[1,2] **Л. С. Бозбей**
[1,3] **А. О. Костиков**, д-р техн. наук
[2,3] **В. И. Ткаченко**, д-р. физ.-мат. наук

[1] Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, г. Харьков,
e-mail: kostikov@ipmach.kharkov.ua
[2] Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт» НАН Украины,
e-mail: bozbiei@kipt.kharkov.ua
[3] Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

УДК 536.24

ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС В ПОДОГРЕВАЕМОЙ СНИЗУ СВОБОДНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ КОНВЕКТИВНОЙ ЯЧЕЙКЕ С КОНИЧЕСКИ УГЛУБЛЕННЫМ ДНОМ

Розглянуто задачу про теплову конвекцію в'язкої нестисливої рідини у циліндричній елементарній конвективній комірці з конічно поглибленим дном та вільними граничними умовами. Побудовано функції Стокса у циліндричній вільній конвективній комірці з плоскими межами, а також у конічному поглибленні дна комірки. На підставі ефекту Фудзівари отримано модельні розподіли ліній струму Стокса та обуреної температури у циліндричній елементарній конвективній комірці з конічно поглибленим дном та вільними граничними умовами.

Ключові слова*: елементарна конвективна комірка, вільні межі, конвективні процеси, теплоперенос, температурний градієнт.*

Введение

Процессы конвективного тепломассопереноса в слоях подогреваемой снизу или охлаждаемой сверху вязкой, несжимаемой жидкости исследуются на протяжении более сотни лет. Предметом исследования являются возникающие в процессе нагрева жидкости конвективные упорядоченные структуры в виде двухмерных валов и полигональных трехмерных ячеек, в том числе ячеек Рэлея – Бенара [1, 2], квазидвухмерных валиковых структур или конвективных структур другого вида.

В обзоре [3] указанные структуры достаточно хорошо описаны и изучены. Здесь дано описание различных подходов к экспериментальному и теоретическому изучению проблемы, систематизированы основные типы структур и режимов тепловой конвекции, рассмотрены различные реализации масштабирования течений. Однако несмотря на достаточно обширный и проработанный материал по конвективному тепломассопереносу вне рамок исследования остались неисследованными такие структуры, как цилиндрические конвективные ячейки. Такие ячейки впервые, без придания им физической трактовки, аналитически описаны в работах [4–5]. Позже, в [6, 7] было выполнено как экспериментальное, так и теоретическое исследование теплофизических свойств цилиндрической конвективной ячейки в слое подогреваемой снизу вязкой, несжимаемой жидкости.

На основании этих исследований было предложено рассматривать цилиндрическую конвективную ячейку как элементарную, из большого количества которых, в результате плотной упаковки, создаются пространственно-периодические структуры типа ячеек Бенара. Таким образом, предложенная элементарная конвективная ячейка позволила объяснить существующее геометрическое подобие свободных ячеек, начиная от лабораторных условий [8] и заканчивая супергранулами на Солнце [9].

Приведенное выше описание цилиндрической свободной конвективной ячейки применимо для случая слоя жидкости с плоскими границами. Для конвективной ячейки с неплоским дном будут наблюдаться другие пространственные распределения конвективных потоков. Например, в водоемах с полусферическим дном распределение потоков вблизи твердого дна отражает его геометрию [10], что вполне объяснимо требованием выполнения граничных условий: равенством скорости на неподвижной твердой границе нулю [11]. При этом в качестве базовых функций, на наш взгляд, следует использовать аналитические решения стационарной линейной задачи Рэлея в случае свободных [1–3] граничных условий.

В настоящей работе рассмотрена задача о конвективном тепломассопереносе в подогреваемой снизу цилиндрической элементарной конвективной ячейке с конически углубленным дном и свободными граничными условиями.

Постановка задачи

Рассмотрим расположенную в бесконечном в направлениях осей x и y слое вязкой, несжимаемой жидкости толщиной h цилиндрическую конвективную ячейку с нижней границей в виде конического углубления с образующей $z = \Delta h(r/r_{cell} - 1)$, соосного с ячейкой, где r_{cell} – радиус цилиндрической элементарной конвективной ячейки. Ось z направлена вверх, перпендикулярно границам слоя $z = 0$ и $z = h$ (см. рис. 1). Температура границ слоя задана таким образом, что температура ниже лежащих уровней ячейки больше температуры верхних уровней: $T_0(0) = T_2$, $T_0(h) = T_1$, $(T_2 > T_1)$, а температура вершины конуса $T_0(-\Delta h) \equiv T_3 + \Delta T_{cone}$ $(\Delta T_{cone} > 0)$. Предполагаем, что в состоянии равновесия распределение температуры внутри ячейки описывается линейной функцией от координаты

$$\vec{\nabla} T_0(z) = -\frac{\Theta}{h}\vec{e}_z \qquad (0 \le z \le h),$$

$$\vec{\nabla} T_0(z) = -\frac{\Delta T_{cone}}{\Delta h}\vec{e}_z \qquad (-\Delta h \le z \le 0),$$

где $T_0(z)$ – распределение температуры по толщине слоя, $\Theta = T_2 - T_1$ – разность температур между нижней и верхней плоскостями, $\vec{e}_z$ — единичный вектор, направленный вдоль оси z, $\Delta T_{cone} = \Theta\Delta h/h$.

Схема элементарной конвективной ячейки с коническим углублением

На рис. 1 приведена схема цилиндрической элементарной конвективной ячейки радиусом $R_c = r_{cell}/h = 1{,}72$ [8] в слое вязкой, несжимаемой жидкости толщиной h с указанием геометрических и тепловых параметров. Нижняя граница ячейки имеет вид конического углубления.

При $0 \le z \le h$ стационарные нормальные возмущения компонент скорости $v_z(r, z)$, $v_r(r, z)$ и температуры $T(r, z)$ цилиндрической элементарной ячейки со свободными граничными условиями ($v_z = 0$, $\partial^2 v_z/\partial z^2 = 0$, $T = 0$) определяются выражениями [6–8]

$$\begin{gathered} v_z(r,z) = A\sin(n\pi z)J_0(k_r r), \\ v_r(r,z) = -An\pi k_r^{-1}\cos(n\pi z)J_1(k_r r), \\ T(r,z) = B\sin(n\pi z)J_0(k_r r), \end{gathered} \qquad (1)$$

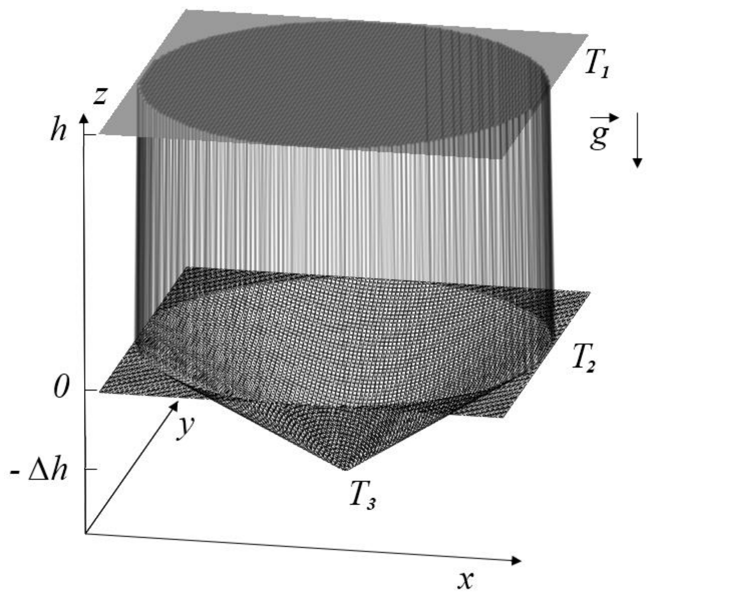

Рис. 1. Схема цилиндрической элементарной конвективной ячейки с указанием геометрических и тепловых параметров

где A, B – константы; $J_0(k_r r)$, $J_1(k_r r)$ – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка соответственно; k_r – радиальное волновое число, характеризующее зависимость возмущений от поперечной координаты r.

Решения (1) для модового числа $n = 1$ описывают стационарные возмущения скорости и температуры элементарной конвективной ячейки.

При $-\Delta h \le z \le 0$ возмущенные скорости и температура не могут быть представлены в виде нормальных мод (1), т. к. на конической границе $z = \Delta h(r/R_c - 1)$ они будут связаны между собой. Поэтому пространственное распределение скоростей и температуры при $-\Delta h \le z \le 0$ представим в виде бесконечных рядов Фурье и Фурье–Бесселя [12] по пространственным гармоникам

 ISSN 0131–2928. Пробл. машиностроения, 2016, Т. 19, № 2

$$v_z(r,z)=\sum_{n,l=1}^{\infty}A_{n,l}\sin(nk_0z)J_0(\kappa_{r,l}r),$$

$$v_r(r,z)=-\sum_{n,l=1}^{\infty}A_{n,l}\frac{nk_0}{\kappa_{r,l}}\cos(nk_0z)J_1(\kappa_{r,l}r),$$

$$T(r,z)=\sum_{n,l=1}^{\infty}B_{n,l}\sin(nk_0z)J_0(\kappa_{r,l}r),$$

где $k_0=\pi/\Delta h$ – волновое число вдоль оси z; $\kappa_{r,l}=\sigma_{0,l}/R_c$ – волновые числа вдоль оси r; $\sigma_{0,l}$ – нули функции Бесселя нулевого порядка первого рода, расположенные в порядке возрастания с увеличением индекса $l = 1, 2, 3, \ldots$.

Константы $A_{n,l}$ и $B_{n,l}$ могут быть определены из граничных условий. Так, например, на оси ячейки ($r = 0$) имеем

$$v_z(0,z)\equiv f_1(z)=\sum_{n,l=1}^{\infty}A_{n,l}\sin(nk_0z),$$

$$v_r(0,z)=0, \tag{2}$$

$$T(0,z)\equiv f_2(z)=\sum_{n,l=1}^{\infty}B_{n,l}\sin(nk_0z),$$

На верхней границе конического углубления дна ячейки ($z = 0$) справедливы соотношения

$$v_z(r,0)=T(r,0)=0,$$

$$v_r(r,0)\equiv f_3(r)=-\sum_{n,l=1}^{\infty}A_{n,l}\frac{nk_0}{\kappa_{r,l}}J_1(\kappa_{r,l}r). \tag{3}$$

На конической поверхности ячейки, когда $z=\Delta h(r/R_c-1)$, должны выполняться граничные условия

$$v_z(r,\Delta h(r/R_c-1))=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A'_{n,l}(-1)^n\exp\left(i\frac{n\pi}{R_c}r\right)J_0(\kappa_{r,l}r)=0, \tag{4}$$

$$v_r(r,\Delta h(r/R_c-1))=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A'_{n,l}\frac{ink_0}{\kappa_{r,l}}(-1)^n\exp\left(i\frac{n\pi}{R_c}r\right)J_1(\kappa_{r,l}r)=0, \tag{5}$$

$$T(r,\Delta h(r/R_c-1))=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}B'_{n,l}(-1)^n\exp\left(i\frac{n\pi}{R_c}r\right)J_0(\kappa_{r,l}r)=0,$$

где $(A, B)_{-n,l}=-(A, B)_{n,l}$, $(A', B')_{n,l}=-i0{,}5(A', B')_{n,l}$, i – мнимая единица.

Равенство нулю одновременно вертикальной (4) и горизонтальной (5) скорости на конической поверхности следуют из условия равенства вектора скорости нулю на неподвижных твердых поверхностях [11].

Пространственное поле распределения потока в ячейке

Найдем теперь пространственное поле распределения скоростей потока в ячейке с коническим дном. Для этого, основываясь на параметрах цилиндрической конвективной ячейки [8], полагаем заданными функции в выражении (2), (3) в виде

$$f_1(z)=A(0,z)\sin(k_0z),$$

$$f_3(r)=A(r,0)\frac{k_0R_c}{\sigma_{1,1}}J_1\left(\frac{\sigma_{1,1}}{R_c}r\right), \tag{6}$$

где $A(r, z)$ – константа, зависящая от координат r и z.

На основании (6) можно построить функцию Стокса для линий тока. Она автоматически удовлетворяет уравнению непрерывности и имеет вид

$$\psi(r,z)=A(r,z)r\frac{R_c}{\sigma_{1,1}}\sin\left(\frac{\pi}{\Delta h}z\right)J_0\left(\frac{\sigma_{1,1}}{R_c}r\right)\equiv A(r,z)\psi_0(r,z). \tag{7}$$

Линии тока получаются как результат решения уравнения $\psi(r, z)$ = const [4].

Определим функциональную зависимость $A(r, z)$ от координат. Для этого найдем приращение $\psi(r, z)$ при смещении координаты от r_0 и z_0 на малые величины dr и dz соответственно, положив $r = r_0 + dr$ и $z = z_0 + dz$. Тогда нетрудно получить

$$d\psi=\frac{\partial\psi(r_0,z)}{\partial r}dr+\frac{\partial\psi(r_0,z)}{\partial z}dz=0\,. \tag{8}$$

Выполняя дифференцирование в (8) и учитывая, что по определению $\partial\psi_0(r, z)/\partial r = rv_z(r, z)$ а $\partial\psi_0(r, z)/\partial z = -rv_r(r, z)$, преобразуем выражение (7) к виду

$$rA(r,z)\left(v_z(r,z)-v_r(r,z)\frac{dz}{dr}\right)+\psi_0(r,z)\frac{dA(r,z)}{dr}=0 \tag{9}$$

Первое слагаемое в (9) на конической границе равно нулю, т. к. представляет собой нормальную к поверхности границы компоненту скорости. Из второго слагаемого следует, что $A(r, z) = A_0\vartheta(z/\Delta h - r/R_c)$, где A_0 – произвольная константа интегрирования; $\vartheta(x)$ – произвольная функция от аргумента x, равная нулю на границе $z = \Delta h(r/R_c - 1)$.

В качестве таких функций, например, можно взять следующие модельные функции: $\vartheta_1(r, z) = J_0(\sigma_{0,1}(z/\Delta h - r/R_c))$ или $\vartheta_2(r, z) = \cos((z/\Delta h - r/R_c)\pi/2)$.

На рис. 2 приведен график линий тока для модельной функции первого вида $\vartheta_1(x)$. Для модельной функции второго вида $\vartheta_2(x)$ график линий тока подобен линиям тока для $\vartheta_1(x)$.

Использование предложенных видов модельных функций или других должно основываться на экспериментальных данных. Однако из предложенных решений можно сделать следующие выводы: распределения линий тока в ячейках с различными модельными функциями качественно подобны; распределения линий тока в ячейках с различными модельными функциями отличаются максимальной величиной функции Стокса.

На рис. 3 приведено распределение линий тока в свободной цилиндрической элементарной конвективной ячейке с коническим дном глубиной $\Delta h = 1/3$.

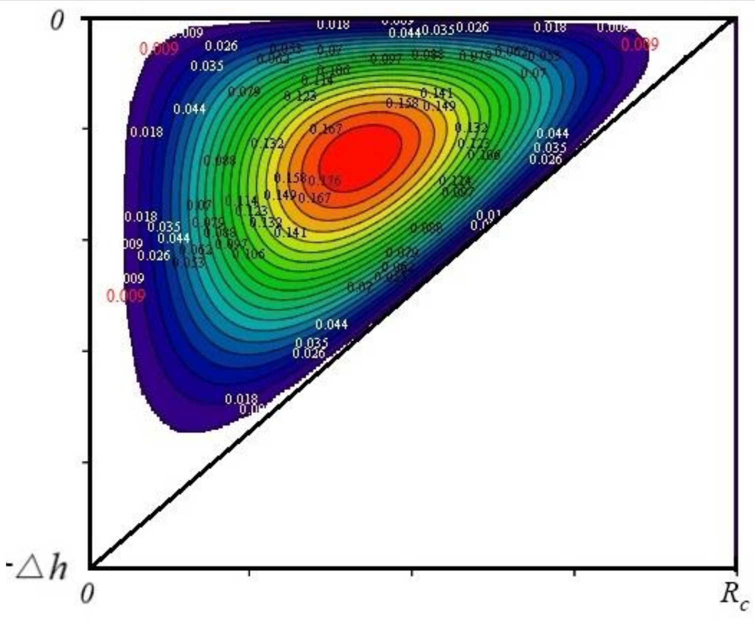

Рис. 2. Линии тока для модельной функции $\vartheta_1(x)$

Изображенная на рис. 3 конфигурация линий тока аналогична расположению линий тока двух близко расположенных циклонов [13], взаимодействие которых исследовано японским метеорологом С. Фудзиварой. Согласно этому исследованию центры двух циклонов вращаются вокруг общего центра, сближаются друг с другом и сливаются в один. Этот эффект носит название эффекта Фудзивары.

В случае, изображенном на рис. 3, вихри расположены в закрытом объеме и поэтому не могут вращаться, а будут накладываться друг на друга, заполняя объем элементарной конвективной ячейки с конически углубленным дном. В соответствии с эффектом Фудзивары результирующая функция Стокса $\psi_{1,2}(r, z)$ будет определяться суперпозицией функций Стокса линий тока двух вихрей, стремящихся приобрести одинаковый масштаб

$$\psi_{1,2}(r,z) = $$
$$= A_0\left(1-\vartheta_{1,2}\left((1+\Delta h)z/\Delta h - r/R_c\right)\right)\times$$
$$\times \psi_0(r, z\Delta h).$$

Применение принципа суперпозиции функций Стокса обусловлено использованием линейного приближения при описании тепломассопереноса в конвективной ячейке со свободными граничными условиями. Вычитание функций Стокса двух вихрей объясняется разнонаправленностью горизонтальных скоростей рассматриваемых вихрей при $z = 0$.

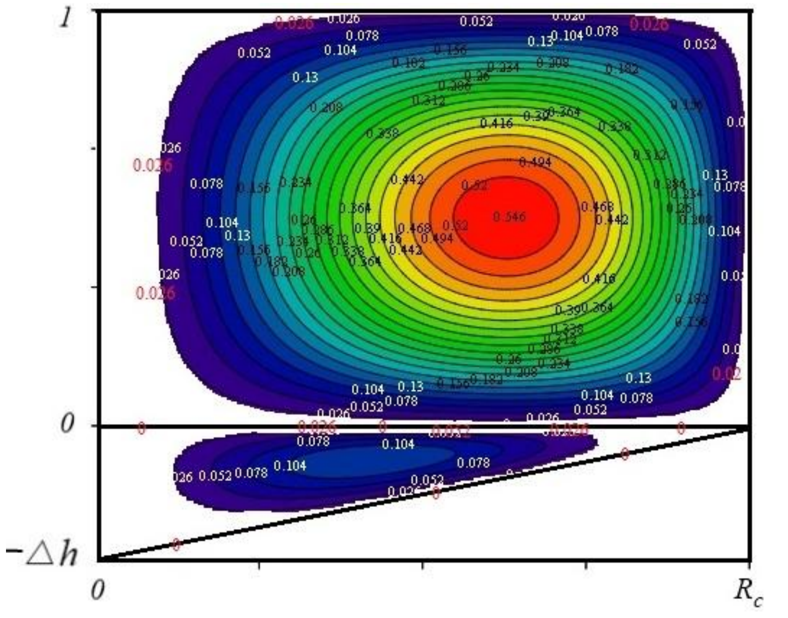

Рис. 3. Линии тока свободной цилиндрической элементарной конвективной ячейки

На рис. 4 приведены линии тока Стокса в свободной цилиндрической элементарной конвективной ячейке с конически углубленным дном глубиной Δh = 1/3 для модельной функции $\vartheta_2(x)$ в результате наложения двух вихрей в ячейке.

Результирующее распределение возмущенной температуры $T(r, z)$ в конвективной ячейке с конически углубленным дном глубиной Δh = 1/3 для модельной функции $\vartheta_1(x)$ показано на рис. 5.

В случае модельной функции $\vartheta_2(x)$ распределение возмущенной температуры подобно приведенному на рис. 5, с той лишь разницей, что максимальное значение возмущенной температуры при $r = 0$ в относительных единицах в первом случае в 1.55 раз больше, чем во втором. Кроме того, для модельной функции $\vartheta_2(x)$ линии уровней возмущенной температуры в верхней части ячейки вблизи $r = 0$ принимают отрицательные значения, что соответствует аномальному быстрому охлаждению жидкости в этой области по сравнению со случаем модельной функции $\vartheta_1(x)$.

Выводы

Таким образом, в работе исследована тепловая конвекция вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической элементарной конвективной ячейке с конически углубленным дном и свободными граничными условиями. Построены линии Стокса для массопереноса в коническом углублении конвективной ячейки, которые удовлетворяют свободным граничным условиям на верхней границе $z = 1$ и на конической поверхности. Построены линии Стокса распределения линий тока в цилиндрической элементарной конвективной ячейке с коническим дном глуби-

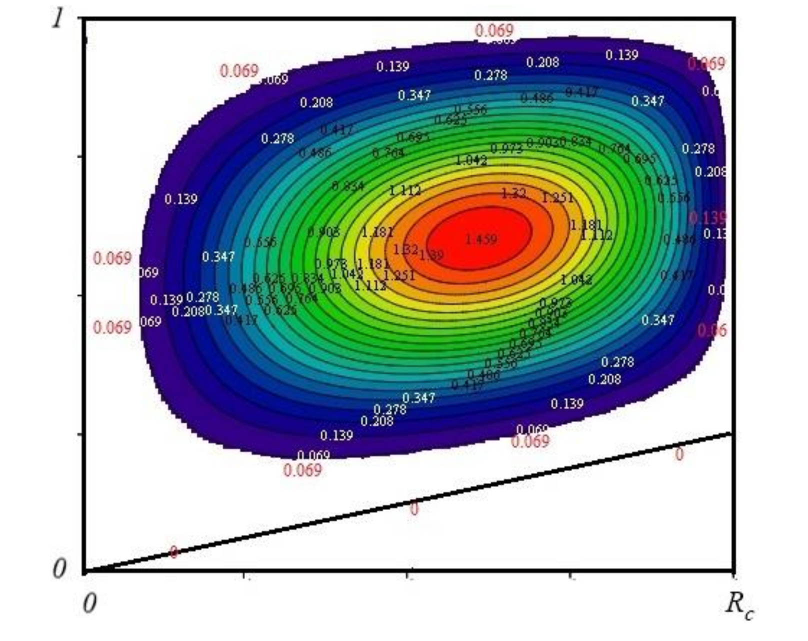

Рис. 4. Результирующее распределение линий тока Стокса в свободной цилиндрической элементарной конвективной ячейке

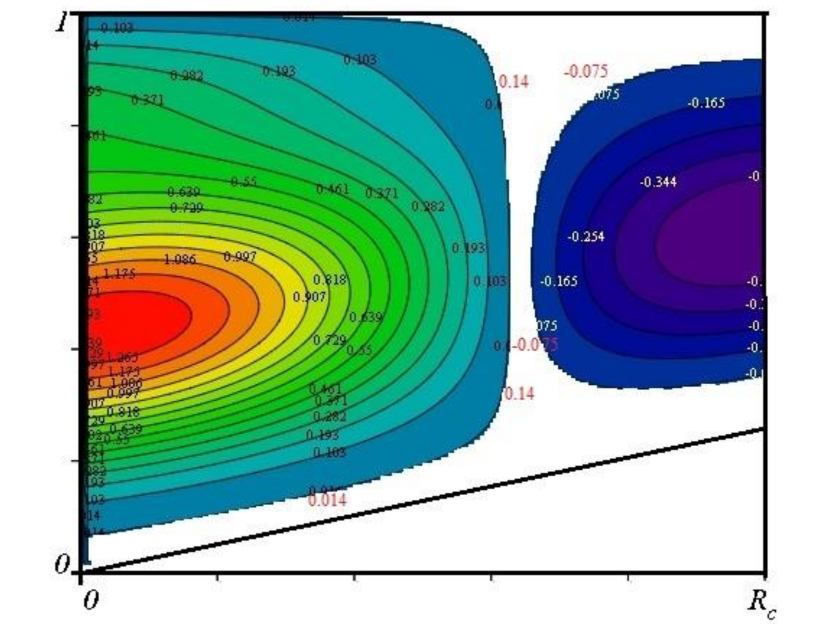

Рис. 5. Результирующее распределение возмущенной температуры в свободной цилиндрической элементарной конвективной ячейке

ной $\Delta h = 1/3$ со свободными граничными условиями на верхней $z = 1$ и нижней, конической границах. С использованием эффекта Фудзивары получены модельные распределения линий тока Стокса и возмущенной температуры в цилиндрической элементарной конвективной ячейке с конически углубленным дном и свободными граничными условиями.

Литература

1. *Strutt, J. W. (Lord Rayleigh).* On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side / J. W. Strutt (Lord Rayleigh). // Phil. Mag. – 1916. – Vol. 32. – P. 529–546.
2. *Гершуни, Г. З.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г. З. Гершун, Е. М. Жуховицкий. – М.: Наука, 1972. – 393 р.
3. Гетлинг, А. В. Формирование пространственных структур конвекции Рэлея—Бенара / А. В. Гетлинг // Успехи физических наук. – 1991. – Vol. 161, № 9. – P. 1–80.
4. *Zierep J.* Über rotationssymmetrische Zellularkonvektionsströmungen / J. Zierep // Z. Agev. Mah. Mech. – 1958. – Bd. 39, № 7/8. – 329–333.
5. *Koschmieder E. L.* Bénard Cells and Taylor Vortices (Cambridge Monographs on Mechanics) / E. L. Koschmieder. – Cambridge University Press (February 26, 1993). – 350 p.
6. *Бозбей Л. С.* Элементарная конвективная ячейка в слое несжимаемой, вязкой жидкости / Л. С. Бозбей // Сучасні проблеми машинобудування: Тез. доп. конф. молодих вчених та спеціалістів; ІПМаш НАН України. – Харків, 2013. – С. 29.
7. *Bozbiei, L. S.* Elementary Convective Cell in Incompressible Viscous Fluid and its Physical Properties / L. S. Bozbiei, A. O. Kostikov, V. I. Tkachenko // Mode Conversion, Coherent Structures and Turbulence : Intern. Conf. MSS-14, Space Research Institute. – Russia, Moscow, 2014. – P. 322–327.
8. *Bozbey, L. S.* Formation of Elementary Convective Cell in Horizontal Layer of Viscous Incompressible Fluid / L. S. Bozbey, B. V. Borts, A. O. Kostikov, V. I. Tkachenko // East-European J. of Phys. – 2014. – Vol. 1, № 4. – P. 49–56.
9. *Bozbey, L. S.* Destruction of Bernard Cells Under Local Irregularities of Thermal Equilibrium and their Forming Over the Bernard Cells / L. S. Bozbiei, A. O. Kostikov, V. I. Tkachenko // East-European J. of Phys.– 2015. – Vol. 2, № 2. – P. 24–33.
10. *Винников, С. Д.* Гидрофизика: Учеб. для вузов / С. Д. Винников, Б. В. Проскуряков. – Л.: Гидрометеоиздат, 1988. – 248 с.
11. *Ландау, Л. Д.* Теоретическая физика: В 10 т. Т. 6. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. –М.: Наука, 1986. – 736 с.
12. *Корн, Г. А.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. А. Корн, Т. М. Корн. – М.: Наука, 1977. – 832 с.
13. *Fujiwhara. S.* The natural tendency towards symmetry of motion and its application as a principle in meteorology / S. Fujiwhara // Quarterly J. of the Royal Meteorological Society. – 1921. – Vol. 47, № 200. – P. 287–292.

Поступила в редакцию 01.04.16