_{-1}^{1} G_0(\beta) f(x, \gamma(x)) d\beta = f(x,\gamma(x)) \int_{-1}^{1} G_0(\beta) d\beta = f(x, \gamma(x)),$$

$$\left.F_0^{(0,q)}(x,y)\right|_{y=\gamma(x)} = \left.\int_{-1}^{1} G_0(\beta)\beta^q f^{(q,0)}(x + \beta\left(y-\gamma(x)\right), \gamma(x)) d\beta\right|_{y=\gamma(x)} =$$

$$= f^{(q,0)}(x,\gamma(x)) \int_{-1}^{1} G_0(\beta)\beta^q d\beta = f^{(q,0)}(x,\gamma(x)) \cdot 0 = 0, \qquad q = 1, \ldots, N.$$

Тобто $\left.F_0^{(0,q)}(x,y)\right|_{y=\gamma(x)} = f(x,\gamma(x))\delta_{0,q}$, $q = 0, \ldots, N$.

Для доданків (при s = 1, …, N)

$$F_s(x,y) = \int_{-1}^{1} G_s(\beta) \int_{0}^{x+\beta(y-\gamma(x))} f^{(0,s)}(t,\gamma(t)) \frac{\left(x + \beta(y-\gamma(x)) - t\right)^{s-1}}{(s-1)!} dt d\beta$$

можна написати

$$F_s^{(0,q)}(x,y)\Big|_{y=\gamma(x)}=$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x f^{(0,s)}(t,\gamma(t))\frac{(x-t)^{s-q-1}}{(s-q-1)!}dt\int_{-1}^{1}G_s(\beta)\beta^q d\beta, \quad q=0,\ldots,s-1,\\ \displaystyle f^{(0,s)}(x,\gamma(x))\int_{-1}^{1}G_s(\beta)\beta^s d\beta, \quad q=s,\\ \displaystyle\frac{\partial^{q-s}}{\partial y^{q-s}}f^{(0,s)}(x+\beta_{s,\ell}(y-\gamma(x)),\gamma(x+\beta_{s,\ell}(y-\gamma(x))))\Big|_{y=\gamma(x)}\times\int_{-1}^{1}G_s(\beta)\beta^q d\beta, \quad q=s+1,\ldots,N,\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x f^{(0,s)}(t,\gamma(t))\frac{(x-t)^{s-q-1}}{(s-q-1)!}dt\cdot 0=0, \quad q=0,\ldots,s-1,\\ f^{(0,s)}(x,\gamma(x)), \quad q=s,\\ \displaystyle\frac{\partial^{q-s}}{\partial y^{q-s}}f^{(0,s)}(x+\beta(y-\gamma(x)),\gamma(x+\beta(y-\gamma(x))))_{y=\gamma(x)}\cdot 0=0, \quad q=s+1,\ldots N.\end{cases}$$

Таким чином,

$$\frac{\partial^q F_s(x,y)}{\partial y^q}\Big|_{y=\gamma(x)}=f^{(0,s)}(x,\gamma(x))\delta_{s,q}, \quad 1\le s,\ q\le N \quad \text{і}$$

$$\frac{\partial^q D_N f(x,y)}{\partial y^q}\Big|_{y=\gamma(x)}=\sum_{s=0}^{N}\frac{\partial^q F_s(x,y)}{\partial y^q}\Big|_{y=\gamma(x)}=\sum_{s=0}^{N}f^{(0,s)}(x,\gamma(x))\delta_{s,q}=f^{(0,q)}(x,\gamma(x)), \quad q=0,\ldots,N.$$

Теорема 2 доведена.

Наведемо приклади ядер інтегральних операторів $G_{N,s}(\beta)$.

Приклад 1. Нехай $b = 1$, $N \ge 1$. Для ядер поліноміального типу

$$G_{N,s}(\beta)=G_s(\beta)=\sum_{k=0}^{N}a_{s,k}\beta^k, \qquad s=0,\ldots,N$$

коефіцієнти $a_{s,k}$ знаходяться для кожного значення $s = 0, \ldots, N$ із систем лінійних алгебраїчних рівнянь порядку $(N + 1)$

$$\int_{-b}^{b}G_s(\beta)\beta^p d\beta=\int_{-1}^{1}G_s(\beta)\beta^p d\beta=\delta_{s,p}, \qquad p=0,\ldots,N.$$

Зокрема, у випадках $N = 1, 2$ маємо

$$N=1: \quad G_0(\beta)=\frac{1}{2}; \quad G_1(\beta)=\frac{3}{2}\beta;$$

$$N=2: \quad G_0(\beta)=\frac{9}{8}-\frac{15}{8}\beta^2; \quad G_1(\beta)=\frac{3}{2}\beta; \quad G_2(\beta)=-\frac{15}{8}+\frac{45}{8}\beta^2.$$

Приклад 2. Нехай $b = \infty$, $N \ge 1$. Для ядер вигляду

$$G_s(\beta)=e^{-\beta^2}\sum_{k=0}^{N}a_{s,k}\beta^k$$

коефіцієнти $a_{s,k}$ знаходяться для кожного значення $s = 0, \ldots, N$ із систем

$$\int_{-b}^{b}G_s(\beta)\beta^q d\beta=\int_{-\infty}^{\infty}G_s(\beta)\beta^p d\beta=\delta_{s,p}, \qquad p,s=0,\ldots,N,$$

$$\sum_{k=0}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2}\beta^{k+p}d\beta\,, \qquad a_{s,k}=\delta_{s,p}; \quad p,s=0,\ldots,N.$$

Розв’язуючи цю систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $a_{s,k}$, s, k = 0, …, N для кожного значення s = 0, …, N, отримаємо $G_s(\beta)$. Наприклад,

$$N=1, \qquad b=\infty, \qquad G_0(\beta)=\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2}d\beta\right)^{-1} e^{-\beta^2}; \qquad G_1(\beta)=\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2}\beta^2 d\beta\right)^{-1} e^{-\beta^2}\beta.$$

Література

1. *Відновлення* функцій двох змінних із збереженням класу $C^r(R^2)$ за допомогою їх слідів та слідів їх похідних до фіксованого порядку на заданій лінії / І. В. Сергієнко, О. М. Литвин, О. О. Литвин та ін // Доп. НАН України. - 2014. - № 2. – С. 50–55.
2. *Сергиенко, И. В.* Системный анализ / И. В. Сергиенко, В. С. Дейнека. – Киев: Наук. думка, 2013.– 500 с.
3. *Сергієнко, І. В.* Елементи загальної теорії оптимальних алгоритмів і суміжні питання / І. В. Сергієнко, В. К. Задірака, О. М. Литвин. – К.: Наук. думка, 2012. – 404 с.
4. *Тихонов, А. Н.* Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
5. *Квасов, Б. И.* Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами / Б. И. Квасов. – М.: Физматлит, 2006. – 360 с.
6. *Шилов, Г. Е.* Математический анализ. Второй спец. курс / Г. Е. Шилов. – М.: Наука, 1965. – 327 с.
7. *Никольский, С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
8. *Бесов, О. В.* Интегральные представления функций и теоремы вложения / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. – М.: Наука, 1975. – 480 с.
9. *Стейн, И.* Сингулярные интегралы и диференциальные свойства функций / И. Стейн. – М.: Мир, 1973. – 342 с.
10. *Владимиров, В. С.* Обобщённые функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1979. – 318 с.
11. *Хермандер, Л.* Диференциальные операторы с постоянными коэффициентами / Л. Хермандер. – М.: Мир, 1986. – 455 с.
12. *Математическая* энциклопедия / Под ред. И. М. Виноградова: В 5-ти т. – М.: Сов. энциклопедия, 1984. – Т. 5. – 1215 с.
13. *Литвин, О. М.* Інтерполяція функцій та їх нормальних похідних на гладких лініях в R^n / О. М. Литвин // Доп. АН УРСР. – 1984. – № 7. – С. 15–19.
14. *Литвин, О. М.* Точний розв’язок задачі Коші для рівняння $\prod_{i=0}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t}-a_i^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t)=g(x,t)$ / О. М. Литвин // Доп. АН УРСР. – 1991. – № 3. – С. 12–17.
15. *Литвин, О. М.* Інтерфлетація функцій при розв’язуванні тривимірної задачі теплопровідності / О. М. Литвин, Л. І. Гулік. – К.: Наук. думка, 2011. – 210 с.
16. *Литвин, О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О. М. Литвин – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
17. *Литвин, О. М.* Інтерлінація функцій / О. М. Литвин – Харків: Основа, 1993. – 235 с.
18. *Литвин, О. М.* Методи обчислень. Додаткові розділи / О. М. Литвин. – К.: Наук. думка, 2005. – 331 с.
19. *Сергієнко, І. В.* Математичне моделювання в комп’ютерній томографії з використанням інтерфлетації функцій / І. В. Сергієнко, О. М. Литвин, Ю. І. Першина. – Харків, 2008. – 160 с.
20. *Оптимальні* алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування: У 2-х т. Т. 1. Алгоритми / І. В. Сергієнко, В. К. Задірака, О. М. Литвин та ін. – К.: Наук. думка, 2011.– 447 с.
21. *Оптимальні* алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування: У 2-х т. Т. 2. Застосування / І. В. Сергієнко, В. К. Задірака, О. М. Литвин, та ін. – К.: Наук. думка, 2011. – 348 с.

Надійшла до редакції 03.03.16