О. М Литвин, д-р. фіз.-мат. наук,
І. С. Томанова

Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків,
e-mail: rector@uipa.edu.ua

УДК 519.6

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ЗГИН ПЛАСТИНИ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ВИКОРИСТАННЯМ СПЛАЙНІВ П'ЯТОГО СТЕПЕНЯ НА ТРИКУТНІЙ СІТЦІ

Ключові слова: *сплайни п'ятого степеня, бігармонічна задача, прямокутна пластина, рівномірно розподілене навантаження.*

Розглянуто використання сплайнів 5-го степеня на трикутній сітці вузлів для розв'язання задачі про згин для жорстко защемленої пластини з рівномірним навантаженням. Результати проведеного обчислювального експерименту порівнюються з відомими результатами вчених.

Вступ

Сплайни мають численні застосування як в математичній теорії, так і в різноманітних галузях науки та техніки. Системи лінійних рівнянь, які потрібно розв'язувати для побудови сплайнів, дуже добре обумовлені, що дозволяє отримувати коефіцієнти сплайнів з високою точністю.

На практиці, взагалі кажучи, використовують поліноміальні сплайни невисоких степенів, але іноді треба використовувати сплайни більш високого степеня, наприклад п'ятого. Але використання сплайнів 5-го степеня на практиці не досліджувалося через з відсутність явних формул для базисних поліномів 5-го степеня інтерполяції таких сплайнів на трикутній сітці вузлів. У роботі [1] запропоновані явні формули для сплайнів п'ятого степеня на довільній сітці трикутників.

Основною метою даної статті є розробка та дослідження схеми методу скінченних елементів (МСЕ) для розв'язання задач про згин жорстко защемленої пластини з використанням сплайнів п'ятого степеня. Проведено аналіз результату обчислювального експерименту і порівняння з відомими результатами.

Аналіз останніх публікацій

В роботах [1],[2] для полінома 5-го степеня

$$P_5(x,y)=\sum_{0\le|\beta|\le 5} a_\beta x^\beta y^\beta,\ |\beta|=\beta_1+\beta_2,\ \beta=(\beta_1,\beta_2)$$

доведено, що вимоги

$$D^\alpha f(A_1)=D^\alpha P_5(A_1),\ i=\overline{1,3},\ 0\le|\alpha|\le 2,\ D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}},\ |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2,$$

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2),\ \left.\frac{\partial f}{\partial \upsilon_{ij}}\right|_{M_{ij}}=\left.\frac{\partial P_5}{\partial \upsilon_{ij}}\right|_{M_{ij}},(i,j)\in\{(1,2),(2,3),(3,1)\},$$

де υ_{ij} – нормаль до сторони, що з'єднує вершини A_i та A_j, точка $M_{ij}=\left(\frac{x_i+x_j}{2},\frac{y_i+y_j}{2}\right)=(x_{ij},y_{ij})$ – середина цієї сторони, є достатніми умовами для знаходження вказаних 21 коефіцієнта $\alpha_\beta,\ 0\le|\beta|\le 5$.

Похідна по внутрішній нормалі υ_{ij} визначається формулою

$$\frac{\partial f}{\partial \upsilon_{ij}}=\frac{sign(\Delta_{kij})}{|A_i,A_j|}[(y_i-y_j)\frac{\partial f}{\partial x}-(x_i-x_j)\frac{\partial f}{\partial y}],$$

$$\left|A_i, A_j\right| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}\,,\ \Delta_{kij} = \begin{vmatrix} x_k & y_k & 1 \\ x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \end{vmatrix}.$$

В роботі [1] доведено:

Теорема 1 [1]. Функції

$$h_{k\beta}(x,y) = \frac{(x-x_k)^{\beta_1}(y-y_k)^{\beta_2}}{\beta_1!\beta_2!}\,\omega_{ij}^3(x,y)\left\{\frac{1}{\omega_{ij}^3(x,y)}\right\}_{(x_k,y_k)}^{(2-|\beta|)},$$

$$\text{де } \omega_{ij}(x,y) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\{g(x,y)\}_{(x_k,y_k)}^{(m)} = \sum_{0\le|\gamma|\le m}(D^\gamma g)(x_k,y_k)\frac{(x-x_k)^{\gamma_1}(y-y_k)^{\gamma_2}}{\gamma_1!\gamma_2!},\ i,j,k\in\{1,2,3\},\ i\ne j\ne k,$$

мають такі властивості

$$D^\alpha h_{k\beta}\Big|_{A_l} = \delta_{k,l}\delta_{\alpha,\beta}\,;\ l,k\in\{1,2,3\}\,,\qquad \delta_{\alpha,\beta} = \delta_{\alpha_1,\beta_1}\delta_{\alpha_2,\beta_2}\,,$$

де $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Теорема 2 [1]. Функції

$$H_{ij}(x,y) = \frac{\omega_{ik}^2(x,y)\omega_{jk}^2(x,y)\omega_{ij}(x,y)sign(\Delta_{kij})}{\omega_{ik}^2(x_{ij},y_{ij})\omega_{jk}^2(x_{ij},y_{ij})\left|A_iA_j\right|},$$

мають властивості

$$D^\alpha H_{ij}\Big|_{A_k} = 0\,,\ 0\le|\alpha|\le 2\,,\ k\in\{1,2,3\}\,,\ k\ne i,j\,.$$

$$\frac{\partial H_{ij}}{\partial\upsilon_{ij}} = 1\,,\ \frac{\partial H_{ij}}{\partial\upsilon_{ij}}\bigg|_{M_{mn}} = 0\,,\ (i,j)\ne(m,n)\,;\ (i,j),(m,n)\in Q,$$

$$\omega_{ik}(x_i,y_i) = 0\,,\ \omega_{ik}(x_k,y_k) = 0.$$

$$\omega_{ik}(x,y) = \begin{vmatrix} x-x_k & y-y_k & 0 \\ x_i-x_k & y_i-y_k & 0 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix}.$$

Теорема 3 [1]. Для кожної функції $f(x,y)\in C^2(\overline{T_{ijk}})$ оператор

$$S_5 f(x,y) = w(x,y) + \sum_{(i,j)\in Q}\left[\frac{\partial f}{\partial\upsilon_{ij}} - \frac{\partial w}{\partial\upsilon_{ij}}\right]\Bigg|_{M_{ij}} H_{ij}(x,y)$$

$$w(x,y) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{0\le|\beta|\le 2} D^\beta f(A_i)h_{i\beta}(x,y)$$

$$D^\alpha S_\partial f\Big|_{A_p} = D^\alpha f\Big|_{A_p},\ p\in\{1,2,3\},\ 0\le|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2\le 2$$

визначає поліном 5-го степеня з властивостями

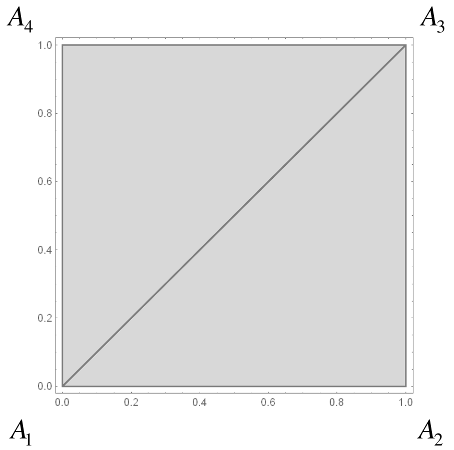


Рис. 1. Розбиття області [0,1]×[0,1] на два трикутника

$$\frac{\partial^{\beta} S_5 f}{\partial x^{\beta_1}\partial y^{\beta_2}}(A_{ij})=\frac{\partial^{\beta} f}{\partial x^{\beta_1}\partial y^{\beta_2}}(A_{ij}).$$

Приклад для тестування властивостей полінома п'ятого степеня

Приклад 1. Нехай функція є поліномом 5-го степеня

$$f(x,y)=(xy(1-x)(1-y))(x-y).$$

Розбиваємо квадрат [0, 1]×[0, 1] на два трикутники діагоналлю $y=x$, як це показано на рис. 1.

Перший трикутник має вершини з координатами (0,0), (1,0), (1,1). Другий - вершини з координатами (0,0), (1,1), (0,1). Відповідні допоміжні функції мають такий вигляд:

У першому трикутнику:

Точка $A_1(0,0)$

$$h_{00}^{123}(x,y)=(1-x)^3\,(1+3x+6x^2)\,,\; h_{01}^{123}(x,y)=(1-x)^3\,(1+3x)\,y\,,\; h_{10}^{123}(x,y)=(1-x)^3\,x\,(1+3x)\,,$$

$$h_{02}^{123}(x,y)=1/2\,(1-x)^3\,y^2\,,\; h_{20}^{123}(x,y)=1/2\,(1-x)^3\,x^2\,,\; h_{11}^{123}(x,y)=(1-x)^3\,x\,y\,.$$

Точка A_2 (1,0)

$$h_{00}^{123}(x,y)=(x-y)^3\,(10+6x^2+15y+6y^2-3x(5+4y)),\; h_{01}^{123}(x,y)=(x-y)^3\,y\,(4-3x+3y),$$

$$h_{10}^{123}(x,y)=(-1+x)(x-y)^3\,(4-3x+3y)\,,\; h_{02}^{123}(x,y)=1/2\,(x-y)^3\,y^2\,,\; h_{20}^{123}(x,y)=1/2\,(-1+x)^2\,(x-y)^3,$$

$$h_{11}^{123}(x,y)=(-1+x)(x-y)^3\,y.$$

Точка $A_3(1,1)$

$$h_{00}^{123}(x,y)=y^3\,(10-15y+6y^2)\,,\; h_{01}^{123}(x,y)=(4-3y)(-1+y)\,y^3,\; h_{10}^{123}(x,y)=(-1+x)(4-3y)\,y^3\,,$$

$$h_{02}^{123}(x,y)=1/2\,(-1+y)^2\,y^3,\; h_{20}^{123}(x,y)=1/2\,(-1+x)^2\,y^3\,,\; h_{11}^{123}(x,y)=(-1+x)(-1+y)\,y^3,$$

$$H_{23}^{123}=16\,(1-x)(x-y)^2y^2,\; H_{31}^{123}=8\sqrt{2}\,(-1+x)^2\,(x-y)\,y^2,\; H_{12}^{123}=16\,(1-x)^2\,y\,(-x+y)^2.$$

Поліном для першого трикутника:

$$S1_5 f(x,y)=(-1+x)\,xy\,(x-y)(-1+y).$$

У другому трикутнику

Точка $A_1(0,0)$

$$h_{00}^{134}(x,y)=(1-y)^3(1+3y+6y^2)\,,\; h_{01}^{134}(x,y)=(1-y)^3\,y\,(1+3y)\,,\; h_{10}^{134}(x,y)=x\,(1-y)^3\,(1+3y)\,,$$

$$h_{02}^{134}(x,y)=1/2\,(1-y)^3\,y^2\,,\; h_{20}^{134}(x,y)=1/2\,x^2\,(1-y)^3,\; h_{11}^{134}(x,y)=x\,(1-y)^3\,y.$$

Точка A_3 (1,1)

$$h_{00}^{134}(x,y)=x^3(10-15x+6x^2)\,,\; h_{01}^{134}(x,y)=(4-3x)\,x^3\,(-1+y)\,,\; h_{10}^{134}(x,y)=(4-3x)(-1+x)\,x^3,$$

$$h_{02}^{134}(x,y)=1/2\,x^3\,(-1+y)^2,\; h_{20}^{134}(x,y)=1/2\,(-1+x)^2\,x^3,\; h_{11}^{134}(x,y)=(-1+x)\,x^3\,(-1+y).$$

Точка A_4 (0,1)

$$h_{00}^{134}(x,y)=(-x+y)^3\,(10+6x^2-15y+6y^2-3x(-5+4y)),\; h_{01}^{134}(x,y)=(4+3x-3y)(-1+y)(-x+y)^3,$$

$$h_{10}^{134}(x,y)=x\,(4+3x-3y)(-x+y)^3,\; h_{02}^{134}(x,y)=1/2\,(-1+y)^2\,(-x+y)^3,\; h_{20}^{134}(x,y)=1/2\,x^2\,(-x+y)^3,$$

$$h_{11}^{134}(x,y)=x\,(-1+y)(-x+y)^3,$$

$$H_{34}^{134}=16\,x^2\,(1-y)(x-y)^2,\; H_{41}^{134}=16\,x\,(-1+y)^2\,(-x+y)^2,\; H_{13}^{134}=8\sqrt{2}\,x^2\,(1-y)^2\,(-x+y).$$

 ISSN 0131–2928. Пробл. машиностроения, 2017, Т. 20, № 1

Поліном для другого трикутника

$$S2_5 f(x, y) = (\text{-}1 + \text{x})\, \text{xy}\, (\text{x - y})\, (\text{-}1 + \text{y}).$$

Поліноми $S1_5 f(x, y)$ та $S2_5 f(x, y)$ співпадають з функцією $f(x, y)$.

Формулювання бігармонічної задачі

Знайти розв'язок бігармонічного рівняння

$$D\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4}\right) = q\,,\ (x, y) \in G,$$

$$(x, y) \in G = \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \times \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right],$$

яке повинно задовольняти граничні умови (умови жорсткого защемлення)

$$W\big|_{\partial G} = 0\,,\ \left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{\partial G} = 0,\ \left.\frac{\partial W}{\partial y}\right|_{\partial G} = 0.$$

Схематичний вигляд області G наведено на рис. 2.

Точний розв'язок задачі про згин жорстко защемленої пластини з рівномірним навантаженням було наведено у Тимошенка, Войновського-Кригера [3], с. 224–229 у вигляді

$$W(x, y) = W_f(x, y) + W_x(x, y) + W_y(x, y)\,,$$

де $W_f(x,y)$ – прогин вільно опертої пластини, $W_x(x, y)$ – прогин пластини, що навантажена моментами $x = \pm\frac{a}{2}$, $W_y(x, y)$ – прогин пластини, що навантажена моментами $y = \pm\frac{b}{2}$.

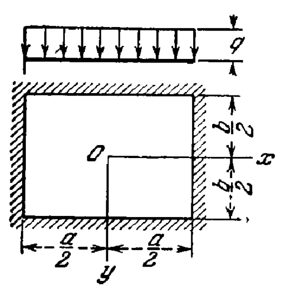


Рис. 2. Рівномірно розподілене навантаження q(x,y) = q = const

$$W_f(x, y) = \frac{4qa}{\pi^5 D} + \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \cos\frac{m\pi x}{a} \times \left(1 - \frac{a_m \tanh a_m + 2}{2\cosh a_m} ch\frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{2\cosh a_m}\frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a}\right),$$

де $a_m = \frac{m\pi b}{2a}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)}$ – формула для зігнутої кривої (жорсткість пластини при вигині); E – модуль пружності матеріалу; υ – коефіцієнт Пуассона; h – товщина пластини; a, b – довжини пластини; q – навантаження, розподілене на поверхні пластини.

У випадку квадратної пластини розподілення згинаючих моментів в ній буде однаковим на всьому контурі, тому для обчислення сталих e_i, якими визначаються моменти, прикладені по краях защемлення, використовується така система рівнянь:

$$\frac{e_i}{i}\left(\tan\alpha_i + \frac{\alpha_i}{\cosh^2\alpha_i}\right) + \frac{8i}{\pi}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{e_m}{m^3}\frac{1}{\left(1+\frac{i^2}{m^2}\right)^2} = \frac{4q\alpha^2}{\pi^3}\frac{1}{i^4}\left(\frac{\alpha_i}{\cosh^2\alpha_i} - \tanh\alpha_i\right),\ i = 1,3,5,\ldots.$$

Для обчислювального експерименту оберемо область вигляду $[\text{-}0{,}5\,; 0{,}5] \times [\text{-}0{,}5\,; 0{,}5]$ та $q(x, y) = 1$.

На рис. 3 наведений графік розв'язку бігармонічної задачі для жорстко защемленої пластини [3].

Теорема 4. Явний вираз для структури наближеного розв'язку бігармонічної задачі у випадку, якщо $a = b$ має вигляд

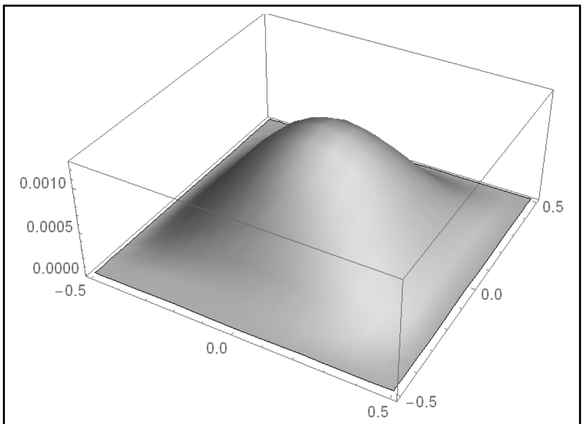


Рис. 3. Графік точного розв’язку бігармонічної задачі для жорстко защемленої платини на квадраті $[-0{,}5;0{,}5]\times[-0{,}5;0{,}5]$

$$S_5 f(x,y) = w(x,y) + \sum_{(i,j)\in Q}\left[c_{ij} - \frac{\partial w}{\partial \upsilon_{ij}}\right]\Bigg|_{M_{ij}} H_{ij}(x,y),$$

$$w(x,y) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{0\le|\beta|\le 2} D^{\beta} c_{i\beta} h_{i\beta}(x,y),$$

де $c_{i,j}$ – константи, які знаходяться з мінімуму відповідного функціонала.

Тобто цей наближений розв’язок в кожному із трикутників розбиття $\mathrm{T}_{p,q,r}\in G$ задовольняє умови

$$\left.\frac{\partial^{p+q} S_5 f(x,y)}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}}\right|_{\substack{x=x_k,\\ y=y_k}} = \frac{\partial^{p+q} f(x,y)}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}};$$

$$\left.\frac{\partial S_5 f(x,y)}{\partial \nu_{mn}}\right|_{M_{mn}} = \left.\frac{\partial f}{\partial \nu_{mn}}\right|_{M_{mn}}.$$

Доведення. Треба довести, що $S_5 f(x,y)$ є поліномом 5-го степеня, який має такі інтерполяційні властивості:

$$\left.\frac{\partial^{p+q} S_5 f(x,y)}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}}\right|_{\substack{x=x_k,\\ y=y_k}} = \frac{\partial^{p+q} f(x,y)}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}},\ 0\le \alpha+\beta \le 2,$$

де $x_k, y_k = \{(x_p, y_p),(x_q, y_q),(x_r, y_r)\}$ – координати вершини трикутника; $\mathrm{T}_{p,q,r}\in G$; $f(x,y)$ – точний розв’язок бігармонічного рівняння. Для цього скористаємося такими властивостями базисних поліномів 5-го степеня:

$$\left.\frac{\partial^{\alpha+\gamma} h_{p,\beta}(x,y)}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\gamma}}\right|_{(x_{\mu},y_{\mu})} = \delta_{p,\mu}\cdot\delta_{\alpha,\beta_1}\cdot\delta_{\gamma,\beta_2}, \mu\in\{p,q,r\}, 0\le\alpha+\beta_1, \gamma+\beta_2\le 2,$$

а також властивостями

$$\left.\frac{\partial^{\alpha+\beta} H_{ij}(x,y)}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}}\right|_{(x,y)=(x_k,y_k)} = 0,\ k\in\{p,q,r\}.$$

В результаті отримаємо

$$\frac{\partial^{\alpha+\gamma} S_5 f(x,y)}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\gamma}} = \left.\frac{\partial^{\alpha+\gamma}\sum\limits_{k=\{p,q,r\}} f_k^{\beta}\cdot h_{k,\beta}(x,y)}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\gamma}}\right|_{(x,y)=(x_{\mu},y_{\mu})} + \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta}}\sum_{i,j\in Q}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial \nu_{ij}}\right|_{M_{ij}} - \left.\frac{\partial w}{\partial \nu_{ij}}\right|_{M_{ij}}\right) H_{ij}(x,y) = f_{\mu}^{(\alpha,\gamma)} = 0,$$

$$\mu\in\{p,q,r\}, 0\le\alpha+\gamma, \beta_1+\beta_2\le 2.$$

Таким чином, перша частина теореми доведена. Для доведення другої частини цієї теореми напишемо ланцюжок рівнянь

$$\left.\frac{\partial S_5 f(x,y)}{\partial \nu_{mn}}\right|_{M_{mn}} = \left.\frac{\partial w}{\partial \nu_{mn}}\right|_{M_{mn}} + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial \nu_{pq}}\right|_{M_{pq}} - \left.\frac{\partial w}{\partial \nu_{pq}}\right|_{M_{pq}}\right)\cdot\left.\frac{\partial H_{pq}(x,y)}{\partial \nu_{mn}}\right|_{M_{mn}} +$$

$$+\left(\left.\frac{\partial f}{\partial \nu_{qr}}\right|_{M_{qr}}-\left.\frac{\partial w}{\partial \nu_{qr}}\right|_{M_{qr}}\right)\cdot\left.\frac{\partial H_{qr}(x,y)}{\partial \nu_{mn}}\right|_{M_{mn}}+\left(\left.\frac{\partial f}{\partial \nu_{rp}}\right|_{M_{rp}}-\left.\frac{\partial w}{\partial \nu_{rp}}\right|_{M_{rp}}\right)\cdot\left.\frac{\partial H_{rp}(x,y)}{\partial \nu_{mn}}\right|_{M_{mn}}=$$

$$=\left.\frac{\partial w}{\partial \nu_{mn}}\right|_{M_{mn}}+\left(\left.\frac{\partial f}{\partial \nu_{pq}}\right|_{M_{pq}}-\left.\frac{\partial w}{\partial \nu_{pq}}\right|_{M_{pq}}\right)\cdot\delta_{m,p}\cdot\delta_{n,q}+\left(\left.\frac{\partial f}{\partial \nu_{qr}}\right|_{M_{qr}}-\left.\frac{\partial w}{\partial \nu_{qr}}\right|_{M_{qr}}\right)\cdot\delta_{m,q}\times$$

$$\times\delta_{n,r}+\left(\left.\frac{\partial f}{\partial \nu_{rp}}\right|_{M_{rp}}-\left.\frac{\partial w}{\partial \nu_{rp}}\right|_{M_{rp}}\right)\cdot\delta_{m,r}\cdot\delta_{n,p}=\left.\frac{\partial w}{\partial \nu_{mn}}\right|_{M_{mn}}+\left.\frac{\partial f}{\partial \nu_{mn}}\right|_{M_{mn}}-\left.\frac{\partial w}{\partial \nu_{mn}}\right|_{M_{mn}}=\left.\frac{\partial f}{\partial \nu_{mn}}\right|_{M_{mn}}.$$

Таким чином, друге твердження теореми доведено. Теорема доведена.

Зауваження. Якщо в теоремі 4 $f(x,y)$ – точний розв'язок бігармонічної задачі, то відповідні значення констант, які входять до $S_5 f(x,y)$, треба покласти такими, що дорівнюють відповідним значенням точного розв'язку, тобто

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial \nu}=0 \text{ та } \frac{\partial^{\beta} f(x,y)}{\partial x^{\beta_1}\partial y^{\beta_2}}=0$$

на границі області G для того, щоб задовольнити граничні умови.

Алгоритм побудови сплайнів 5-го степеня для розв'язання бігармонічної задачі для жорстко защемленої пластини

Наведемо алгоритм побудови сплайнів 5-го степеня для розв'язання бігармонічної задачі жорстко защемленої пластини на області

$$G=\{(x,y): -\frac{a}{2}\le x\le \frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\le y\le \frac{b}{2}\}.$$

1. Розбиваємо область G на прямокутні елементи

$\Pi_{i,j}=\{(x,y): x_{i-1}\le x\le x_i, y_{j-1}\le y\le y_j, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}\}$.

2. Кожен елемент $\Pi_{i,j}$ розбиваємо на два трикутники, які задаються набором з трьох точок вигляду

$$T_{ijk}=\{(x_i,y_i),(x_j,y_j),(x_k,y_k):(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\in\Pi_{i,j}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}\}.$$

В результаті такого розбиття задана область G буде розбита на $2\cdot m\cdot n$ трикутників.

3. Розставляємо вектор констант $c_p=(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6)$, який відповідає функціям базисних поліномів 5-го степеня $h_{0,0},h_{1,0},h_{0,1},h_{2,0},h_{1,1},h_{0,2}$ відповідно для кожної з вершин трикутників. Для чотирьох вершин трикутників, які знаходяться в вершинах області G, цей вектор матиме вигляд $(0,0,0,0,c_5,0)$, для вершин, які знаходяться на границях області G, паралельних осі Оx – $(0,0,0,0,c_5,c_6)$, а для вершин, які знаходяться на границях області G, паралельних осі Оy – $(0,0,0,c_4,c_5,0)$ через граничні умови. Для інших вершин цей вектор матиме загальний вигляд $(c_1,0,0,c_4,c_5,c_6)$.

4. Згідно з граничною умовою, якщо точка $M_{ij}\in\partial G$, то константу в цій точці покладемо такій, що дорівнює нулю.

5. Для кожного трикутника будуємо поліном

$$S^{ijk}{}_5(x,y)=w(x,y)+\sum_{i=1}^{3}\left.\left(c_i-\frac{\partial w}{\partial \upsilon}\right)\right|_{M_i}\cdot H_{i,\beta}(x,y), \tag{1}$$

де $w(x,y)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{0\le|\beta|\le 2} c_{i,\beta}\cdot h_{i,\beta}(x,y)$.

6. Використовуємо отримані сплайни для знаходження таких інтегралів:

$$I_k=\int_{T_{ijk}}\left(\left(\frac{\partial^2 S_k(x,y)}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 S_k(x,y)}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 S_k(x,y)}{\partial y^2}\right)^2-2f(x,y)S_k(x,y)\right)dxdy.$$

7. Запишемо функціонал $I=I(c)$ вигляду

$$I=\sum_{k=1}^{2mn} I_k .$$

8. Мінімізуємо отриманий функціонал I за змінними c . За допомогою необхідної умови екстремуму знаходимо оптимальні значення констант, розв'язавши систему рівнянь

$$\frac{\partial I}{\partial c_i}=0,\ i=\overline{1,52mn}.$$

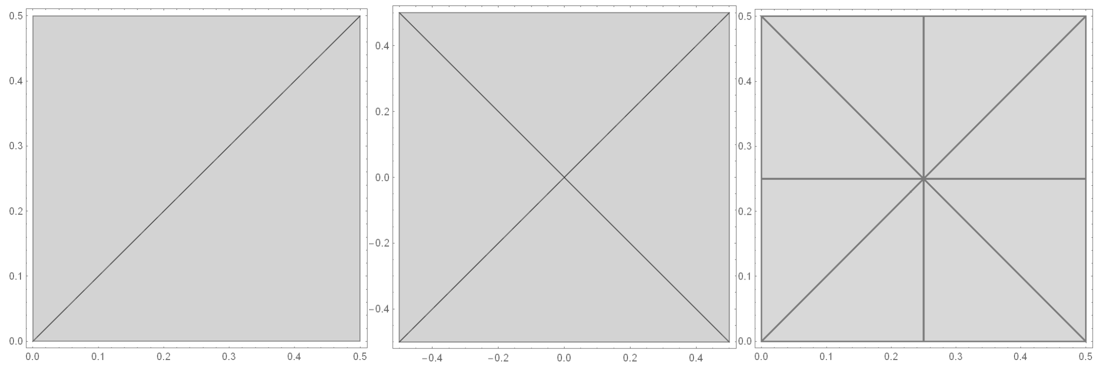
9. Підставляємо отримані значення у формулу (1) і отримуємо наближений розв'язок бігармонічного рівняння для жорстко защемленої пластини на заданій області G .

Приклади розв'язання крайової задачі про згин пластини

Розв'язуємо задачу про згин жорстко защемленої квадратної пластини. Результати всіх прикладів були отримані за допомогою системи комп'ютерної математики.

Приклад 1. Розбиття області на два трикутники.

Ділимо область $G=\{(x,y):-0{,}5\le x\le 0{,}5;-0{,}5\le y\le 0{,}5\}$ на два трикутники за схемою, наведеною на рис. 4.



а) б) в)

Рис. 4. Розбиття області на трикутники:
а) – два; б) – чотири; в) – вісім

Знаходимо поліном на кожному трикутнику.

Поліном 1

$$S_1(x,y)=(0{,}5-\mathrm{x})^3(0{,}5+\mathrm{x})(0{,}5+\mathrm{y})\mathrm{c}_1-16(0{,}5-\mathrm{x})^2(0{,}5+\mathrm{y})(-\mathrm{x}+\mathrm{y})^2(0{,}0625\mathrm{c}_1-0{,}0625\mathrm{c}_2)+$$
$$+(-0{,}5+\mathrm{x})(\mathrm{x}-\mathrm{y})^3(0{,}5+\mathrm{y})\mathrm{c}_2-16(0{,}5-\mathrm{x})(-0{,}5-\mathrm{y})^2(\mathrm{x}-\mathrm{y})^2(-0{,}0625\mathrm{c}_2+0{,}0625\mathrm{c}_3)+$$
$$+(-0{,}5+\mathrm{x})(-0{,}5+\mathrm{y})(0{,}5+\mathrm{y})^3\mathrm{c}_3+$$
$$+11{,}3137(-0{,}5+\mathrm{x})^2(\mathrm{x}-\mathrm{y})(0{,}5+\mathrm{y})^2(0{,}707107(0{,}1875\mathrm{c}_1+0{,}1875\mathrm{c}_3)+\mathrm{c}_5).$$

Поліном 2

$$S_2(x,y)=(0{,}5+\mathrm{x})(0{,}5-\mathrm{y})^3(0{,}5+\mathrm{y})\mathrm{c}_1+(-0{,}5+\mathrm{x})(0{,}5+\mathrm{x})^3(-0{,}5+\mathrm{y})\mathrm{c}_3-$$
$$-16(0{,}5+\mathrm{x})(-0{,}5+\mathrm{y})^2(-\mathrm{x}+\mathrm{y})^2(0{,}0625\mathrm{c}_1-0{,}0625\mathrm{c}_4)-$$

$$-16(0{,}5+x)^2(0{,}5-y)(x-y)^2(0{,}0625c_3-0{,}0625c_4)+(0{,}5+x)(-0{,}5+y)(-x+y)^3c_4+$$
$$+11{,}3137(-0{,}5-x)^2(-x+y)(0{,}5-y)^2(0{,}707107(0{,}1875c_1+0{,}1875c_3)+c_5).$$

Перевірка показала, що при $y = x$ сплайн є неперервним разом із своїми нормальними похідними 1-го та 2-го порядку, для знаходження невідомих коефіцієнтів розв'язувалась така система рівнянь. Знаходимо $I = I_1 + I_2$, інтегруємо поліноми по трикутниках та сумуємо їх. В результаті отримуємо таке рівняння:

$$I(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)=0{,}381746c_1^2+0{,}0825397c_2^2-0{,}015873c_3+0{,}381746c_3^2-$$
$$-0{,}000793651c_4-0{,}0634921c_3c_4+0{,}0825397c_4^2+c_1(-0{,}015873-0{,}0634921c_2+$$
$$+0{,}525397c_3-0{,}0634921c_4+3{,}88578\cdot10^{-14}c_5)+c_2(-0{,}000793651-0{,}0634921c_3+$$
$$+0{,}143666c_5)+1{,}93179\cdot10^{-14}c_3c_5-0{,}143666c_4c_5+12{,}5968c_5^2.$$

Невідомі параметри знаходимо з умови мінімуму функціонала $\dfrac{\partial I}{\partial c_i}=0$.

$c_1 = 0{,}013837$, $c_2 = 0{,}015452$, $c_3 = 0{,}013837$, $c_4 = 0{,}015452$, $c_5 = -5{,}96838\times10^{-17}$.

Підставляємо отримані константи в поліноми. В результаті отримаємо

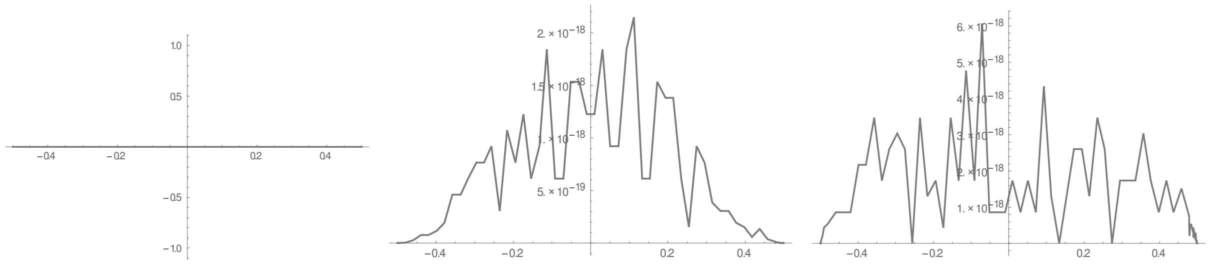
Поліном 1

$$S_1(x,y)=0{,}00161439(0{,}5-x)(-0{,}5-y)^2(x-y)^2+0{,}0138376(0{,}5-x)^3(0{,}5+x)(0{,}5+y)+$$
$$+0{,}015452(-0{,}5+x)(x-y)^3(0{,}5+y)++0{,}0415129(-0{,}5+x)^2(x-y)(0{,}5+y)^2+$$
$$+0{,}0138376(-0{,}5+x)(-0{,}5+y)(0{,}5+y)^3+0{,}00161439(0{,}5-x)^2(0{,}5+y)(-x+y)^2.$$

Поліном 2

$$S_2(x,y)=0{,}00161439(0{,}5+x)^2(0{,}5-y)(x-y)^2+0{,}0138376(-0{,}5+x)(0{,}5+x)^3(-0{,}5+y)+$$
$$+0{,}0138376(0{,}5+x)(0{,}5-y)^3(0{,}5+y)+0{,}0415129(-0{,}5-x)^2(0{,}5-y)^2(-x+y)+$$
$$+0{,}00161439(0{,}5+x)(-0{,}5+y)^2(-x+y)^2+0{,}015452(0{,}5+x)(-0{,}5+y)(-x+y)^3.$$

Перевіримо, чи наближений розв'язок буде неперервний на границі між трикутниками. Знайдені поліноми 5-го степеня в кожному із трикутників співпадають при $y = x$, а також співпадають перша і друга похідна по нормалі при $y - x = 0$. Графіки різниць наведені на рис. 5.



а) б) в)

Рис. 5. Графіки різниць:

а) – $\left.(S_1-S_2)\right|_{y=x}$; б) – $\left.\left(\dfrac{\partial S_1}{\partial \nu}-\dfrac{\partial S_2}{\partial \nu}\right)\right|_{y=x}$; в) – $\left.\left(\dfrac{\partial^2 S_1}{\partial \nu^2}-\dfrac{\partial^2 S_2}{\partial \nu^2}\right)\right|_{y=x}$

Різниця між ними мала порядок $O(10^{-19})$ для різниці функцій, $O(10^{-18})$ для різниці перших похідних по нормалі та $O(10^{-17})$ для других похідних по нормалі, що доводить, що теоретичне твердження про сплайн виконується для побудованого наближеного розв'язку.

Максимальне значення точного розв'язку досягається в точці (0,0) та дорівнює 0,00126, значення наближеного розв'язку задачі в цій точці становить 0,000864852. Різниця між точним розв'язком та наближеним розв'язком-сплайном становить 0,000395148.

Перевірка властивостей

Різниця отриманих констант з точним розв'язком у вершинах наведена в табл. 1.

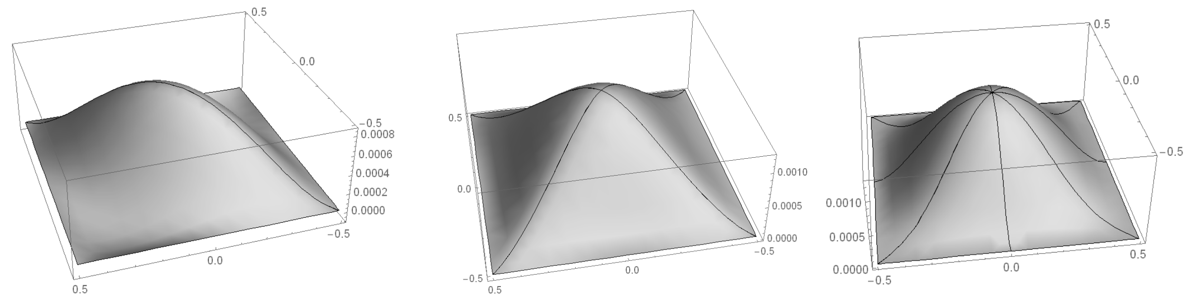
Таблиця 1. Різниця отриманих констант з точним розв'язком у вершинах

(x, y)	$S(x, y)$	$\frac{\partial S(x,y)}{\partial x}$	$\frac{\partial S(x,y)}{\partial y}$	$\frac{\partial^2 S(x,y)}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 S(x,y)}{\partial x \partial y}$	$\frac{\partial^2 S(x,y)}{\partial y^2}$
(-0,5, -0,5)	$8{,}697\times10^{-35}$	$4{,}944\times10^{-18}$	$4{,}779\times10^{-19}$	$3{,}335\times10^{-19}$	0,0140895	$3{,}335\times10^{-19}$
(0,5, -0,5)	$8{,}697\times10^{-35}$	$4{,}944\times10^{-18}$	$4{,}779\times10^{-19}$	$3{,}335\times10^{-19}$	0,0152001	$3{,}335\times10^{-19}$
(0,5, 0,5)	$8{,}697\times10^{-35}$	$4{,}944\times10^{-18}$	$4{,}779\times10^{-19}$	$3{,}335\times10^{-19}$	0,0140895	$3{,}335\times10^{-19}$
(-0,5, -0,5)	$8{,}697\times10^{-35}$	$4{,}944\times10^{-18}$	$4{,}779\times10^{-19}$	$3{,}335\times10^{-19}$	0,0152001	$3{,}335\times10^{-19}$

Нижче наведено дані про різницю отриманих констант з точним розв'язком на нормалях

Нормаль	Значення різниці
(0, -0,5)	$6{,}3758\times10^{-7}$
(0,5, 0)	$2{,}14469\times10^{-6}$
(0, 0)	$5{,}88018\times10^{-17}$
(0, 0,5)	$6{,}3758\times10^{-7}$
(-0,5, 0)	$2{,}14469\times10^{-6}$

Графік наближеного розв'язку наведений на рис. 6.



а) б) в)

Рис. 6. Графік наближеного розв'язку для розбиття на трикутники:
а) – два; б) – чотири; в) – вісім

Приклад 2. Розбиття області на чотири трикутники.

Область $G = \{(x, y): -0{,}5 \le x \le 0{,}5; -0{,}5 \le y \le 0{,}5\}$ розбиваємо на чотири трикутники, як показано на рис. 4. Після проведення аналогічної процедури, як у прикладі 1, отримаємо значення наближеного розв'язку $P_1(0{,}0) = P_2(0{,}0) = P_3(0{,}0) = P_4(0{,}0) = 0{,}0012397$. Різниця між точним розв'язком та наближеним розв'язком-сплайном становить 0,0000203. Перевірка показала, що отриманий сплайн належить класу $C^2(G)$. Графік усіх поліномів наведений на рис. 6.

Приклад 3. Розбиття області на вісім трикутників.

Далі наведемо результати обчислювального експерименту зі знаходження наближеного розв'язку у вигляді сплайна 5-го степеня для випадку розбиття поданого на рис. 4, явні вирази для поліномів 5-го степеня в кожному з восьми трикутників розбиття опускаємо. Перевірка показала що отриманий сплайн належить класу $C^2(G)$ і найбільше його значення досягається в точці

$P_i(0,0)=0{,}00126815,\ i=\overline{1,8}$, тобто різниця між точним та наближеним розв'язком в цьому випадку дорівнює 0,00000815. Графік наближеного розв'язку у вигляді сплайна поданий на рис. 6.

В табл. 2 наведено значення прогину пластини в центрі області та максимальні похибки для проведених експериментів.

Таблиця 2. Результати проведення обчислювального експерименту

Кількість елементів	Кількість невідомих коефіцієнтів	Значення в центрі точного розв'язку	Значення в центрі наближеного розв'язку	Максимальна похибка $\max\limits_{(x,y)\in G} \lvert W(x,y)-S(x,y)\rvert$
2	5	0,00126	0,000864852	0,000395148
4	12		0,0012397	0,0000203
8	20		0,00126815	0,00000815

Теорема 5. Якщо знаходити залишок похибки від δ (δ – максимальна довжина трикутника) у вигляді $\varepsilon(\delta)=a\delta^b$, то на основі даних обчислювальних експериментів отримаємо

$$a=0{,}0000402782\ ,\ b=5{,}6\ .$$

Далі наведені чисельні коефіцієнти для центру прогину для защемленої квадратної пластини з рівномірним навантаженням [4].

Методи	Чисельний фактор $\alpha=\dfrac{W(0,0)}{qb^4/D}$
В даній роботі	0,00126815
Imrak,Gerdemeli,2006	0,00126401
Timoshenko&Woinowsky–Krieger, 1959	0,00126
Young, 1940	0,00126
Evans, 1939	0,00126
Wojtaszak, 1937	0,0012637

Висновки

В роботі запропоновано схему розв'язання бігармонічної задачі для прямокутної пластини у випадку граничних умов, які відповідають умовам жорсткого защемлення пластини у вигляді сплайна 5-го степеня, який забезпечує належність наближеного розв'язку класу $C^2(G)$.

Хоч сплайни п'ятого степеня дають більш точну оцінку, вони рідше застосовуються через складність обчислення. Ці поліноми не застосовувалися раніше для бігармонічного рівняння. У статті було розглянуло застосування формул для побудови полінома п'ятого степеня, взятих з роботи [1] для бігармонічної задачі.

Був проведений експеримент, який порівнює точний розв'язок з поліномами, отриманими за допомогою формул [1] на квадратній області. Як точний розв'язок була взята формула (а) з роботи [3] на області $a=b=1$. Область була розбита на два, чотири та вісім трикутників. Експеримент показав, що чим більше робити розбиття області на трикутники, тим менша похибка наближення.

Література

1. *Явные* формулы для интерполяционных сплайнов 5-й степени на треугольнике / И. В Сергиенко, О. Н. Литвин, О. О. Литвин, О. И. Денисова // Кибернетика и систем. анализ. – 2014. – Т. 50, № 5. – С. 17–33
2. *Matematical* aspect of the finite element method / M. Zlamal, A. Zenesek, V. Kolar, J. Kratochvil // Tech. Phys. and Math. Principles Finite Element Method. – 1971. – Vol. 1. – P.15–39
3. *Тимошенко, С. П.* Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.:Наука, 1966. – 635 с.
4. *Imrak, C. E.* The problem of isotropic rectangular plate with four clamped edges / C. E. Imrak, I. Gerdemeli // Indian Academy Sci. SADHANA. – 2007. – Vol. 32. – P. 181–186

Поступила в редакцию 19.09.16