

В. Д. Кубенко, И. В. Янчевский

КОЛЕБАНИЯ НЕЗАМКНУТОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ
ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ
ИМПУЛЬСНОМ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: vdk@inmech.kiev.ua*

Abstract. The non-stationary axisymmetric deformations of a non-closed spherical bi-morphic (metal-piezoceramics) shell are studied. The mechanical boundary conditions correspond to the rigidly supported edges conditions, whereas the electric conditions are the mixed ones. The equations of the theory of thin electroelastic shells are used to describe the transient processes. An output potential difference determination as well as the additional loads engaged for the boundary conditions fulfilling are carried out numerically on the basis of the obtained system of Volterra integral equations with using the Tikhonov regularization algorithm. The numerical results are presented. Their reliability is estimated by comparison with the finite-element solutions of the problem.

Keywords: electroelasticity, non-closed spherical shell, non-stationary process, electromechanical load.

Введение.

Широкое применение в различных технических устройствах пьезокерамических преобразователей в виде тонких сферических оболочек обуславливает повышенный интерес к исследованиям их поведения при динамических нагрузках. К настоящему времени получены многочисленные результаты для замкнутых оболочек.

В частности, в [5] приведены выражения для амплитуд колебаний под действием гармонически изменяющейся во времени разности электрических потенциалов. Электроупругие колебания сферических оболочек со сплошными электродами при их возбуждении электрическими и акустическими импульсами рассмотрены в [9, 10], а решения задач управления этими колебаниями представлены в [18, 19]. Из публикаций последних лет, в которых изучены переходные процессы в конструктивных элементах из электроупругих материалов, отметим [15, 17, 20].

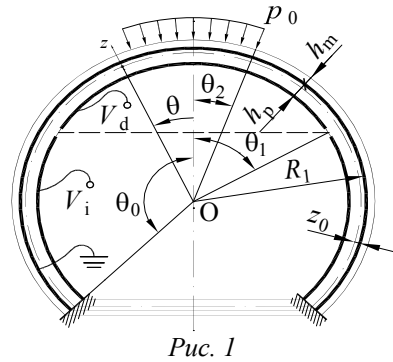
Заметим, что большинство используемых на практике сферических пьезопреобразователей, в частности, в прикладной гидроакустике, имеют отверстие с горловиной под крепление. Этим была продиктована необходимость проведения экспериментальных исследований [7] по оценке адекватности применения существующей математической модели замкнутой сферической оболочки для описания поведения реальных сферических пьезоизлучателей с указанными конструктивными особенностями. Очевидно, что с увеличением размеров отверстия отклонения параметров колебательного процесса от результатов решения на основе вышеуказанной модели будут все более значительными. Это свидетельствует об актуальности разработки подходов и на их основе решения динамических задач для незамкнутых биморфных оболочек, края которых различным образом закреплены. Отметим, что этому вопросу посвящены единичные публикации. В работе [5], в частности, описано общее решение задачи об установившихся осесимметричных колебаниях электрически нагруженной пьезокерамической оболочки со свободным отверстием. В монографии [4] методом конечных

элементов исследовано термомеханическое поведение вязкоупругих пьезокерамических полых шаров с отверстием и цилиндрическим патрубком при гармоническом электрическом нагружении.

Целью данной работы является решение задачи о неустановившихся осесимметричных деформациях незамкнутой сферической пьезокерамической оболочки с жестко заземленным краем при импульсном электромеханическом ее нагружении. Рассмотрено биморфное конструктивное исполнение пьезопреобразователя, т.е. при наличии дополнительного слоя из пьезоэлектрически пассивного упругого материала. Использование слоев с различными функциональными свойствами, как отмечено в [8, 16], позволяет существенно расширить перечень практических приложений пьезопреобразователей вследствие многообразия геометрических и физических характеристик, высоких эксплуатационных параметров и др.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим незамкнутую в нижнем полусе сферическую оболочку, составленную из тонких, жестко соединенных между собой, электроупругого и упругого слоев с толщинами, соответственно, h_p и h_m . Радиус поверхности соединения слоев обозначим как R_1 , а размер кругового отверстия определим сферическим углом раствора $\theta = \theta_0$ (рис. 1). На равномерно поляризованный вдоль нормали к срединной поверхности пьезокерамический слой нанесены бесконечно тонкие токопроводящие покрытия (электроды), из которых внутренний сплошной электрод заземлен, а внешний электрод имеет выполненный в окружном направлении разрез при $\theta = \theta_1$ (рис. 1).



В конкретно полученном решении предполагаем, что колебания оболочки, край которой жестко заземлен, возбуждаются импульсом давления интенсивностью p_0 , зона приложения которой определяется углом θ_2 (рис. 1). Также к электроду нижней секции ($\theta > \theta_1$) подводится заданный электрический потенциал V_i , а электроды пьезокерамического слоя верхней секции ($\theta < \theta_1$) принимаем разомкнутыми. До момента приложения нагрузки $t = 0$ оболочка находится в состоянии покоя.

2. Уравнения движения и граничные условия.

При описании переходного процесса используем уравнения линейной теории электроупругих оболочек, основанных на обобщенных гипотезах Кирхгофа – Лява [1, 6]. Тогда в рамках принятых для механических переменных допущений исходная пространственная задача о деформировании двухслойного пакета сводится к двумерной о колебаниях поверхности приведения, положение которой определяется расстоянием $z_0 = (c_{1p}h_p^2 - c_{1m}h_m^2)/2D_N$ [8] относительно поверхности соединения слоев (рис. 1). Здесь $c_{1j} = 1/s_{11}^j (1 - \nu_j^2)$; s_{11}^j , ν_j – упругие податливости и коэффициенты Пуассона материалов; $D_N = c_{1p}h_p + c_{1m}h_m$ – жесткость на растяжение; $j = m, p$ – индекс, определяющий принадлежность параметра упругому или электроупругому слою.

В результате вывод уравнений движения рассматриваемой биморфной оболочки методически подобен выводу уравнений для однослойных пьезокерамических оболочек [1], записанных в рамках обобщенных гипотез Кирхгофа – Лява. Эти уравнения окончательно принимают вид

$$D_1 u_0 + D_2 w + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = q_\theta + \left(1 + \frac{a_p}{R_0}\right) \frac{\partial V}{\partial \theta};$$

$$D_3 u_0 + D_4 w + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_z - \left[2V - \frac{a_p}{R_0} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta\right)\right]. \quad (1)$$

Здесь $w(\theta, t)$ и $u_0(\theta, t)$ – составляющие вектора перемещений точек поверхности приведения ($z = 0$); $q_\theta(\theta, t)$ и $q_z(\theta, t)$ – меридиональная и нормальная составляющие внешней нагрузки; $V(\theta, t)$ – электрический потенциал на внешнем токопроводящем покрытии ($z = z_0 - h_p$); $a_p = z_0 - h_p/2$ – смещение срединной поверхности пьезокерамического слоя от поверхности приведения; $R_0 = R_1 - z_0$ – радиус кривизны поверхности $z = 0$; t – время; z , θ – толщинная координата, отсчитываемая от поверхности приведения, и меридиональная координата, отсчитываемая от оси симметрии (рис. 1).

В системе (1) использованы дифференциальные операторы:

$$D_1 = -(1 + \delta) \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - (\operatorname{ctg}^2 \theta + \tilde{\nu}) \right];$$

$$D_2 = \delta \left[\frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - (\operatorname{ctg}^2 \theta + \tilde{\nu}) \frac{\partial}{\partial \theta} \right] - (1 + \tilde{\nu}) \frac{\partial}{\partial \theta};$$

$$D_3 = -\delta \left[\frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - (1 + \operatorname{ctg}^2 \theta + \bar{\nu}) \frac{\partial}{\partial \theta} + (2 + \operatorname{ctg}^2 \theta - \bar{\nu}) \operatorname{ctg} \theta \right] +$$

$$+ (1 + \nu) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \right];$$

$$D_4 = \delta \left[\frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} - (1 + \operatorname{ctg}^2 \theta + \bar{\nu}) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + (2 + \operatorname{ctg}^2 \theta - \bar{\nu}) \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] + 2(1 + \nu),$$

причем $\tilde{\nu} = (\nu + \delta \bar{\nu}) / (1 + \delta) \approx \nu$; $\delta = \bar{D} / (D_N R_0^2)$; $\bar{\nu} = \nu + (1 - \nu) \Delta D / \bar{D}$ – приведенный коэффициент Пуассона [8]; $\bar{D} = c_{1p} J_p + c_{1m} J_m + \Delta D$; $\Delta D = (e_1^2 / \varepsilon_3) J_{p0}$; $J_p = (z_0^3 - (z_0 - h_p)^3) / 3$; $J_m = ((z_0 + h_m)^3 - z_0^3) / 3$; $J_{p0} = h_p^3 / 12$.

Задачу решаем с использованием безразмерных переменных: время t отнесено к $R_0 \sqrt{\rho_h / D_N}$ ($\rho_h = \rho_p h_p + \rho_m h_m$; ρ_j – плотности материалов), перемещения w и u_0 – к R_0 , усилия q – к D_N / R_0 , тангенциальные усилия N – к D_N , изгибающие моменты M – к \bar{D} / R_0 , электрический потенциал V – к $-D_N / e_1$ ($e_1 = c_{1p} d_{31} (1 + \nu_p)$, d_{31} – пьезомодуль), индукция электрического поля D_t – к e_1 .

Для интегральных характеристик напряженного состояния (тангенциальных усилий и изгибающих моментов) имеем следующие равенства:

$$N_\theta = \left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \nu u_0 \operatorname{ctg} \theta \right) + w(1 + \nu) + V; \quad N_\varphi = \left(\nu \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + u_0 \operatorname{ctg} \theta \right) + w(1 + \nu) + V;$$

$$M_\theta = \left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \bar{v} u_0 \operatorname{ctg} \theta \right) - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \bar{v} \frac{\partial w}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{1}{\delta} \frac{a_p}{R_0} V ;$$

$$M_\varphi = \left(\bar{v} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + u_0 \operatorname{ctg} \theta \right) - \left(\bar{v} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{1}{\delta} \frac{a_p}{R_0} V .$$

Распределение электростатического потенциала аппроксимируем выражением

$$\psi = -V(\theta, t) \frac{z - z_0}{h_p} + \gamma_2 \frac{R_0}{h_p} (\kappa_\theta + \kappa_\varphi) \cdot (z - z_0) \cdot (z - z_0 + h_p),$$

которое удовлетворяет электрическим условиям на поверхностях пьезокерамического слоя ($\psi|_{z=z_0} = 0$ и $\psi|_{z=z_0+h_p} = V$, см. рис. 1) и допущению о постоянстве по его толщине нормальной компоненты вектора электрической индукции, т.е.

$$D_z = (\varepsilon_\theta + a_p \kappa_\theta) + (\varepsilon_\varphi + a_p \kappa_\varphi) - \frac{1}{\gamma_2} \frac{V}{R_0}, \quad (2)$$

где $\gamma_2 = e_1^2 h_p / D_N \varepsilon_3$; $\varepsilon_3 = \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2)$; $k_p^2 = 2d_{31} e_1 / \varepsilon_{33}^T$ – квадрат планарного коэффициента электромеханической связи [1, 6, 8] (ε_{33}^T – диэлектрическая проницаемость пьезокерамики); $\varepsilon_{\theta(\varphi)}$ и $\kappa_{\theta(\varphi)}$ – деформации растяжения и изгиба поверхности приведения, которые выражаются через компоненты перемещений w и u_0 согласно известных зависимостей [6].

Исходные уравнения движения (1) следует дополнить граничными условиями. Механическая группа условий для жесткого защемления края имеет вид

$$w|_{\theta=\theta_0} = 0; \quad u_0|_{\theta=\theta_0} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial \theta}|_{\theta=\theta_0} = 0. \quad (3)$$

Форма электрических граничных условий зависит от вида электродирования и способа подвода (съема) электрической энергии. Для представленной на рис. 1 схемы потенциал V определяется следующим равенством:

$$V = V_d \cdot H(\theta_1 - \theta) + V_i \cdot H(\theta - \theta_1), \quad (4)$$

где H – единичная функция Хевисайда.

Если принять, что электроды пьезокерамического слоя в секторе $\theta > \theta_1$ подключены к генератору напряжений, то функция V_i является заданной. Если его электроды при $\theta < \theta_1$ разомкнуты, то должно выполняться равенство нулю тока смещения через срединную поверхность пьезокерамического слоя, т.е.

$$I = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_1} D_z R_0 \sin \theta d\theta d\varphi = 0.$$

С учетом (2) соотношение для разности потенциалов V_d имеет вид

$$V_d = \frac{\gamma_2}{(1 - \cos \theta_1)} \int_0^{\theta_1} \left[\left(1 + \frac{a_p}{R_0} \right) \nabla u_0 + \left(2w - \frac{a_p}{R_0} \nabla^2 w \right) \right] \sin \theta d\theta; \quad (5)$$

$$\nabla(\) = \frac{\partial(\)}{\partial\theta} + (\) \cdot \text{ctg}\theta \quad \text{и} \quad \nabla^2(\) = \frac{\partial^2(\)}{\partial\theta^2} + \frac{\partial(\)}{\partial\theta} \cdot \text{ctg}\theta.$$

Совокупность равенств (1) – (5) совместно с однородными начальными условиями $w|_{t=0} = u_0|_{t=0} = \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = \frac{\partial u_0}{\partial t}|_{t=0} = 0$ образует полную систему уравнений рассматриваемой начально-краевой задачи об осесимметричных колебаниях биморфной оболочки металл – пьезокерамика.

Полученная математическая модель может быть легко сведена к случаю однослойной пьезокерамической оболочки, если положить толщину упругого слоя равной нулю ($h_m = 0$). Очевидно, что при этом поверхность $z = 0$ представляет собой срединную поверхность оболочки ($a_p = 0$). Принятие $h_p = 0$ и $d_{31} = \varepsilon_{33}^T = 0$ позволяет записать уравнения движения однослойной оболочки в рамках теории Кирхгофа – Лява, изготовленной из упругого материала.

Посредством равенства (4) можно формулировать электрические граничные условия и при сплошном электродировании пьезокерамического слоя оболочки. В частности, для механически нагруженной оболочки имеем $\theta_1 = \theta_0$ и $V = V_d$. При электрическом возбуждении колебаний такой оболочки ($\theta_1 = 0$) функция $V = V_i$ является известной функцией времени.

На основании выражений (1), (4), (5) несложно также получить уравнения пульсирующих колебаний замкнутой сферической оболочки со сплошными электродами, нагруженной равномерно распределенным давлением $p_0(t)$ (одномерная постановка), т.е.

$$2(1+\nu)w + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p_0 - 2V. \quad (6)$$

При этом, в случае работы пьезокерамического слоя в режиме прямого пьезоэлектрического эффекта ($\theta_1 = \pi$) неизвестную разность потенциалов $V = V_d$ на основании соотношения (5) можно записать через перемещения w ($V = 2\gamma_2 w$), что позволяет исключить ее из дифференциального уравнения (6).

3. Метод решения.

Решение рассматриваемой задачи строим в виде рядов по собственным функциям замкнутой оболочки

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t) P_k(y); \quad u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) P_k^1(y), \quad (7)$$

где $y = \cos\theta$; P_k , P_k^1 – присоединенные функции Лежандра I-го рода, а c_k , b_k – коэффициенты, подлежащие определению.

Для удовлетворения граничных условий (3), представленных в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(t) P_k(y_0) = 0; \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) P_k^1(y_0) = 0; \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) P_k^1(y_0) = 0 \quad (y_0 = \cos\theta_0), \quad (8)$$

используем прием, изложенный в монографиях [2, 13] при решении задач о неустановившихся осесимметричных деформациях упругих механически нагруженных круглой пластины и незамкнутой сферической оболочки при произвольных кинематических граничных условиях. Согласно этому приему, вводим систему дополнительных

механических нагрузок q_0 и q_1 (рис. 2), равномерно распределенных на узкой полосе шириной $R_0\Delta\theta$ ($\Delta\theta \rightarrow 0$) в окрестности параллели $\theta = \theta_0 - \Theta$, близкой к месту защемления оболочки ($\Theta \rightarrow 0$).

В результате этого входящие в правую часть системы (1) составляющие внешней механической нагрузки равны:

$$q_z(\theta, t) = p(\theta, t) - q_0(t) \cdot H(\Delta\theta - 2|\theta_0 - \Theta - \theta|);$$

$$q_\theta(\theta, t) = -q_1(t) \cdot H(\Delta\theta - 2|\theta_0 - \Theta - \theta|), \quad (9')$$

$p(\theta, t) = -p_0(t) \cdot H(\theta_2 - \theta)$ – интенсивность заданной механической нагрузки (рис. 1).

С использованием разложения обратной тригонометрической функции в степенной ряд

$$\theta = \arccos y = \frac{\pi}{2} - y - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{2n+1}}{2n+1} \prod_{j=1}^n \frac{2j-1}{2j},$$

приближенного равенства $(1 \pm b)^n \approx 1 \pm nb$, записи (9') несложно переопределить через координату y :

$$q_z(y, t) = -p_0(t) \cdot H(y - y_2) - q_0(t) \cdot H(\Delta y - 2|y_0 + \varepsilon - y|); \quad (9'')$$

$$q_\theta(y, t) = -q_1(t) \cdot H(\Delta y - 2|y_0 + \varepsilon - y|),$$

в которых $y_2 = \cos \theta_2$, а для величин Δy и ε при $\Delta\theta \rightarrow 0$ ($\Delta\theta = (\theta_0 - \Theta + \Delta\theta/2) - (\theta_0 - \Theta - \Delta\theta/2)$) и $\Theta \rightarrow 0$ получены такие соотношения: $\Delta y \approx \Delta\theta/K$; $\varepsilon \approx \Theta/K$, где

$$K = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} y_0^{2n} \prod_{j=1}^n \frac{2j-1}{2j}.$$

При этом функции q_z и q_θ (9'') могут быть представлены в виде рядов, аналогичных (7), т.е.

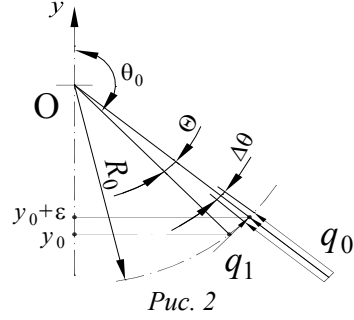
$$q_z(y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} [p_0(t) \Delta_k^{(0)} + Q_0(t) \xi_k^{(8)} + M_0(t) \xi_k^{(9)}] P_k(y);$$

$$q_\theta(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} N_0(t) \xi_k^{(7)} P_k^1(y) \quad (10)$$

$$\left(\xi_k^{(7)} = -\frac{P_k^1(y_0)}{R_0 K} \frac{2k+1}{2(k^2+k)}; \quad \xi_k^{(8)} = -\frac{1}{R_0 K} P_k(y_0) \frac{2k+1}{2}; \right.$$

$$\left. \xi_k^{(9)} = -\frac{1}{R_0^2 K^2} \frac{P_k^1(y_0)}{\sqrt{1-y_0^2}} \frac{2k+1}{2}; \quad \Delta_k^{(0)} = -\frac{P_{k-1}(y_2) - P_{k+1}(y_2)}{2} \right).$$

Выражения (10) получены: на основании свойства ортогональности сферических функций на интервале $(-1; 1)$; равенства



$$(2k+1) \int_a^b P_k(y) dy = P_{k+1}(b) - P_{k-1}(b) - P_{k+1}(a) + P_{k-1}(a);$$

разложения функции P_k в ряд Тейлора в окрестности точки $y = y_0$, в котором ограничивались первыми двумя членами –

$$P_k(y_0 + \varepsilon) \approx P_k(y_0) + \varepsilon \cdot \left. \frac{\partial P_k}{\partial y} \right|_{y=y_0}$$

и уже выполнен предельный переход к сосредоточенным в точке $\theta = \theta_0$ ($y = y_0$) радиальной Q_0 , тангенциальной N_0 и моментной M_0 нагрузкам на основании соотношений

$$q_0 R_0 \Delta \theta \xrightarrow{\Delta \theta \rightarrow 0} Q_0; \quad Q_0 \Theta R_0 \xrightarrow{\Theta \rightarrow 0} M_0 \quad \text{и} \quad q_1 R_0 \Delta \theta \xrightarrow{\Delta \theta \rightarrow 0} N_0.$$

Электрическая переменная V также представлена в виде ряда по полиномам Лежандра

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} v_k P_k(y), \quad (11)$$

коэффициенты которого, в соответствии с равенством (4), равны:

$$v_k = \xi_k^{(10d)} V_d + \xi_k^{(10i)} V_i,$$

причем

$$\xi_0^{(10d)} = \frac{1-y_1}{2}; \quad \xi_0^{(10i)} = \frac{1+y_1}{2}; \quad \xi_k^{(10d)} = \frac{P_{k-1}(y_1) - P_{k+1}(y_1)}{2}; \quad \xi_k^{(10i)} = -\xi_k^{(10d)}; \quad y_1 = \cos \theta_1.$$

Соотношение (5) и представления (7) позволяют выразить неизвестную разность потенциалов V_d через коэффициенты b_k и c_k :

$$V_d = \frac{\gamma_2}{1-y_1} \sum_{k=0}^{\infty} [\xi_k^{(11)} c_k + \xi_k^{(12)} b_k]; \quad (12)$$

$$\xi_k^{(11)} = -\frac{2}{2k+1} \xi_k^{(6d)}; \quad \xi_k^{(12)} = -\xi_k^{(5d)} \frac{2}{2k+1} (k^2 + k);$$

$$\xi_k^{(5)} = \xi_k^{(10)} \left(1 + \frac{a_p}{R_0} \right); \quad \xi_k^{(6)} = -\xi_k^{(10)} \left(2 + \frac{a_p}{R_0} (k^2 + k) \right).$$

Тогда, учитывая разложения (7), (10) и (11), равенства [12]

$$P_k^m(y) = (-1)^m (1-y^2)^{m/2} \frac{d^m P_k}{dy^m};$$

$$P_k^{m+2}(y) = -2(m+1)y(1-y^2)^{-1/2} P_k^{m+1}(y) - (k-m)(k+m+1) P_k^m(y),$$

исходная система уравнений (1) в пространстве изображений по Лапласу [3] при нулевых начальных условиях примет такой вид:

$$\left(\xi_k^{(1)} + s^2 \right) b_k^L + \xi_k^{(2)} c_k^L = N_0^L \xi_k^{(7)} + \left(\xi_k^{(5d)} V_d^L + \xi_k^{(5i)} V_i^L \right);$$

$$\xi_k^{(3)} b_k^L + (\xi_k^{(4)} + s^2) c_k^L = (p_0^L \Delta_k^{(0)} + Q_0^L \xi_k^{(8)} + M_0^L \xi_k^{(9)}) + (\xi_k^{(6d)} V_d^L + \xi_k^{(6i)} V_i^L). \quad (13)$$

Здесь индекс L обозначает изображения соответствующих функций ($L\{f(t)\} = f^L(s)$); s – комплексный параметр преобразования, а для постоянных коэффициентов в левой части имеем формулы:

$$\xi_k^{(1)} = (1 + \delta)[k^2 + k - 1 + \tilde{\nu}]; \quad \xi_k^{(3)} = -[\delta(k^2 + k)(k^2 + k - 1 + \bar{\nu}) + (k^2 + k)(1 + \nu)];$$

$$\xi_k^{(2)} = -[\delta(k^2 + k - 1 + \tilde{\nu}) + (1 + \tilde{\nu})]; \quad \xi_k^{(4)} = \delta(k^2 + k)(k^2 + k - 1 + \bar{\nu}) + 2(1 + \nu).$$

Решив систему (13) относительно трансформант b_k^L и c_k^L , получим

$$c_0^L(s) = \frac{D_0^c(s)}{s^2 + \alpha_0^2}; \quad c_k^L(s) = \frac{D_k^c(s)}{D_k(s)}; \quad b_k^L(s) = \frac{D_k^b(s)}{D_k(s)} \quad (k \geq 1), \quad (14)$$

где использованы такие обозначения:

$$D_k(s) = s^4 + \lambda_k^{(1)} s^2 + \lambda_k^{(2)};$$

$$D_0^c = p_0^L \Delta_0^{(0)} + Q_0^L \xi_0^{(8)} + [\xi_0^{(6d)} V_d^L + \xi_0^{(6i)} V_i^L];$$

$$D_k^c(s) = p_0^L \Delta_k^{(0)} (s^2 + \lambda_k^{(8)}) + Q_0^L \xi_k^{(8)} (s^2 + \lambda_k^{(8)}) + M_0^L \xi_k^{(9)} (s^2 + \lambda_k^{(8)}) - N_0^L \xi_k^{(3)} \xi_k^{(7)} + \\ + V_d^L \xi_k^{(6d)} (s^2 + \lambda_k^{(6)}) + V_i^L \xi_k^{(6i)} (s^2 + \lambda_k^{(6)});$$

$$D_k^b(s) = -p_0^L \xi_k^{(2)} \Delta_k^{(0)} - Q_0^L \xi_k^{(2)} \xi_k^{(8)} - M_0^L \xi_k^{(2)} \xi_k^{(9)} + N_0^L \xi_k^{(7)} (s^2 + \lambda_k^{(7)}) + \\ + V_d^L \xi_k^{(5d)} (s^2 + \lambda_k^{(5)}) + V_i^L \xi_k^{(5i)} (s^2 + \lambda_k^{(5)})$$

$$(\alpha_0^2 = \xi_0^{(4)}; \quad \lambda_k^{(1)} = \xi_k^{(1)} + \xi_k^{(4)}; \quad \lambda_k^{(2)} = \xi_k^{(1)} \xi_k^{(4)} - \xi_k^{(2)} \xi_k^{(3)}; \quad \lambda_k^{(7)} = \xi_k^{(4)}; \quad \lambda_k^{(8)} = \xi_k^{(1)};$$

$$\lambda_k^{(5)} = \xi_k^{(4)} - \xi_k^{(2)} \xi_k^{(6)} / \xi_k^{(5)}; \quad \lambda_k^{(6)} = \xi_k^{(1)} - \xi_k^{(3)} \xi_k^{(5)} / \xi_k^{(6)}).$$

Корни уравнения $D_k(s) = 0$ являются чисто мнимыми, поэтому для удобства последующего обращения выражение для $D_k(s)$ представим в форме $D_k(s) = (s^2 + \alpha_k^{(1)2}) (s^2 + \alpha_k^{(2)2})$, где $\alpha_k^{(j)}$ – модули упомянутых корней.

Таким образом, выражения (14) являются дробно-рациональными функциями параметра s и переход в пространство оригиналов для них не вызывает принципиальных затруднений. Для коэффициентов разложений тангенциальных u_0 и радиальных w перемещений (7) получаем равенства

$$c_0(t) = \int_0^t [\Delta_0^{(0)} p_0(\tau) + \xi_0^{(8)} Q_0(\tau) + \xi_0^{(6d)} V_d(\tau) + \xi_0^{(6i)} V_i(\tau)] I_0^{(8)}(t - \tau) d\tau;$$

$$c_k(t) = \int_0^t [\Delta_k^{(0)} p_0(\tau) + \xi_k^{(8)} Q_0(\tau) + \xi_k^{(9)} M_0(\tau)] I_k^{(8)}(t - \tau) d\tau -$$

$$-\xi_k^{(3)} \int_0^t \xi_k^{(7)} N_0(\tau) I_k^{(1)}(t-\tau) d\tau + \int_0^t [\xi_k^{(6d)} V_d(\tau) + \xi_k^{(6i)} V_i(\tau)] I_k^{(6)}(t-\tau) d\tau; \quad (15)$$

$$b_k(t) = -\xi_k^{(2)} \int_0^t [\Delta_k^{(0)} p_0(\tau) + \xi_k^{(8)} Q_0(\tau) + \xi_k^{(9)} M_0(\tau)] I_k^{(1)}(t-\tau) d\tau + \\ + \int_0^t \xi_k^{(7)} N_0(\tau) I_k^{(7)}(t-\tau) d\tau + \int_0^t [\xi_k^{(5d)} V_d(\tau) + \xi_k^{(5i)} V_i(\tau)] I_k^{(5)}(t-\tau) d\tau.$$

Здесь подынтегральные функции $I_k^{(r)}(t)$ определяются формулами

$$I_0^{(8)}(t) = I_0^{(6)}(t) = \frac{1}{\alpha_0} \sin(\alpha_0 t); \quad I_k^{(r)}(t) = \sum_{j=1}^2 \frac{\beta_k^{(r,j)}}{\alpha_k^{(j)}} \sin(\alpha_k^{(j)} t) \quad \text{при } k \geq 1$$

$$\left(\beta_k^{(1,j)} = \frac{1}{\alpha_k^{(j)2} - \alpha_k^{(j)2}}; \quad \beta_k^{(r,j)} = \frac{\lambda_k^{(r)} - \alpha_k^{(j)2}}{\alpha_k^{(j)2} - \alpha_k^{(j)2}} \quad (j, t = 1, 2; t \neq j; r = \overline{5, 8}) \right).$$

Входящие в (15) неизвестные функции Q_0 , M_0 , N_0 и V_d должны быть такими, чтобы были удовлетворены механические граничные условия (8) и равенство (12). В результате подстановки (15) в (8) получим систему интегральных уравнений Вольтерра типа свертки относительно указанных неизвестных. Если ввести способствующие более компактному дальнейшему изложению обозначения $F_1 = p_0$; $F_2 = Q_0$; $F_3 = M_0$; $F_4 = N_0$; $F_5 = V_d$; $F_6 = V_i$, то указанную систему можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^6 \int_0^t F_i(\tau) \Psi_i^{(j)}(t-\tau) d\tau - \delta_{3j} \frac{1-y_1}{\gamma_2} F_5 = 0 \quad (j = \overline{0, 3}),$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, а для ядер получены выражения ($j = 0, 1$)

$$\Psi_1^{(j)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k^{(0)} P_k^j(y_0) I_k^{(8)}(t); \quad \Psi_2^{(j)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k^{(8)} P_k^j(y_0) I_k^{(8)}(t);$$

$$\Psi_3^{(j)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(9)} P_k^j(y_0) I_k^{(8)}(t); \quad \Psi_4^{(j)}(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(3)} \xi_k^{(7)} P_k^j(y_0) I_k^{(1)}(t);$$

$$\Psi_5^{(j)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k^{(6d)} P_k^j(y_0) I_k^{(6)}(t); \quad \Psi_6^{(j)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k^{(6i)} P_k^j(y_0) I_k^{(6)}(t);$$

$$\Psi_1^{(2)}(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(2)} \Delta_k^{(0)} P_k^1(y_0) I_k^{(1)}(t); \quad \Psi_2^{(2)}(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(2)} \xi_k^{(8)} P_k^1(y_0) I_k^{(1)}(t);$$

$$\Psi_3^{(2)}(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(2)} \xi_k^{(9)} P_k^1(y_0) I_k^{(1)}(t); \quad \Psi_4^{(2)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(7)} P_k^1(y_0) I_k^{(7)}(t);$$

$$\Psi_5^{(2)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(5d)} P_k^1(y_0) I_k^{(5)}(t); \quad \Psi_6^{(2)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(5i)} P_k^1(y_0) I_k^{(5)}(t);$$

$$\Psi_1^{(3)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k^{(0)} \Lambda_k(t); \quad \Psi_2^{(3)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k^{(8)} \Lambda_k(t); \quad \Psi_3^{(3)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(9)} \Lambda_k(t);$$

$$\Lambda_k(t) = \xi_k^{(11)} I_k^{(8)}(t) - \xi_k^{(2)} \xi_k^{(12)} I_k^{(1)}(t);$$

$$\Psi_4^{(3)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(7)} \left[\xi_k^{(12)} I_k^{(7)}(t) - \xi_k^{(3)} \xi_k^{(11)} I_k^{(1)}(t) \right];$$

$$\Psi_5^{(3)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\xi_k^{(6d)} \xi_k^{(11)} I_k^{(6)}(t) + \xi_k^{(5d)} \xi_k^{(12)} I_k^{(5)}(t) \right];$$

$$\Psi_6^{(3)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\xi_k^{(6i)} \xi_k^{(11)} I_k^{(6)}(t) + \xi_k^{(5i)} \xi_k^{(12)} I_k^{(5)}(t) \right].$$

Ее решение выполняется численно, для чего на основании метода квадратур построен конечно-мерный аналог в виде системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Матричное представление её имеет вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{13} & \mathbf{M}_{14}^d \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{23} & \mathbf{M}_{24}^d \\ \mathbf{M}_{31} & \mathbf{M}_{32} & \mathbf{M}_{33} & \mathbf{M}_{34}^d \\ \mathbf{M}_{41} & \mathbf{M}_{42} & \mathbf{M}_{43} & \mathbf{M}_{44}^d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{M}_0 \\ \mathbf{N}_0 \\ \mathbf{V}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{15} & \mathbf{M}_{14}^i \\ \mathbf{M}_{25} & \mathbf{M}_{24}^i \\ \mathbf{M}_{35} & \mathbf{M}_{34}^i \\ \mathbf{M}_{45} & \mathbf{M}_{44}^i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{V}_i \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Здесь блоки матриц являются нижними треугольными ($m_{\max} \times m_{\max}$)-матрицами ($m_{\max} = t_{\text{inv}}/\Delta t$, t_{inv} – время исследования; Δt – шаг дискретизации временного интервала), а в вектор-столбцы входят кусочно-постоянные аппроксимации известных (\mathbf{p}_0 и \mathbf{V}_i) и искомых функций. Для построения устойчивого к счёту решения (16) применен метод регуляризации А.Н. Тихонова, численная сторона реализации которого дана в [11, 14]. На последующем этапе были вычислены компоненты перемещений и деформаций и другие характеристики рассматриваемого переходного процесса.

Для полусферической оболочки ($y_0 = 0$) решение задачи существенно упрощается, если представить перемещения w и u_0 в виде разложения по полиномам Лежандра четных степеней (см. (7)). При этом последние два условия системы (3) выполняются тождественно. Для удовлетворения оставшегося равенства, неизвестное поперечное усилие Q_0 определяется из СЛАУ, получаемой из исходной (16) после исключения пустых блоков –

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{14}^d \\ \mathbf{M}_{41} & \mathbf{M}_{44}^d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{V}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{15} & \mathbf{M}_{14}^i \\ \mathbf{M}_{45} & \mathbf{M}_{44}^i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{V}_i \end{bmatrix}.$$

Для замкнутой оболочки к уравнениям движения (1) следует присоединить только электрические граничные условия. В результате, кусочно-постоянная аппроксимация выходной разности потенциалов V_d может быть вычислена из СЛАУ вида

$$\mathbf{M}_{44}^d \mathbf{V}_d = \mathbf{M}_{45} \mathbf{p}_0 + \mathbf{M}_{44}^i \mathbf{V}_i,$$

при решении которой эффективными являются и классические подходы [13, 14].

Методом вариаций произвольных постоянных с учетом нулевых начальных условий из дифференциального уравнения (6) несложно получить формулу для пульси-

рующих колебаний замкнутой оболочки со сплошными электродами при электро-механическом ее возбуждении, т.е.

$$w = \int_0^t [p_0(\tau) - 2V_i(\tau)] I^{(0)}(t-\tau) d\tau.$$

Если электроды пьезокерамического слоя разомкнуты ($V = V_d$), то нестационарные колебания механически нагруженной сферической оболочки ($p_0 \neq 0$) определяются выражением

$$w = \int_0^t \frac{1}{\alpha_0^*} p_0(\tau) \sin(\alpha_0^*(t-\tau)) d\tau \quad (\alpha_0^* = \sqrt{2(1+\nu+2\gamma_2)}).$$

Очевидно, что при приложении к такой оболочке статического давления $\overline{p_0}$ радиальное перемещение будет равным $\overline{w_p} = \overline{p_0}/\alpha_0^{*2}$. Из (6) также получим значение $\overline{w_V} = -\overline{V_i}/(1+\nu)$, соответствующее случаю подведения к ее электродам постоянного электрического сигнала $\overline{V_i}$, когда $\overline{p_0} = 0$. Совместное приложение механической и электрической нагрузок при $p_0 = 2V_i$ является уравновешенным ($w = 0$).

4. Числовые результаты.

В качестве примера рассмотрим поведение биморфной сферической оболочки с граничными условиями (3) при следующих исходных данных: $R_0 = 50$ мм; $h_p = 2$ мм; $h_m = h_p/2$; $\rho_p = 7600$ кг/м³; $s_{11}^E = 15,4 \cdot 10^{-12}$ м²/Н; $s_{12}^E = -5,1 \cdot 10^{-12}$ м²/Н; $d_{31} = -178 \cdot 10^{-12}$ Кл/Н; $\varepsilon_{33}^T = 1750 \cdot \varepsilon_0$; $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; $\rho_m = 4450$ кг/м³; $E^m = 11,3 \cdot 10^{10}$ Н/м² (физические данные материалов соответствуют свойствам титанового сплава ВТ-6 и пьезокерамики марки PZT-5).

При решении данной задачи в рядах (7) учтены первые 400 членов, при этом вклад последнего не превышает 0,5 % от суммарного значения перемещения. Шаг по времени при составлении СЛАУ (16) принят равным $\Delta t = 0,125$. Параметр регуляризации, согласно методу Тихонова, подобран на основании принципа невязки [11].

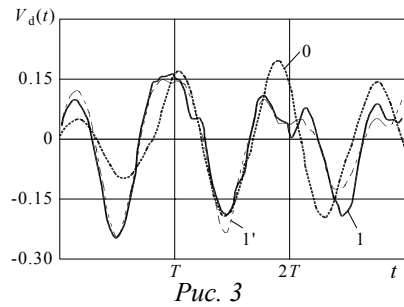


Рис. 3

Расчеты проведены для электрического сигнала ступенчатого профиля $V_i = H(t)$ в интервале времени $[0; 3T]$ ($T = 2\pi/\alpha_0$ – период пульсирующих колебаний биморфной оболочки, пьезокерамический слой которой находится в режиме обратного пьезоэффекта).

При этом принято, что внешнее механическое воздействие отсутствует ($p_0 = 0$). На представленных рисунках величины w отнесены к $\overline{w_V}$, соответствующему действию единичной статической электрической нагрузки ($\overline{V_i} = 1$).

На рис. 3 и 4 приведены результаты исследований переходных процессов в биморфных оболочках, внешнее токопроводящее покрытие которых имеет разрез, причем на электроде с $\theta > \theta_1$ обеспечивается заданный электрический потенциал $V_i = H(t)$, а электроды в секторе $\theta < \theta_1$ – разомкнутые (имеют место смешанные электрические условия).

Результаты определения выходной разности потенциалов V_d для незамкнутой жестко заземленной при $\theta_0 = 3\pi/4$ оболочки с $\theta_1 = \pi/4$ и для замкнутой оболочки с $\theta_1 = \pi/2$ (площади генераторной и выходной секций пьезокерамического слоя равны) представлены на рис. 3 (кривые 1 и θ , соответственно). Для оценки их достоверности задача в рассматриваемой постановке для оболочки с $\theta_0 = 3\pi/4$ решена методом конечных элементов (кривая 1', рис. 3).

Очевидно, что численно-аналитическое (кривая 1) и конечно-элементное (кривая 1') решения хорошо согласуются на начальном этапе деформирования открытой оболочки (рис. 3) и незначительно различаются при $t > 2T$.

Перемещения w в двух характерных точках ($y \approx 1$ и $y = 0$) для указанных оболочек отражены на рис. 4, при этом рис. 4, а соответствует случаю незамкнутой оболочки, рис. 4, б – оболочка замкнута (разрез при $\theta_1 = \pi/2$). Как и ранее, цифрой 1' обозначены результаты, вычисленные на основании МКЭ.

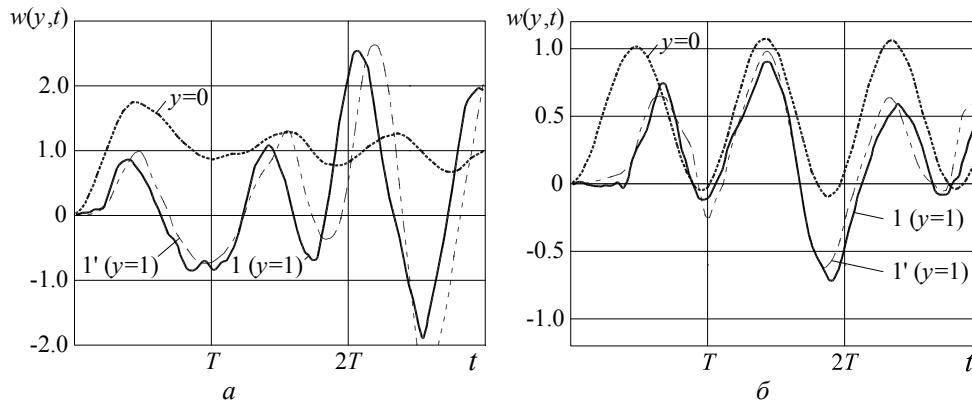


Рис. 4

На основе данных рис. 4, а можно сделать вывод, что при $V_i = H(t)$ радиальные перемещения точки $\theta = \pi/2$ при $t > T$ практически выходят на статический уровень деформаций. Колебания в том же экваториальном сечении замкнутой сферической оболочки с разрезным в точке $y = 0$ ($\theta = \pi/2$) электродом (рис. 4, б) подобны электрически возбуждаемым пульсирующим колебаниям оболочки со сплошными электродами, представляющие собой решение уравнения (6) при $V = V_i$ и $p_0 = 0$. Однако, в этом случае перемещения $w|_{y=0}$ имеют вдвое меньшую амплитуду, что обусловлено, по-видимому, меньшей подводимой извне энергией, и происходят с несколько большей частотой, значение которой находится в диапазоне между частотой пульсирующих колебаний механически нагруженной оболочки при разомкнутых электродах пьезокерамического слоя ($1/\alpha_0^*$) и частотой колебаний оболочки, возбуждаемой электрическим путем ($1/\alpha_0$).

На рис. 4 также четко выражены запаздывания по времени начала радиальных колебаний полюсной точки оболочки ($y \approx 1$). Этот временной промежуток примерно соответствует времени прохождения фронта волны деформации от границы зоны электрического нагружения к исследуемой точке.

Выводы.

1. В рамках теории тонких электроупругих оболочек, основанных на гипотезах Кирхгофа – Лява, получены общие выражения для характеристик переходного процесса в незамкнутой биморфной сферической оболочке типа металл – пьезокерамика, возникающих при осесимметричном импульсном электромеханическом ее нагруже-

нии. При этом принято, что импульс давления действует на некоторой площадке в окрестности полюса, а электрический сигнал подводится к одной из секций электродов пьезокерамического слоя (электроды второй секции – разомкнуты). Для приближенного удовлетворения механических граничных условий вдоль края оболочки введена система дополнительных нагрузок, значения которых определены из системы интегральных уравнений Вольтерра. Для построения устойчивого решения системы использован регуляризирующий алгоритм.

2. Числовые результаты представлены для наиболее простого случая – жесткого закрепления края сферической оболочки. Однако, располагая полученными выражениями можно рассмотреть и другие механические и электрические граничные условия, что позволит качественно оценить влияние различных вариантов закрепления и геометрии электродирования.

3. Эффективность методики и достоверность результатов оценена путем сопоставления с решениями тестовых задач с помощью МКЭ. В целом получено хорошее качественное, а также количественное совпадение численно-аналитических и конечно-элементных решений (относительное расхождение результатов находится в пределах 15 %).

4. Предложенная методика может быть использована для решения задачи управления электроупругими колебаниями сферической оболочки и при идентификации временной составляющей осесимметричной механической нагрузки по результатам регистрации разности потенциалов между электродами выходной секции пьезокерамического слоя, возникающей в результате деформирования оболочки.

РЕЗЮМЕ. Досліджено нестационарні осесиметричні деформації незамкненої сферичної біморфної (метал – п'єзокераміка) оболонки, механічні граничні умови для якої відповідають умовам жорсткого заземлення, електричні умови – змішані. Для опису перехідних процесів використано рівняння теорії тонких електропружних оболонок. Визначення початкової різниці потенціалів, як і додаткових навантажень, що вводяться для задоволення механічних граничних умов, здійснено чисельно на основі отриманої системи інтегральних рівнянь Вольтерра з використанням регуляризуючого алгоритму Тихонова. Наведено числові результати, вірогідність яких оцінено на основі зіставлення їх зі скінченно-елементними розв'язками задач.

1. Борисейко В.А., Мартыненко В.С., Улитко А.Ф. К теории пьезокерамических оболочек // Матем. физика. – 1977. – Вып. 21. – С. 71 – 76.
2. Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П. Нестационарные колебания деформируемых систем. – К.: Наук. думка, 1977. – 339 с.
3. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 466 с.
4. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: Изд-во ЖГТУ, 2005. – 428 с.
5. Механика связанных полей в элементах, конструкциях: В 5-ти т. / Под общ. ред. А.Н. Гузя. Т. 5. Электроупругость / Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с.
6. Методы расчета оболочек: В 5-ти т. / Под общ. ред. А.Н. Гузя. Т. 5. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек / Гузь А.Н., Кубенко В.Д. – К.: Наук. думка, 1982. – 400 с.
7. Моргун И.О., Савин В.Г. Экспериментальные исследования переходных режимов работы одноимодовых сферических пьезокерамических преобразователей // Электроника и связь. – 2009. – № 1. – С. 54 – 57.
8. Рудницкий С.И., Шаранов В.М., Шульга Н.А. Колебания дискового биморфного преобразователя типа металл – пьезокерамика // Прикл. механика. – 1990. – 26, № 10. – С. 64 – 72.
9. Савин В.Г., Моргун И.О. Преобразование акустических импульсов в электрические сферической пьезокерамической оболочкой // Электроника и связь. – 2006. – № 6. – С. 36 – 42.

10. *Савин В.Г., Моргун И.О.* Преобразование электрических импульсов в акустические экранированной сферической пьезокерамической оболочкой // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 2. – С. 133 – 142.
11. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1990. – 229 с.
12. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции: Формулы, графики, таблицы. – М.: Наука, 1964. – 344 с.
13. *Янютин Е.Г.* Импульсное деформирование упругих элементов конструкций. – К.: Наук. думка, 1993. – 146 с.
14. *Янютин Е.Г., Янчевский И.В.* Импульсные воздействия на упругодеформируемые элементы конструкций. – Харьков: Изд-во ХАДИ, 2001. – 184 с.
15. *Babaev A.E., Yanchevskii I.V.* Identification of the shock load on an electroelastic bimorph disk // Int. Appl. Mech. – 2011. – **47**, N 5. – P. 560 – 567.
16. *Dobrucki A.B., Pruchnicki P.* Theory of piezoelectric axisymmetric bimorph // Sensors and Actuators A: Physical. – 1997. – **58**, Iss. 3. – P. 203 – 212.
17. *Karnaukhov V.G., Tkachenko Ya.V.* Active damping of the resonant vibrations of a flexible viscoelastic rectangular plate // Int. Appl. Mech. – 2011. – **47**, N 4. – P. 457 – 464.
18. *Paul J., Titterton Jr.* Synthesis of optimal, single-frequency, passive control laws with application to reducing the acoustic radiation from a submerged spherical shell // J. Acoust. Soc. Am. – 1999. – **105**, N 4. – P. 2261 – 2268.
19. *Scandrett C.* Scattering and active acoustic control from a submerged spherical shell // J. Acoust. Soc. Am. – 2002. – **111**, Iss. 2. – P. 893 – 907.
20. *Shul'ga N.A., Grigor'eva L.O.* Electroelastic two-dimensional nonstationary vibrations of a piezoceramic body under mechanical loading // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 5. – P. 493 – 499.
21. *Wang C.-Y., Vaicaitis R.* Active control of vibrations and noise of double wall cylindrical shells // J. of Sound and Vibration. – 1998. – **216**, Iss. 5. – P. 865 – 888.

Поступила 01.12.2011

Утверждена в печать 22.11.2012