

Ш. Г. Гасанов, д-р техн. наук

Азербайджанский технический университет, г. Баку,  
e-mail: hssh3883@gmail.com

**Ключові слова:** *ізотропна площина в неоднорідному полі напружень, щілина змінної ширини, контактні зони, контактні напруження*

УДК 539.375

## РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ЩЕЛЬЮ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ, В НЕОДНОРОДНОМ НАПРЯЖЕННОМ ПОЛЕ

*Математично описано часткове закриття щілини змінної ширини в неоднорідному напруженому полі. Досліджується виникнення декількох ділянок контакту берегів щілини. Вважається, що на площадці контакту частково виникає зчеплення берегів, частково – їх проковзування. Задача про рівновагу щілини зводиться до задачі лінійного спряження аналітичних функцій. Знайдені контактні напруження та границі контакту.*

### Введение

Рассмотрим равновесие упругой изотропной плоскости, ослабленной прямолинейной щелью переменной ширины, сравнимой с упругими деформациями. Щель подвергнута частичному залечиванию, т. е. поверхности щели локально вошли в контакт. Это привело к возникновению контактных напряжений на участке контакта берегов щели. В последние годы опубликован ряд работ [1–33], посвященных исследованию сред с трещинами с учетом их частичного контакта.

Известно, что получить решение задачи механики разрушения с учетом частичного контакта берегов трещины (щели) значительно сложнее. Это связано с увеличением числа неизвестных параметров задачи (контактные напряжения, границы контакта и т. п.). С другой стороны, эти проблемы представляют важный интерес при исследовании композитных материалов, горных пород, автомобильных дорог и т. д. Проблема частичного контактирования берегов щели переменной ширины к настоящему времени мало изучена. Учет переменной ширины щели при контакте ее берегов практически не исследован. В настоящей работе дается общая постановка задачи, в которой учитываются переменной ширины щели, трение и сцепление ее берегов при действии неоднородного напряженного поля.

### Постановка задачи

Пусть в изотропной упругой среде имеется щель переменной ширины  $h(x)$ , сравнимой с упругими деформациями. Среда занимает плоскость  $xOy$ , ось абсцисс которой направлена вдоль линии щели. На бесконечности действуют напряжения, являющиеся полиномиальными функциями декартовых координат  $x$  и  $y$ .

В исследуемом случае в нагружаемой упругой плоскости возникают зоны сжимающих напряжений, в которых берега щели входят в контакт, что приводит к появлению контактных напряжений. Принимаем, что в процессе деформирования берега щели вступают в контакт на участках  $(\alpha_k, \beta_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Считается, что каждая площадка контакта состоит из участка сцепления берегов  $(c_k, d_k)$  и двух участков проскальзывания  $(\alpha_k, c_k)$ ,  $(d_k, \beta_k)$ .

Обозначим:  $L_1$  – совокупность участков сцепления;  $L_2$  – совокупность участков проскальзывания;  $L_3$  – совокупность участков, свободных от нагрузки (рис. 1).

В процессе деформирования упругой плоскости, где берега щели вошли в контакт, возникают нормальные  $p_y(x)$  и касательные напряжения  $p_{xy}(x)$ . Значения этих напряжений заранее неизвестны и подлежат определению.

Граничные условия на берегах щели для рассматриваемой задачи имеют вид

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = p_y - ip_{xy} \text{ на } L_1,$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = p_y - if(x)p_y \text{ на } L_2, \quad (1)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = 0 \text{ на } L_3,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(v^+ - v^-) = -h'(x) \text{ на } L_1 + L_2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^+ - u^-) = 0 \text{ на } L_3.$$

Здесь принято, что на участках проскальзывания имеют место силы сухого трения (закон трения принят в форме Кулона);  $f(x)$  – коэффициент трения;  $(v^+ - v^-)$  – нормальная,  $(u^+ - u^-)$  – касательная составляющие раскрытия берегов щели;  $i = \sqrt{-1}$ .

Границы зон контакта также заранее неизвестны и подлежат определению.

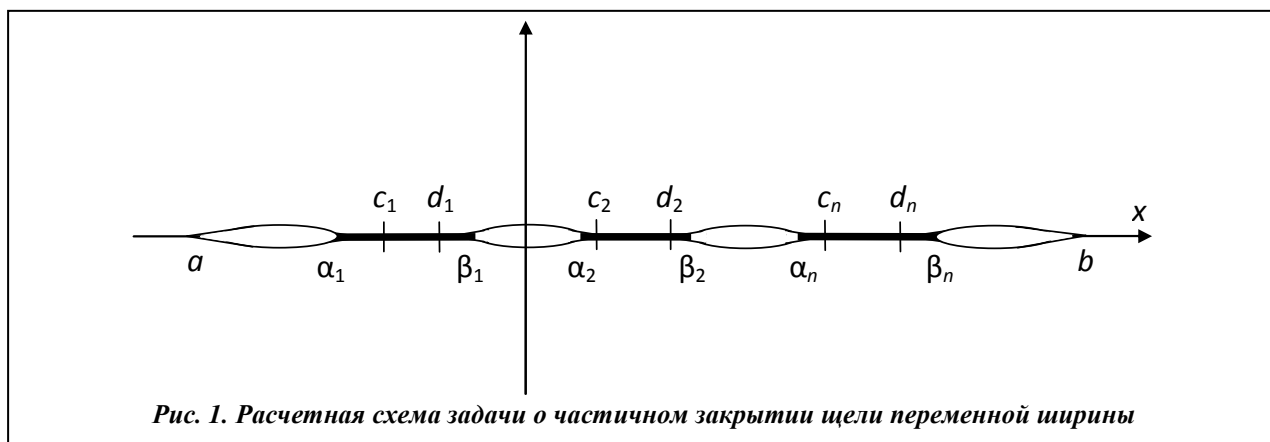


Рис. 1. Расчетная схема задачи о частичном закрытии щели переменной ширины

### Метод решения задачи

Напряженное состояние в плоскости с щелью представим в виде суммы двух напряженных состояний с помощью принципа суперпозиции

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^1, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^1, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}^1.$$

Здесь  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$  – компоненты тензора напряжений в сплошной плоскости, когда на бесконечности действуют напряжения, являющиеся полиномиальными функциями декартовых координат  $x$  и  $y$ ;  $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1$  – компоненты тензора напряжений для среды с щелью с исчезающими на бесконечности напряжениями.

Для напряжений  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$  имеем

$$\begin{aligned} \sigma_x^0 + \sigma_y^0 &= 4 \operatorname{Re} \Phi_0(z), \quad z = x + iy, \\ \sigma_y^0 - \sigma_x^0 + 2i\tau_{xy}^0 &= \Phi_0(z) + \Omega_0(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_0'(z)}, \\ \Phi_0(z) &= A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \dots + A_m, \\ \Omega_0(z) &= B_0 z^m + B_1 z^{m-1} + B_2 z^{m-2} + \dots + B_m. \end{aligned} \quad (3)$$

Функции (3) в зависимости от значений коэффициентов  $A_j$  и  $B_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) определяют напряженное состояние в плоскости без щели.

С учетом формул (3) граничные условия (1) запишем в виде

$$\begin{aligned} (\sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1) &= p_y - ip_{xy} - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \text{ на } L_1, \\ (\sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1) &= (1 - if)p_y - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \text{ на } L_2, \end{aligned}$$

$$(\sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1) = -(\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \text{ на } L_3.$$

Компоненты тензора напряжений  $\sigma_x^1$ ,  $\sigma_y^1$ ,  $\tau_{xy}^1$  и вектора перемещений  $u_1$ ,  $v_1$  выразим через две кусочно-аналитические функции  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  [34]

$$\begin{aligned} \sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 &= \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \\ 2\mu \frac{\partial}{\partial x}(u_1 + iv_1) &= \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\mu$  – модуль сдвига материала;  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  для плосконапряженного состояния;  $\kappa = 3 - \nu$  для плоской деформации;  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала.

На основании граничных условий (1) приходим [34] к задаче линейного сопряжения с разрывными коэффициентами

$$\begin{aligned} [\Phi(x) + \Omega(x)]^+ + [\Phi(x) + \Omega(x)]^- &= 2F_0(x), \\ [\Phi(x) - \Omega(x)]^+ - [\Phi(x) - \Omega(x)]^- &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{Здесь } F_0(x) = \begin{cases} p_y - ip_{xy} - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{на } L_1 \\ (1 - if)p_y - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{на } L_2 \\ -(\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{на } L_3 \end{cases}.$$

Решение краевой задачи (5) запишется в виде

$$\Phi(z) = \Omega(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{(z-a)(z-b)}} \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(t-b)} F_0(t)}{t-z} dt. \quad (6)$$

При  $z \rightarrow \infty$   $X(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)} = z + O\left(\frac{1}{z}\right)$ . Корень под знаком интеграла представляет собой значение ветви соответствующей функции, выделяемой приведенным условием на верхнем берегу щели.

В формулу (6) входят неизвестные контактные напряжения  $p_y(x)$  и  $p_{xy}(x)$ . Эти напряжения определяются соотношениями (2). Для их определения построим интегральные уравнения следующим образом.

Используя формулу (4) и граничные значения функций  $\Phi(z)$ ,  $\Omega(z)$  на отрезке  $a < x < b_1$  при  $y = 0$ , получаем

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \frac{2\mu}{1 + \kappa} \left[ \frac{\partial}{\partial x}(u^+ - u^-) + i \frac{\partial}{\partial x}(v^+ - v^-) \right]. \quad (7)$$

Теперь, используя формулы Сохоцкого-Племеля [34] и учитывая соотношение (6), находим

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = -\frac{i}{\pi X^+(x)} \int_a^b \frac{X^+(t) F_0(t)}{t-x} dt. \quad (8)$$

С учетом соотношений (2), (7) и (8) после некоторых преобразований находим систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций  $p_y(x)$  и  $p_{xy}(x)$

$$\frac{1}{\pi X_1^+(x)} \left[ \int_{L_1+L_2} \frac{X_1^+(t) p_y(t)}{t-x} dt - \int_a^b \frac{X_1^+(t) \sigma_y^0}{t-x} dt \right] = \frac{2\mu}{1 + \kappa} h'(x), \quad (9)$$

$$\int_{L_1} \frac{X_1^+(t) p_{xy}(t)}{t-x} dt + \int_{L_2} \frac{X_1^+(t) f p_y(t)}{t-x} dt - \int_a^b \frac{X_1^+(t) \tau_{xy}^0}{t-x} dt = 0, \quad (10)$$

где  $X_1^+(t) = \sqrt{(t-a)(b-t)}$ .

Решение сингулярного интегрального уравнения (9) получим путем решения соответствующей задачи Римана [34]. Представим уравнение (9) в виде

$$\int_{L_1+L_2} \frac{q_y(\tau)}{\tau-t} d\tau = f_*(t),$$

где  $q_y(t) = p_y(t)X_1^+(t)$ ;  $f_*(t) = \frac{2\mu h'(t)X_1^+(t)}{1+\kappa} + \int_a^b \frac{X_1^+(\tau)\sigma_y^0}{\tau-t} d\tau$ .

Введем кусочно-аналитическую функцию

$$F_*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{q_y(\tau)}{\tau-z} d\tau,$$

заданную интегралом Коши, плотность которого является искомым решением интегрального уравнения. Эта функция представляет собой решение задачи линейного сопряжения граничных значений

$$F_*^+(\tau) + F_*^-(\tau) = \frac{f_*(\tau)}{\pi i}. \quad (11)$$

Решение краевой задачи (11) в классе всюду ограниченных функций имеет следующий вид:

$$F_*(z) = \frac{X_2(z)}{2\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\tau)}{X_2^+(\tau)(\tau-z)} d\tau.$$

Здесь  $X_2(z) = \prod_{k=1}^n \sqrt{(z-\alpha_k)(z-\beta_k)}$ ,

$$X_2^+(\tau) = \prod_{k=1}^n \sqrt{(\tau-\alpha_k)(\tau-\beta_k)}, \quad f_*^1(\tau) = \frac{f_*(\tau)}{\pi i}.$$

Используя формулы Сохоцкого-Племеля, получаем решение сингулярного интегрального уравнения (9)

$$q_y(t) = F_*^+(t) - F_*^-(t),$$

$$F_*^+(t) = X_2^+(t) \left[ \frac{1}{2} \frac{f_*^1(t)}{X_2^+(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\tau)}{X_2^+(\tau)(\tau-t)} d\tau \right],$$

$$F_*^-(t) = X_2^-(t) \left[ -\frac{1}{2} \frac{f_*^1(t)}{X_2^+(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\tau)}{X_2^+(\tau)(\tau-t)} d\tau \right].$$

Поскольку  $X_2^-(t)/X_2^+(t) = -1$ , имеем

$$q_y(t) = \frac{X_2^+(t)}{\pi i} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\tau)}{X_2^+(\tau)(\tau-t)} d\tau,$$

Из последней формулы следует

$$p_y(t) = \frac{1}{\pi i} \frac{X_2^+(t)}{X_1^+(t)} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(\tau)}{X_2^+(\tau)(\tau-t)} d\tau.$$

Для определения границы контакта берегов щели, т. е. неизвестных величин  $\alpha_k$  и  $\beta_k$ , имеем уравнения

$$\int_{L_1+L_2} \frac{f_*^1(t)}{X_2^+(t)} t^{k-1} dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Не хватает  $n$  уравнений для определения координат концов участков контакта. Получим их из условий

$$v^+(\alpha_k) - v^-(\alpha_k) = -h(\alpha_k), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Имеем

$$v^+(\alpha_k) - v^-(\alpha_k) = \frac{1+\kappa}{4i\mu} \int_{\alpha_1}^x \{ [\Phi + \bar{\Phi}]^+ - [\Phi + \bar{\Phi}]^- \} dt.$$

С помощью предыдущих формул получим недостающие уравнения

$$\int_a^{\alpha_1} \{ [\Phi + \bar{\Phi}]^+ - [\Phi + \bar{\Phi}]^- \} dt = -\frac{4i\mu h(\alpha_1)}{1+\kappa},$$

$$\int_{\beta_k}^{\alpha_{k+1}} \{ [\Phi + \bar{\Phi}]^+ - [\Phi + \bar{\Phi}]^- \} dt = -\frac{4i\mu}{1+\kappa} [h(\alpha_{k+1}) - h(\beta_k)], \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Таким же образом, решая сингулярное интегральное уравнение (10), найдем

$$p_{xy}(x) = \frac{X_3^+(x)}{\pi^2 X_1^+(x)} \int_{L_1} \frac{f_{xy}(\tau)}{X_3^+(\tau)(\tau-x)} d\tau.$$

$$\text{Здесь } X_3^+(x) = \prod_{k=1}^m \sqrt{(x-c_k)(x-d_k)}; \quad f_{xy}(x) = -\int_{L_2} \frac{X_1^+(t) f p_y(t)}{t-x} dt + \int_a^b \frac{X_1^+(t) \tau_{xy}^0(t)}{t-x} dt.$$

Для нахождения границы сцепления берегов щели (неизвестных величин  $c_k, d_k$ ) имеем

$$\int_{L_1} \frac{f_{xy}(t)}{X_3^+(t)} t^{k-1} dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Недостающие  $m$  уравнений для определения координат концов участков сцепления получим из следующих условий:

$$u^+(c_k) - u^-(c_k) = \int_a^{c_k} \frac{\partial}{\partial t} [u^+ - u^-] dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Имеем

$$\int_a^{c_1} [\Phi^+ - \Phi^-] dt = -\frac{2i\mu h(c_1)}{1+\kappa},$$

$$\int_{d_k}^{c_{k+1}} [\Phi^+ - \Phi^-] dt = -\frac{2i\mu}{1+\kappa} [h(c_{k+1}) - h(d_k)], \quad k = 1, 2, \dots, m-1.$$

Для нахождения участков сцепления берегов щели получили полную систему уравнений.

Выбирая полиномы (3) определенного вида, получим решения ряда практически важных задач. В частности, когда в формулах (3)

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{M}{4I}, \quad A_3 = 0,$$

$$B_0 = 0, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = \frac{3M}{4I}, \quad B_3 = 0,$$

где  $I$  – момент инерции площади сечения полосы; функции  $\Phi_0(z)$  и  $\Omega_0(z)$  дают решение задачи о чистом изгибе моментами  $M$  бесконечной полосы (балки) без щели.

При

$$A_0 = \frac{q}{24I}, A_1 = 0, A_2 = \frac{q}{8I} \left( L^2 + \frac{2c^2}{5} \right), A_3 = -\frac{qc^3}{12I},$$

$$B_0 = \frac{7q}{24I}, B_1 = 0, B_2 = \frac{q}{8I} \left( 3L^2 - \frac{11c^2}{5} \right), B_3 = \frac{qc^3}{12I}$$

функции (3) дают решение задачи об изгибе полосы (балки) длиной  $2L$  без щели, нагруженной равномерным давлением интенсивности  $q$ , для случая, когда балка свободно расположена на двух опорах, а опорные реакции определяются как касательные усилия, приложенные к торцам балки.

Необходимые интегралы, содержащие функции  $X_1^+(t)$ ,  $X_2^+(t)$  и  $X_3^+(t)$ , вычислялись приемом, предложенным Н. И. Мусхелишвили [34].

Проведен параметрический анализ зависимости контактных напряжений  $p_y(x)$  и  $p_{xy}(x)$ . В качестве примера рассмотрен случай щели, ширина которой изменяется по линейному закону

$$h(x) = h_2 + (h_1 - h_2) \frac{b-x}{b-a}, \quad h'(x) = -\frac{h_1 - h_2}{b-a}.$$

Коэффициент трения был принят постоянным  $f(x) = \rho_0$ .

На рис. 2, 3 представлены графики контактных напряжений для случая  $h_1 = 0,0005(b-a)$ ;  $h_2 = 0,15h_1$  ( $x_* = x/(b-a)$ ). На рис. 2 цифры у кривых соответствуют значениям  $10^4 \sigma_0/E$  ( $\sigma_0 = M/W$ ;  $E$  – модуль упругости материала;  $W$  – момент сопротивления площади сечения). На рис. 3 для обеих кривых  $\sigma_0 = 2 \cdot 10^{-4} E$ .

Расчеты показывают, что уменьшение угла между линией щели и линией действия внешней нагрузки приводит к уменьшению зоны сцепления.

### Выводы

Предложена эффективная схема расчета частично закрытой внешними нагрузками щели переменной ширины. Решение контактной задачи получено в квадратурах. Анализ модели частичного контактирования щели переменной ширины в изотропной среде при действии внешнего неоднородного напряженного поля сводится к параметрическому исследованию полученных формул при различных геометрических и физических параметрах среды.

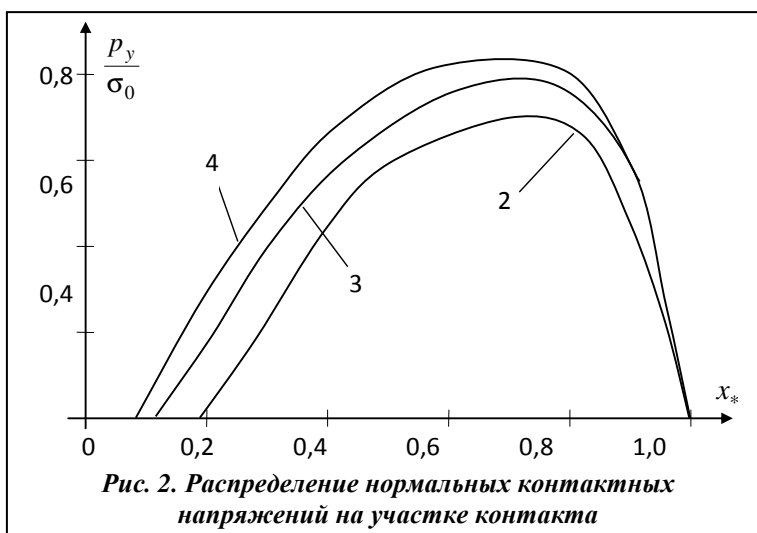


Рис. 2. Распределение нормальных контактных напряжений на участке контакта

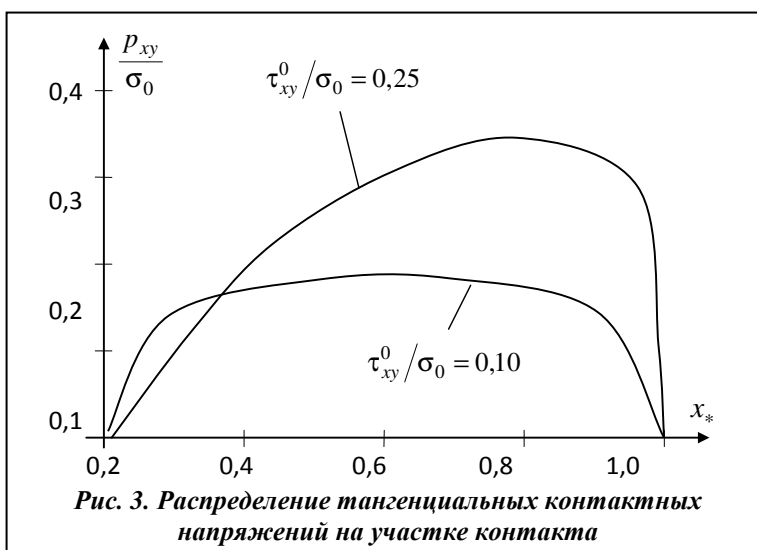


Рис. 3. Распределение тангенциальных контактных напряжений на участке контакта

## Литература

1. *Мир-Салим-заде М. В.* Моделирование частичного закрытия трещины в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров / М. В. Мир-Салим-заде // Мат. моделирование. – 2007. – Т. 19, № 3. – С. 105–115.
2. *Мирсалимов В. М.* Моделирование частичного закрытия трещин в среде с пустотами / В. М. Мирсалимов // Мат. моделирование. – 2008. – Т. 20, № 2. – С. 32–42.
3. *Гасанов Ш. Г.* Продольная трещина с частично контактирующими берегами в сечении дорожного покрытия / Ш. Г. Гасанов // Строит. механика инженер. конструкций и сооружений. – 2009. – № 2. – С. 29–35.
4. *Мирсалимов В. М.* Торможение когезионной трещины локальным изменением толщины пластины / В. М. Мирсалимов, Р. У. Оруджева // Вестн. Чуваш. пед. ун-та. им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2009. – № 1(6). – С. 142–149.
5. *Мирсалимов В. М.* Моделирование закрытия трещины со связями между берегами во втулке контактной пары / В. М. Мирсалимов // Механика твердого тела. – 2009. – № 2. – С. 78–92.
6. *Мирсалимов В. М.* Контактное разрушение втулки при наличии трещин вблизи поверхности трения / В. М. Мирсалимов // Пробл. машиностроения и надежности машин. – 2009. – Т. 38, № 6. – С. 41–51.
7. *Мир-Салим-заде М. В.* Моделирование частичного закрытия трещин в перфорированной изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров / М. В. Мир-Салим-заде // Прикл. механика и техн. физика. – 2010. – Т. 51, № 2. – С. 148–159.
8. *Мирсалимов В. М.* Торможение роста когезионной трещины малыми выточками / В. М. Мирсалимов, Р. У. Оруджева // Деформация и разрушение материалов. – 2010. – № 7. – С. 24–30.
9. *Мирсалимов В. М.* О частичном закрытии трещиновидной полости в горящем твердом топливе / В. М. Мирсалимов, Б. Э. Рустамов // Деформация и разрушение материалов. – 2010. – № 12. – С. 23–27.
10. *Гасанов Ш. Г.* Моделирование напряженно-деформированного состояния дорожного покрытия при наличии малых трещин с взаимодействующими берегами / Ш. Г. Гасанов // Вестн. Чуваш. пед. ун-та. им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2010. – № 1(7). – С. 25–30.
11. *Мирсалимов В. М.* Моделирование частичного закрытия трещиновидных полостей в горящем твердом топливе при действии объемных сил / В. М. Мирсалимов, Б. Э. Рустамов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. серия. Математика. Механика, Информатика. – 2011. – Т. 11, вып. 1. – С. 70–73.
12. *Мирсалимов В. М.* Частичное закрытие трещины в перфорированном тепловыделяющем массиве / В. М. Мирсалимов, А. Р. Вагари // Физико-хим. механика материалов. – 2011. – Т. 46, № 6. – С. 39–44.
13. *Гасанов Ш. Г.* Когезионная трещина с частично контактирующими берегами в сечении дорожного покрытия / Ш. Г. Гасанов // Механика машин, механизмов и материалов. – 2012. – № 2(19). – С. 58–64.
14. *Мирсалимов В. М.* Моделирование частичного закрытия трещиновидной полости в изотропной среде / В. М. Мирсалимов, Б. Э. Рустамов // Пробл. машиностроения и надежности машин. – 2012. – Т. 41, № 5. – С. 58–65.
15. *Мирсалимов В. М.* Моделирование частичного закрытия трещиновидной полости со связями между берегами в изотропной среде / В. М. Мирсалимов, Б. Э. Рустамов // Прикл. механика и техн. физика. – 2013. – Т. 54, № 6. – С. 181–190.
16. *Мирсалимов В. М.* Частичное закрытие трещиновидной полости в изотропной среде / В. М. Мирсалимов // Деформация и разрушение материалов. – 2013. – № 1. – С. 16–20.
17. *Мир-Салим-заде М. В.* Контактная задача для стрингерной пластины, ослабленной щелью переменной ширины / М. В. Мир-Салим-заде // Фундамент. и прикл. проблемы техники и технологии. – 2014. – № 2(304). – С. 23–29.
18. *Мирсалимов В. М.* Точное решение контактной задачи о частичном взаимодействии берегов щели переменной ширины при действии температурного поля / В. М. Мирсалимов, А. Б. Мустафаев // Пробл. машиностроения. – 2014. – Т. 17, № 3. – С. 33–37.
19. *Мирсалимов В. М.* Частичное контактирование берегов криволинейной трещины в листовом элементе под действием локального теплового поля / В. М. Мирсалимов, А. Б. Мустафаев // Вестн. Чуваш. пед. ун-та. им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2014. – № 1(19). – С. 37–51.
20. Elastic-plastic analysis of interaction between an interface and crack in bi-materials / M. Belhouari, A. Amiri, A. Mehidi, K. Madani, B. Bel Abbes Bachir // Int. J. Damage Mech. – 2014. – Vol. 23. – P. 299–326.
21. *Мустафаев А. Б.* Взаимодействие берегов щели переменной ширины при изгибе полосы (балки) под воздействием температурного поля / А. Б. Мустафаев // Механика машин, механизмов и материалов. – 2014. – № 3(28). – С. 30–36.
22. *Мустафаев А. Б.* Торможение роста криволинейной трещины с концевыми пластическими зонами с помощью наведенного теплового поля напряжений / А. Б. Мустафаев // Фундамент. и прикл. проблемы. техники и технологии. – 2015. – № 3(311). – С. 15–21.

23. *Мирсалимов В. М.* Решение задачи о частичном контактировании берегов щели переменной ширины под действием температурного поля / В. М. Мирсалимов, А. Б. Мустафаев // Физико-хим. механика материалов. – 2015. – Т. 51, № 1. – С. 86–92.
24. *Mirsalimov V. M.* A contact problem on partial interaction of faces of a variable thickness slot under the influence of temperature field / V. M. Mirsalimov, A. B. Mustafayev // *Mechanika*. – 2015. – Vol. 21. – P. 19–22.
25. *Мир-Салим-заде М. В.* Периодическая контактная задача для стрингерной пластины / М. В. Мир-Салим-заде // Тяжелое машиностроение. – 2015. – № 6. – С. 37–42.
26. *Мир-Салим-заде М. В.* Закрытие щели, исходящей из контура кругового отверстия в стрингерной пластине / М. В. Мир-Салим-заде // Вестн. Чуваш. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2016. – № 1(27). – С. 78–89.
27. *Mirsalimov V. M.* Simulation of partial closure of a variable width slot with interfacial bonds in end zones in an isotropic medium / V. M. Mirsalimov // *Int. J. Damage Mech.* – 2016. – Vol. 25. – P. 266–279.
28. *Мир-Салим-заде М. В.* Частичный контакт берегов щели переменной ширины в подкрепленной стрингерами пластине / М. В. Мир-Салим-заде // Физико-хим. механика материалов. – 2016. – Т. 52, № 3. – С. 29–34.
29. *Мирсалимов В. М.* Закрытие криволинейной трещины в листовом элементе под действием температурного поля / В. М. Мирсалимов, А. Б. Мустафаев // Пробл. машиностроения. – 2016. – Т. 19, № 4. – С. 36–43.
30. *Мирсалимов В. М.* Контактная задача о взаимодействии берегов щели переменной ширины с концевыми зонами пластических деформаций / В. М. Мирсалимов // Вестн. Чуваш. пед. ун-та им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2016. – № 2(28). – С. 23–33.
31. *Mirsalimov V. M.* Inhibition of a curvilinear bridged crack by induced thermoelastic stress field / V. M. Mirsalimov, A. B. Mustafayev // *J. Thermal Stresses*. – 2016. – Vol. 39. – P. 1301–1319.
32. *Мустафаев А. Б.* Замедление роста щели переменной ширины под действием температурного поля / А. Б. Мустафаев // Прикл. механика и техн. физика. – 2017. – Т. 58, № 1. – С. 168–176.
33. *Mirsalimov V. M.* A contact problem for a plane weakened by a periodic system of variable width slots / V. M. Mirsalimov // *Mathematics and Mechanics Solids*. – 2017. – DOI: <https://doi.org/10.1177/1081286516680863>.
34. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.

Поступила в редакцию 07.04.17

**О. Ф. Полищук**, канд. техн. наук  
**К. В. Аврамов**, д-р техн. наук  
**К. Б. Мягкохлеб**, канд. техн. наук

Институт проблем машиностроения  
 им. А. Н. Подгорного НАН  
 Украины, г. Харьков, e-mail:  
 polishchuk@ipmach.kharkov.ua,  
 kavramov@ipmach.kharkov.ua,  
 mkb@ipmach.kharkov.ua

**Ключові слова:** вимушені нелінійні коливання, стрижень, тріщина.

УДК 539.3

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВЫНУЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ С ПОПЕРЕЧНЫМИ ДЫШАЩИМИ ТРЕЩИНАМИ

*Експериментально досліджуються вимушені коливання стрижнів з поперечними тріщинами великої глибини, що дихають. Коливання стрижнів збуджуються кінематичним рухом закладення, що відтворюється за допомогою вібростенда. Результати аналізу коливань зображені на амплітудно-частотній характеристиці. Аналізуються Фур'є спектри періодичних коливань. Досліджуються області багатозначності коливань.*

### Введение

Наличие трещин является одной из наиболее распространенных причин разрушения конструкций. Для того чтобы избежать этих разрушений, проводятся исследования для разработки диагностических критериев появления трещин. Параметры нелинейных колебаний конструкций чрезвычайно чувствительны к образованию дышащих трещин, поэтому могут использоваться в качестве диагностических критериев при образовании трещин. Много усилий предпринято для исследования не-

© О. Ф. Полищук, К. В. Аврамов, К. Б. Мягкохлеб, 2017